

아치구조물의 구조해석에서 수치미분의 적용

Application of Numerical Differentiation in Structural Analyses of Arch Structures

이 병 구† 김 석 기* 이 태 은**
Lee, Byoung-Koo Kim, Suk-Ki Lee, Tae-Eun
(논문접수일 : 2006년 7월 29일 ; 심사종료일 : 2006년 12월 4일)

요 지

이 논문은 구조해석에서 수치미분의 적용성에 관한 연구이다. 구조물 선형식의 미분은 구조물의 거동해석에서 반드시 필요한 수학적 계산 중의 하나이다. 아치와 같이 구조물의 선형식이 곡선인 경우에 미분식의 산출은 많은 시간과 노력을 필요로 한다. 이 연구에서는 구조해석에서 수치미분의 적용성을 아치의 자유진동 문제를 통하여 검증하였다. 전진 5차다항식으로부터 아치 곡률항의 미분값을 계산하고 이를 대수적으로 구한 곡률항과 비교하였다. 이렇게 얻은 곡률항을 이용하여 최종적으로 산출한 아치의 고유진동수는 문헌해와 아주 우수하게 근접하였다. 이러한 결과로부터 구조해석에서 수치미분의 적용성과 그 결과의 정확성을 입증할 수 있었다.

핵심용어 : 수치미분, 전진 5차다항식, 구조해석, 아치, 고유진동수

Abstract

This paper deals with the application of the numerical differentiation in the structural analyses. Derivative values of the geometry of structure are definitely needed for analysing the structural behavior. In this study, free vibration problems of arches are chosen for verifying the numerical differential technique in the structural analyses. The curvature parameters composed with the derivatives of arch geometry obtained herein are quite agreed with those of analytical method. Also, natural frequencies with curvature parameters obtained by using the forward fifth polynomial method are quite agreed with those in the literature. The numerical differentiation technique can be practically utilized in the structural analyses.

Keywords : numerical differentiation, forward fifth polynomial method, structural analysis, arch, natural frequency

1. 서 론

공학 분야에서 다양한 수치해석법의 이용은 필수적이다. 이에 따라 구조물의 정·동적 해석에서 보다 정확하고 효율적인 수치해석법이 요구되며, 각종 공학 분야에서 여러 가지 수치해석법의 효율성에 관한 연구가 많이 진행되고 있다(Chapra 등, 1998). 지금까지 이러한 수치해석법에 관한 연구 중에서 수치적분은 많은 연구 논문에서 그 적용성이 연구되어 왔지만(Lee 등, 1990) 구조해석에서 수치미분(numerical differentiation)의 적용성을 검증한 예는 찾아볼 수 없었다.

아치는 구조적으로 매우 이상적이며 미관이 아름답기 때문에 단위구조로 이용되고 있다. 변화곡률 아치는 원호 아치와

는 다르게 곡률변화를 이론에 적용하여야 하기 때문에 이론의 전개가 난해할 뿐만 아니라 그 해 또한 얻기가 어렵다(Leontovich, 1969).

이 연구는 아치의 자유진동 문제를 통하여 구조해석에서 수치미분에 대한 적용성을 검증하는데 연구목적이 있다. 본 논문에서는 아치의 곡률항을 수치미분으로 계산하고 이렇게 구한 곡률항을 이용하여 고유진동수를 산출하고 이를 문헌해와 비교하여 수치미분의 적용성 및 정확성을 검증하였다.

이 연구와 관련하여 수치해석법을 이용한 아치구조물의 동적 문제의 국내외 연구 동향을 살펴보면 다음과 같다. Lee와 Wilson(1990)은 등단면 변화곡률 아치의 자유진동을 해석하였다. 수치예로는 포물선 및 정현 아치의 예를 보였다.

† 책임저자, 정희원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수
Tel: 063-850-6718 ; Fax: 063-857-7204
E-mail: bkleest@wonkwang.ac.kr

* 단국대학교 토목환경공학과 교수

** 정희원, 원광대학교 토목환경공학과 겸임교수

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

Wilson 등(1994)은 변단면 원호형 아치의 고유진동수를 산출하였다. 이 연구에서 변단면으로는 1차원 및 2차원 변단면을 채택하였다. Wilson와 Lee(1995)는 현수아치의 면내 자유진동을 연구하였다. 이 연구에서는 아치의 비대칭성을 고려하였다. Oh 등(1999)은 회전관성과 전단변형을 고려한 아치의 고유진동수를 산출하였다. 이 논문에서는 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고 수치적분을 이용하여 무차원 고유진동수를 산출하는 수치해석법을 개발하였다. 오상진 등(2002)은 탄성지반으로 지지된 낮은 아치의 대칭 및 역대칭의 최저차 고유진동수를 산출하였다. Lee 등(2003)은 직교좌표계에서 아치의 고유진동수를 산출할 수 있는 수치해석법을 개발하였다. 이 논문은 미분연산자를 이용하여 극좌표계가 아닌 직교좌표계에서 미분방정식을 유도한 논문이다. 이상의 모든 문헌들은 미분방정식의 계수 산출에서 대수적 방법을 사용하였으며 수치미분을 이용하여 계수를 산출한 논문은 없었다.

