

# 2차원 균열판의 $p$ -적응적 유한요소해석을 위한 정규크리깅 보간법의 적용

## Application of Ordinary Kriging Interpolation Method for $p$ -Adaptive Finite Element Analysis of 2-D Cracked Plates

우 광 성<sup>†</sup>      조 준 형\*      박 미 영\*\*

Woo, Kwang-Sung      Jo, Jun-Hyung      Park, Mi-Young

(논문접수일 : 2006년 6월 1일 ; 심사종료일 : 2006년 10월 26일)

### 요 지

이 연구의 목적은 두 가지로 대별할 수 있다. 첫째는, 베리오그램 모델링에 기초를 둔 정규크리깅 보간법의  $p$ -적응적 유한요소법으로의 적용성이다. 둘째는, 수정된 초수렴 패치복구 기법을 사용한 사후오차평가와 연계된 계층적  $p$ -체는 세분화의 적응적 유한요소 과정을 제시하는 것이다. 가중치를 부여한 보간기법중의 하나인 정규크리깅 방법은 가우스 적분점에서 의 응력데이터로부터 소위 준정해를 얻는데 적용된다. 가중치를 동일하게 가정하는 종래의 보간기법과는 달리 실험적 및 이론적 베리오그램을 작성한 후 보간을 위한 가중치를 결정하게 된다. 한편, 적응적  $p$ -체는 세분화는 해석영역의 각 체에서  $p$ -차수를 만족할만한 정확도를 얻을 수 있도록 프로그램내에서 자동으로 사후오차평가를 통해 불균등 또는 선택적으로 증가시킨다. 수정된 초수렴 패치복구기법을 검증하기 위해 극한치를 사용한 새로운 오차평가기가 제안된다. 제안된 알고리즘의 정당성은 선형탄성파괴역학의 대표적 문제들인 중앙균열판, 일반균열 및 양변균열 해석을 통해 테스트되었다.

핵심용어 : 정규크리깅 보간법, 수정 S.P.R.법, 극한치 접근법, 적응적  $p$ -체는 세분화, 베리오그램

### Abstract

This paper comprises two specific objectives. The first is to examine the applicability of ordinary kriging interpolation(OK) to the  $p$ -adaptivity of the finite element method that is based on variogram modeling. The second objective is to present the adaptive procedure by the hierarchical  $p$ -refinement in conjunction with *a posteriori* error estimator using the modified S.P.R. (superconvergent patch recovery) method. The ordinary kriging method that is one of weighted interpolation techniques is applied to obtain the estimated exact solution from the stress data at the Gauss points. The weight factor is determined by experimental and theoretical variograms for interpolation of stress data apart from the conventional interpolation methods that use an equal weight factor. In the  $p$ -refinement, the analytical domain has to be refined automatically to obtain an acceptable level of accuracy by increasing the  $p$ -level non-uniformly or selectively. To verify the performance of the modified S.P.R. method, the new error estimator based on *limit value* has been proposed. The validity of the proposed approach has been tested with the help of some benchmark problems of linear elastic fracture mechanics such as a centrally cracked panel, a single edged crack, and a double edged crack.

*Keywords* : ordinary kriging interpolation, modified S.P.R. method, limit value approach, adaptive  $p$ -refinement, variogram

### 1. 서 론

지구통계학(geostatistics)에서 통용되는 크리깅 보간법

(kriging interpolation)은 남아프리카공화국의 광산기술자인 D.G. Krige(1951)에 의해 처음 제안되었다. 즉, 광물매장량의 관측 데이터를 갖고 미지점의 광물매장량을 예측하는

<sup>†</sup> 책임저자, 정회원 · 영남대학교 건설환경공학부 교수

Tel: 053-810-2593 ; Fax: 053-816-2517

E-mail: kswoo@yu.ac.kr

\* 한