본 논문에서 수치미분의 적용성 및 정확성을 검증하기 위하여 아치의 선형으로 타원 및 포물선 아치를 채택하였다. 자유진동을 지배하는 미분방정식에서 곡률항을 수치미분에 의해 산출하였다. 그 결과를 대수적 방법에 의한 값과 비교하였고, 최종적으로는 수치미분으로 얻은 곡률항을 이용하여 고유진동수를 산출하고 이를 문헌해(Lee 등, 1990)와 비교하였다.

2. 수치미분법

2.1 수치미분 개론

공학문제는 공간과 시간 내에서 각종 설명변수의 변화를 특성화시켜야 한다. 이와 같이 설명변수를 특성화시킨 공학적 법칙들은 대부분 수학적 함수식으로 표현된다. 이러한 경우에 해석할 함수가 이미 알고 있는 함수이거나 간단한 함수일 때는 해석적 방법 즉, 대수적 방법으로 해석하는 것이 일반적이다. 그러나 그 함수가 복잡하거나 함수값이 이산자료로 주어질 때에는 대수적 방법으로 해석하는 것은 불가능하다. 이러한 경우에 수치해석법은 근사해를 찾을 수 있는 매우 효율적인 수단이다.

수치해석법에서 이 연구의 대상이 되고 있는 수치미분법에는 매우 많은 방법들이 있다. 이러한 모든 방법을 본 논문에서 모두 취급하기에는 그 범위가 너무 광범위하기 때문에 적당한 수치미분법을 선정하기 위하여 사전연구(pilot study)를 실시하였다. 그 결과로부터 Taylor 급수를 이용하는 수치미분법이 가장 타당함을 알 수 있었다. Taylor 급수를 이용

하는 수치미분법에는 전진법, 중앙법, 후진법 등이 있고, Taylor 급수에 포함되는 다항식의 수가 수치미분의 정도에 영향을 미친다. 마찬가지로 사전연구를 통하여 3가지 방법 중에서 전진법을 택하였고 또한 5차다항식을 이용하는 경우에 충분한 정도가 유지되는 것을 알 수 있었다. 따라서 이 연구에서는 수치미분법으로 전진 5차다항식을 선정하였다.

2.2 전진 5차다항식

수치미분은 함수 $y=f(x)$ 의 임의점 x_i 에서 인접점들의 함수값을 이용하여 접선의 기울기를 근사화함으로써 미분값을 추정하는 방법이다. 그림 1은 수치미분하려는 함수 $y=f(x)$ 를 직교좌표계에 나타낸 것이다. 이 연구에서는 함수 $y=f(x)$ 의 1계, 2계, 3계, 4계 미분값을 전진법으로 계산하는 과정을 설명한다(Chapra 등, 1998). 4계 미분값을 계산하기 위해서는 그림 1에 보인바와 같이 5개 이상의 등간격 이산 함수값을 필요로 한다. 앞서서도 언급한 바와 같이 아치의 곡률항을 비교적 정확하게 산출하기 위해서는 5차항 이상의 다항식이 필요한 것을 사전연구를 통하여 확인할 수 있었다.

그림 1에서 임의점 x_i 의 1계 도함수 $f_i^{(1)}$ 은 (x_i, f_i) 와 (x_{i+1}, f_{i+1}) 의 두 점 사이를 직선으로 가정하고 이 직선의 기울기를 구함으로써 다음과 같이 1계 미분값을 근사화할 수 있다.

$$f_i^{(1)} = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (1)$$

같은 방법으로 함수 $y=f(x)$ 의 x_i 에서 n 계 미분값 $f_i^{(n)}$ 은 다음과 같이 근사화할 수 있다.

$$f_i^{(n)} = \frac{f_{i+1}^{(n-1)} - f_i^{(n-1)}}{x_{i+1} - x_i} \quad (2)$$

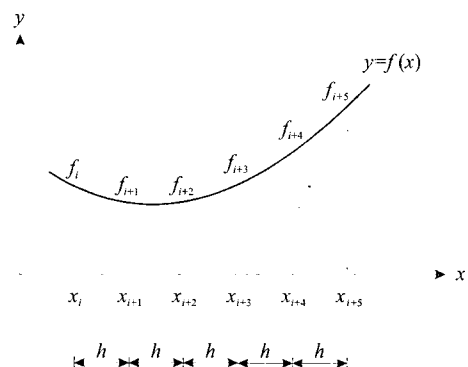


그림 1 전진 5차다항식의 이산 함수값

이제 식 (1), (2)로 표현된 1계 및 n 계 ($n=2, 3, 4, \dots$) 미분값을 수치적 방법으로 근사화하는 과정을 설명하면 다음과 같다.

수치미분하려는 함수 $y=f(x)$ 의 x_i 에서 1계, 2계, 3계, 4계 미분값을 $f_i^{(1)}$, $f_i^{(2)}$, $f_i^{(3)}$, $f_i^{(4)}$ 의 기호를 사용하여 표시하고, 이 기호를 이용하여 5개의 등간격 이산 함수값 f_{i+1} , f_{i+2} , f_{i+3} , f_{i+4} , f_{i+5} 를 다음과 같이 Taylor 급수로 나타낸다.

$$f_{i+1} = f_i + hf_i^{(1)} + \frac{h^2}{2} f_i^{(2)} + \frac{h^3}{6} f_i^{(3)} + \frac{h^4}{24} f_i^{(4)} + \dots \quad (3a)$$

$$f_{i+2} = f_i + 2hf_i^{(1)} + \frac{(2h)^2}{2} f_i^{(2)} + \frac{(2h)^3}{6} f_i^{(3)} + \frac{(2h)^4}{24} f_i^{(4)} + \dots \quad (3b)$$

$$f_{i+3} = f_i + 3hf_i^{(1)} + \frac{(3h)^2}{2} f_i^{(2)} + \frac{(3h)^3}{6} f_i^{(3)} + \frac{(3h)^4}{24} f_i^{(4)} + \dots \quad (3c)$$

$$f_{i+4} = f_i + 4hf_i^{(1)} + \frac{(4h)^2}{2} f_i^{(2)} + \frac{(4h)^3}{6} f_i^{(3)} + \frac{(4h)^4}{24} f_i^{(4)} + \dots \quad (3d)$$

$$f_{i+5} = f_i + 5hf_i^{(1)} + \frac{(5h)^2}{2} f_i^{(2)} + \frac{(5h)^3}{6} f_i^{(3)} + \frac{(5h)^4}{24} f_i^{(4)} + \dots \quad (3e)$$

여기서 h 는 단계길이(step size)로 $h = x_{i+1} - x_i = \dots = x_{i+5} - x_{i+4}$ 로 등간격이다.

위의 식 (3a)~(3e)에서 “...”로 표시된 5계 도함수 이상의 미분항을 무시하면 이 식들은 x_i 에서 미분값 $f_i^{(1)}$, $f_i^{(2)}$, $f_i^{(3)}$, $f_i^{(4)}$ 를 미지수로 하는 연립방정식이다. 이 연립방정식을 풀면 1~4계 미분값을 다음과 같이 근사적으로 구할 수 있다.

$$f_i^{(1)} \approx \frac{1}{60h} (-137f_i + 300f_{i+1} - 300f_{i+2} + 200f_{i+3} - 75f_{i+4} + 12f_{i+5}) \quad (4a)$$

$$f_i^{(2)} \approx \frac{1}{60h^2} (225f_i - 770f_{i+1} + 1070f_{i+2} - 780f_{i+3} + 305f_{i+4} - 50f_{i+5}) \quad (4b)$$

$$f_i^{(3)} \approx \frac{1}{4h^3} (-17f_i + 71f_{i+1} - 118f_{i+2} + 98f_{i+3} - 41f_{i+4} + 7f_{i+5}) \quad (4c)$$

$$f_i^{(4)} \approx \frac{1}{h^4} (3f_i - 14f_{i+1} + 26f_{i+2} + 24f_{i+3} + 11f_{i+4} - 2f_{i+5}) \quad (4d)$$

이상에서 유도한 전진 다항식을 이용하는 경우에 아치의 우측지점의 인접점에서는 함수의 범위를 벗어나므로 미분값을 계산할 수 없고 후진 다항식을 이용하여야 한다. 후진 다항식의 유도 방법은 전진법과 동일하므로 이 연구에서 후진법에 대한 기술은 생략한다.

3. 아치의 자유진동

3.1 지배미분방정식

구조해석에서 수치미분의 적용성을 검증하기 위하여 아치의 자유진동 문제를 채택하였다.

그림 2는 (x, y) 는 직교좌표계 위에 놓인 지간길이 L , 아치높이 H 인 타원 아치를 나타낸다. 이 그림에서 변수 β 는 타원의 수평축길이를 $l = (2\beta + 1)L$ 로 정의하여 주는 무차원량이다. ρ 및 ϕ 는 곡률반경 및 x 축과 곡률중심방향이 이루는 각도이고 w , v 및 ψ 는 곡률중심방향 변위, 접선방향 변위 및 단면회전각이다.

아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 무차원량으로 유도하기 위하여 $\xi = x/L$, $\eta = y/L$, $\delta = w/L$, $\lambda = v/L$, $\zeta = \rho/L$, $f = H/L$, $s = L/r$ 의 무차원 변수를 이용한다. 여기서 (ξ, η) 는 무차원 직교좌표계, δ , λ , ζ 및 f 는 w , v , ρ 및 H 를 지간길이 L 로 정규화한 변수이며, s 는 세장비이고 r 은 아치 단면의 회전반경이다. 이러한 무차원 변수를 이용한 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정

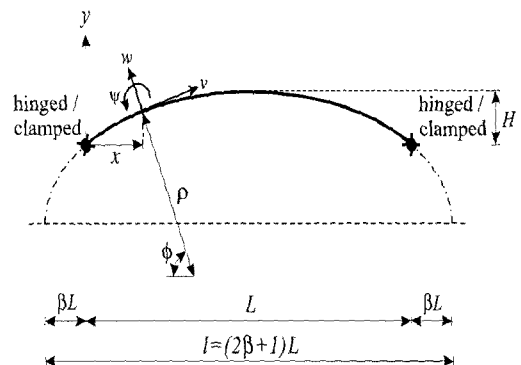


그림 2 타원 아치의 형상

식을 문헌(Lee and Wilson, 1990)으로부터 인용하면 다음 식들과 같다.

$$\delta'''' = a_1 \delta'''' + (a_2 + s^{-4} a_3 C_k^2) \delta'' + (a_1 - s^{-4} a_4 C_k^2) \delta' + (a_5 + s^{-4} a_6 C_k^2) \delta + (1 - s^{-4} C_k^2) a_3 \lambda' + s^{-4} a_4 C_k^2 \lambda \quad (5a)$$

$$\lambda'' = a_7 \delta'' + (s^{-4} C_k^2 - 1) \delta' + a_8 \delta + a_9 \lambda' + s^{-4} (a_3 - 1) C_k^2 \lambda \quad (5b)$$

위에서 (') = $d/d\phi$ 의 미분연산자이며, 미분방정식에 포함되어 있는 계수 $a_1 \sim a_9$ 는 다음과 같다.

$$a_1 = 5 \zeta' / \zeta \quad (6a)$$

$$a_2 = 2 \zeta'' / \zeta - 8 \zeta'^2 / \zeta^2 - 2 \quad (6b)$$

$$a_3 = -s^2 \zeta^2 \quad (6c)$$

$$a_4 = -2s^2 \zeta \zeta' \quad (6d)$$

$$a_5 = 2 \zeta'' / \zeta - 8 \zeta'^2 / \zeta^2 - s^2 \zeta^2 - 1 \quad (6e)$$

$$a_6 = s^4 \zeta^4 \quad (6f)$$

$$a_7 = \zeta' / (s^2 \zeta^3) \quad (6g)$$

$$a_8 = \zeta' / [\zeta + 1 / (s^2 \zeta)] \quad (6h)$$

$$a_9 = \zeta' / \zeta \quad (6i)$$

식 (5a), (5b)에 포함되어 있는 미분방정식의 고유치인 무차원 고유진동수 C_k 는 다음 식과 같다.

$$C_k = \omega_k s^2 L \sqrt{m/E A} \quad (7)$$

위에서 ω_k 는 고유각진동수, k 는 모드 번호, m 은 질량 밀도, E 는 탄성계수, A 는 단면적을 나타낸다.

아치의 회전지점 ($\xi=0$ 또는 $\xi=1$)에서는 $\lambda=0$, $\delta=0$, $\delta''=0$ 의 경계조건을 만족하고, 고정지점 ($\xi=0$ 또는 $\xi=1$)에서는 $\lambda=0$, $\delta=0$, $\delta'=0$ 의 경계조건을 만족한다(Lee 등, 1990).

3.2 아치의 곡률항

식 (6a)~(6i)로 나타낸 아치의 계수 $a_1 \sim a_9$ 를 산출하기 위해서는 (x, y)의 직교좌표계에서 아치의 선형식 $y = y(x)$ 가 정의되어야 한다. 타원 아치의 선형식 $y = y(x)$ 를 무차원 변수식을 이용하여 나타내면 다음과 같다(모정만, 1997).

$$\eta = c_1^{-1} c_2 [c_1^2 - (\xi - 0.5)^2]^{1/2} + f - c_2 \quad (8)$$

여기서 $c_1 = \beta + 0.5$, $c_2 = \frac{c_1 f}{c_1 - (\beta^2 + \beta)^{0.5}}$ 이다.

아치축의 임의점 ξ 에서 각도 ϕ 는 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left\{ \frac{-c_2(\xi - 0.5)}{c_1 [c_1^2 - (\xi - 0.5)^2]^{1/2}} \right\} \quad (9)$$

식 (6a)~(6i)의 계수 $a_1 \sim a_9$ 를 계산하는데 필요한 아치의 곡률반경 ζ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\zeta = [1 + (\frac{d\eta}{d\xi})^2]^{3/2} (\frac{d^2\eta}{d\xi^2})^{-1} \quad (10)$$

위식에서 보인바와 같이 곡률반경 ζ 는 $d\eta/d\xi$, $d^2\eta/d\xi^2$ 의 미분항으로 표현되기 때문에 식 (8)의 선형식이 주어지면 ζ 를 수치미분에 의하여 결정할 수 있다. 곡률반경 ζ 가 결정되면 계수 $a_1 \sim a_9$ 를 계산하는데 필요한 ζ 의 1계, 2계 미분값인 곡률항 ζ' , ζ'' 도 수치미분에 의하여 결정될 수 있다. 따라서 식 (8)의 선형식이 주어지면, 오로지 수치미분만으로 계수 $a_1 \sim a_9$ 를 계산할 수 있다. 여기서 ζ' 및 ζ'' 는 ξ 에 대한 미분이 아니고 식 (5a), (5b)와 같이 ϕ 에 대한 미분이다.

식 (8)~(10)을 이용하면 타원 아치의 자유진동해석에서 필요한 곡률항 ζ , ζ' , ζ'' 을 대수적으로 다음과 같이 구할 수 있다(모정만, 1997).

$$\zeta = c_1^{-4} c_2 [c_1^4 + (c_2^2 - c_1^2)(\xi - 0.5)^2]^{3/2} \quad (11a)$$

$$\zeta' = 3(c_2^2 - c_1^2) c_1^{-7} c_2^{-2} (\xi - 0.5) \times [c_1^4 + (c_2^2 - c_1^2)(\xi - 0.5)^2]^{3/2} \times [c_1^2 - (\xi - 0.5)^2]^{1/2} \quad (11b)$$

$$\zeta'' = 3(c_2^2 - c_1^2) c_1^{-10} c_2^{-3} \times [c_1^4 + (c_2^2 - c_1^2)(\xi - 0.5)^2]^{3/2} \times \{3c_1^2 c_2^2 (\xi - 0.5)^2 + [c_1^4 + (c_2^2 - c_1^2) \times (\xi - 0.5)^2][c_1^2 - 5(\xi - 0.5)^2]\} \quad (11c)$$

이상에서 보인 곡률항 ζ , ζ' , ζ'' 의 대수적인 산출은 그 과정이 매우 복잡하여 많은 시간과 노력을 필요로 하며 경우에 따라서는 잘못된 곡률항을 산출할 가능성도 있다.

이 논문은 이상과 같이 미분으로 이루어지는 계수 $a_1 \sim a_9$ 와 같은 구조변수(parameters of structure)를 2장에서 설명한 전진 5차다항식과 같은 수치미분을 적용하여 복잡한 미분항 유도에 필요한 시간과 노력을 피하고 또 그 결과의 정확성을 검증하는 것이 이 연구의 요점이다.

3.3 수치미분과정

아치의 곡률항 ζ , ζ' , ζ'' 및 계수 $a_1 \sim a_9$ 의 산정과정을 설명하면 다음과 같다.

- 1) 아치의 변수 f , s , β 를 입력한다.
- 2) 곡률항 ζ , ζ' , ζ'' 및 계수 $a_1 \sim a_9$ 를 산정할 ϕ_i 를 정의한다.
- 3) ϕ_i 에 대응되는 ξ_i 를 식 (9)로부터 산정한다.
- 4) $\xi_{i+1} = \xi_i + h$, ..., $\xi_{i+5} = \xi_i + 4h$ 를 산정한다. 여기서 h 는 단계길이이다.
- 5) 식 (8)을 이용하여 $f_i = \eta(\xi_i)$, ..., $f_{i+5} = \eta(\xi_{i+5})$ 를 산정한다.
- 6) 식 (4a), (4b)의 전진 5차 다항식을 이용하여 η 의 1계, 2계 미분값 $d\eta/d\xi = f_i^{(1)}$, $d^2\eta/d\xi^2 = f_i^{(2)}$ 를 산정한다.
- 7) 식 (10)으로부터 ϕ_i 에서 곡률반경 ζ_i 를 수치미분으로 산정한다.
- 8) $\phi_{i+1} = \phi_i + h$, ..., $\phi_{i+5} = \phi_i + 4h$ 를 산정한다.
- 9) 3)~7)의 과정을 반복시행하여 ζ_{i+1} , ..., ζ_{i+5} 를 산정한다.
- 10) 식 (4a), (4b)를 이용하여 ϕ_i 에서 ζ 의 1계, 2계 미분값 $\zeta' = f_i^{(1)}$, $\zeta'' = f_i^{(2)}$ 를 산정한다.
- 11) ϕ_i 에서 계수 $a_1 \sim a_9$ 를 식 (6a)~(6i)를 이용하여 산정한다.

4. 수치해석 예 및 고찰

4.1 곡률항의 수렴해석

식 (4a)~(4d)에서 수치미분값을 나타낸바와 같이 수치미분의 정도는 단계길이 h 의 영향을 받는다. 곡률항 ζ , ζ' , ζ'' 의 정도는 계속해서 계수 $a_1 \sim a_9$ 의 영향을 주고 이 연구에서 최종적으로 얻고자하는 무차원 고유진동수 C_k 의 정

표 1 곡률항의 수렴해석

| h | 곡률항 | | |
|-------|----------|------------|-----------|
| | ζ | ζ' | ζ'' |
| 1/10 | 0.480493 | -0.0560015 | 0.223148 |
| 1/20 | 0.470609 | -0.0601945 | 0.584906 |
| 1/50 | 0.470326 | -0.0656974 | 0.936419 |
| 1/80 | 0.470321 | -0.0657028 | 0.937141 |
| 1/100 | 0.470321 | -0.0657028 | 0.937141 |

* $f=0.3$, $\beta=0.3$, $\phi_i=1.5$

도에도 영향을 미친다.

적절한 정도의 미분값을 확보하기 위해서는 먼저 곡률항에 대한 수렴해석이 필요하다. 표 1은 단계길이를 $h=1/10$, $1/20$, $1/50$, $1/80$, $1/100$ 로 결정하여 곡률항을 산정한 수렴해석의 결과이다. 여기서 사용한 타원 아치의 제변수는 $f=0.3$, $\beta=0.3$, $\phi_i=1.5$ 이다. 수치해는 Lahey Fortran 95에 의하여 수행되었다. 산정된 곡률항은 배정도로 계산되었고 유효숫자 7자리 이하를 절사하여 유효숫자 6자리까지 나타내었다. 이 표에서와 같이 $h=1/20$ 이상에서는 곡률항 산정의 정확성을 확보할 수 없고 $h=1/80$ 에서 유효숫자 6자리의 정도로 수렴하는 것을 알 수 있다. 이와 같이 수치미분을 이용하는 경우에 사전에 수렴해석을 실시하여 적절한 단계길이 h 를 산정하는 과정이 반드시 필요하다. 이 연구에서 이후의 모든 수치미분은 단계길이 $h=1/80$ 을 이용하였다.

4.2 곡률항의 대수해와의 비교

미분방정식의 계수 $a_1 \sim a_9$ 를 구성하고 있는 곡률항 ζ , ζ' , ζ'' 을 전진 5차 다항식을 이용하여 계산하고 이를 식 (11a)~(11c)의 대수적 방법으로 산정한 정확해와 표 2에서 비교하였다. 여기서 사용한 타원 아치의 제변수는 $f=0.3$, $\beta=0.3$, $\phi_i=1.5$, $h=1/80$ 이다. 이 표에서와 같이 곡률항의 두 결과는 매우 우수하게 근접하여 수치미분을 이용하여 산정한 곡률항이 대수적 방법으로 산정한 정확한 값과 비교하여 매우 정도가 높게 산정되었음을 알 수 있다.

표 2 곡률항의 대수해와의 비교

| 곡률항 | 수치미분(A) | 대수적 방법(B) | A/B |
|-----------|------------|------------|----------|
| ζ | 0.470321 | 0.470320 | 1.000001 |
| ζ' | -0.0657028 | -0.0657026 | 1.000003 |
| ζ'' | 0.937141 | 0.937137 | 1.000004 |

* $f=0.3$, $\beta=0.3$, $\phi_i=1.5$, $h=1/80$

4.3 계수의 대수해와의 비교

지배미분방정식인 식 (5a), (5b)에는 곡률항 ζ , ζ' , ζ'' 으로 구성되는 계수 $a_1 \sim a_9$ 를 포함하고 있다. 수치미분으로 계산된 곡률항을 이용하여 산정한 이 계수들이 정확하게 산정되어야 무차원 고유진동수 C_k 를 정확하게 산정할 수 있다. 이를 검증하기 위하여 수치미분으로 계수를 산정하고 이를 대수적으로 산정한 결과와 표 3에서 비교하였다. 여기서 사용한 타원 아치의 제변수는 $f=0.3$, $\beta=0.3$, $\phi_i=1.5$, $h=1/80$ 이다. 수치미분으로 산정한 계수는 대수적으로 산정한 값과 유효숫자 4~6자리의 정도를 나타내고 있어 수치미분으로 계산한 계수가 매우 정확하게 산정되었음을 알 수 있다.

표 3 계수의 대수해와의 비교

| 계 수 | 수치미분 | 대수적 방법 |
|-------|---------------|---------------|
| a_1 | -0.698488 | -0.698487 |
| a_2 | 1.82901 | 1.82897 |
| a_3 | -8848.09 | -8848.05 |
| a_4 | -2472.11 | -2472.10 |
| a_5 | -8845.26 | -8845.22 |
| a_6 | 78288700. | 78288100. |
| a_7 | -0.0000157936 | -0.0000157939 |
| a_8 | -0.139713 | -0.139713 |
| a_9 | -0.139697 | -0.139697 |

* $f=0.3$, $\beta=0.3$, $s=200$, $\phi_i=1.5$, $h=1/80$

4.4 고유진동수의 대수해와의 비교

본 절에서는 수치미분에 의해 산정된 계수를 이용하여 타원 아치의 무차원 고유진동수 C_k 를 산정하고 대수적 방법으로 계산된 계수를 이용하여 산정된 C_k 를 서로 비교한다. 이를 위하여 $\beta=0.3$, $s=200$ 인 아치에 대하여 무차원 높이 f 를 변화시키며 회전-회전, 고정-고정의 지점조건에 따른 C_k ($k=1, 2$)를 산정하고 이를 표 4에 나타내었다. 여기서 C_k 의 산정은 아치의 경계조건을 초기조건으로 하여 식 (5a), (5b)의 미분방정식을 수치적분하여 산정하는 Lee와 Wilson (1990)의 방법을 택하였다. 이 표에서와 같이 수치미분에 의해 산출된 C_k 는 대수적 방법에 의한 C_k 에 매우 우수하게 근접한 값을 나타내고 있다.

표 4 C_1, C_2 값의 대수해와의 비교

| 지점 조건 | f | C_1 | | C_2 | |
|---------|-----|--------|--------|--------|--------|
| | | 수치 미분법 | 대수적 방법 | 수치 미분법 | 대수적 방법 |
| 회전 회전 | 0.1 | 35.16 | 35.15 | 73.73 | 73.75 |
| | 0.2 | 28.51 | 28.52 | 66.60 | 66.58 |
| | 0.3 | 21.98 | 22.00 | 55.42 | 55.30 |
| | 0.4 | 16.81 | 16.83 | 44.70 | 44.60 |
| | 0.5 | 13.00 | 13.01 | 35.85 | 35.78 |
| 고정 고정 | 0.1 | 57.92 | 57.90 | 91.77 | 91.75 |
| | 0.2 | 45.99 | 46.00 | 87.73 | 87.69 |
| | 0.3 | 34.79 | 34.82 | 73.58 | 73.43 |
| | 0.4 | 26.30 | 26.33 | 59.68 | 59.53 |
| | 0.5 | 20.22 | 20.23 | 48.02 | 47.93 |

* $\beta=0.3$, $s=200$, $h=1/80$

4.5 고유진동수의 문헌해와의 비교

이 연구에서 산정한 무차원 고유진동수 C_k 를 문헌해(Lee 등, 1990)와 비교하기 위하여 포물선 아치에 대하여 앞에서 보인 일련의 과정을 적용하여 C_k ($k=1, 2, 3, 4$)를 계산하고 이를 표 5에서 비교하였다. 포물선 아치의 제원은 $f=0.25$, $s=200$ 이고 포물선 아치에서는 축극이가 적용되지 않으므로 β 값의 입력은 불필요하다. 이 표에서와 같이 두 결과는 매우 우수하게 근접하고 있다. 미세한 오차가 발생한 이유는 표 2, 3에서 이미 보인 바와 같이 수치미분을 이용한 계수 값과 대수해로 계산한 계수 값 사이에 발생한 미세한 오차 때문으로 생각한다. 이상에서 보여준 수치해석 예로부터 수치미분이 아치구조의 자유진동 해석에서 매우 정확한 수치해의 결과를 얻을 수 있는 방법임을 검증할 수 있다.

표 5 C_k 값의 문헌해와의 비교

| 지점 조건 | 자료 출처 | 무차원 고유진동수, C_k | | | |
|---------|-------|------------------|-------|--------|--------|
| | | $k=1$ | $k=2$ | $k=3$ | $k=4$ |
| 회전 회전 | 본 연구 | 26.70 | 64.73 | 117.66 | 183.41 |
| | 문헌 | 26.70 | 64.74 | 117.66 | 183.43 |
| | 오차(%) | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.01 |
| 고정 고정 | 본 연구 | 40.90 | 85.21 | 146.98 | 216.39 |
| | 문헌 | 40.90 | 85.22 | 146.97 | 216.41 |
| | 오차(%) | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.01 |

* 포물선 아치, $f=0.25$, $s=200$, β 값 입력 불필요, $h=1/80$; 문헌(Lee and Wilson, 1990)

** 오차(%) = $|1 - (\text{문헌} / \text{본 연구})| \times 100$

5. 결 론

구조물의 선형식과 그 미분으로 구성되는 구조변수는 구조 해석에서 매우 중요한 역할을 한다. 구조물의 선형식이 곡선인 경우에는 미분식을 산정하는 자체가 매우 어렵고 많은 시간과 노력을 필요로 하며, 경우에 따라서는 잘못된 결과를 산출할 수도 있다.

이 논문은 구조해석에서 수치미분의 응용에 관한 연구로서 아치의 자유진동 문제를 택하여 수치미분의 적용성을 검증하였다. 자유진동을 지배하는 미분방정식은 기존의 문헌결과를 인용하였고 아치의 곡률항을 산출하기 위하여 전진 5차다항식을 이용하였다.

실제 수치해석 예에서는 타원 및 포물선 아치를 선택하였다. 수치미분으로 산출한 아치 선형식의 곡률항으로 구성되는 계수를 대수적 방법으로 계산한 결과와 비교하여 수치미분의 정확성을 입증하였다. 수치미분으로 산출된 계수를 이용하여 산정한 무차원 고유진동수의 결과에서도 본 연구와 문헌해가 매우 우수하게 근접하였다.

이 논문의 결과를 응용하면 아치의 자유진동 문제 이외에도 고계의 미분을 요구하는 공학적 문제에서 수치미분을 적절하게 이용할 수 있으며 매우 정확한 구조해석의 결과를 얻을 수 있을 것으로 사료된다.

감사의 글

이 연구는 2005년도 산학협동재단 연구비의 지원을 받았습니다. 연구비를 지원해주신 산학협동재단에 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

- 모정만 (1998) 변화곡률을 갖는 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구, 원광대학교 대학원 박사학위 논문.
- 오상진, 서종원, 이병구 (2002) 두 개의 매개변수로 표현되는 탄성지반 위에 놓인 낮은 아치의 최저차 대칭 및 역대칭 고유진동수, 한국전산구조공학회 논문집, 15(2), pp.367~377.
- Chapra, S.C., Canale, R.P. (1998) Numerical methods for engineers, *McGraw-Hill Companies, Inc.*, USA.
- Lee, B.K., Oh, S.J., Li, G., Choi, K.M. (2003) Free vibration analysis of parabolic arches in Cartesian Coordinates, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2(3), pp.377~390.
- Lee, B.K., Wilson, J.F. (1990) Free vibrations of arches with variable curvature, *Journal of Sound and Vibration*, 136, pp.75~89.
- Leontovich, V. (1969) Frames and arches, McGraw-Hill Inc., USA.
- Oh, S.J., Lee, B.K., Lee, I.W. (1999) Natural frequencies of non-circular arches with rotatory inertia and shear deformation, *Journal of Sound and Vibration*, 219(1), pp.23~33.
- Wilson, J.F. Lee, B.K. (1995) In-plane free vibrations of catenary arches with unsymmetric axes, *Structural Engineering and Mechanics*, 3(5), pp.511~525.
- Wilson, J.F. Lee, B.K., Oh, S.J. (1994) Free vibrations of circular arches with variable-cross section, *Structural Engineering and Mechanics*, 2(4), pp.345~357.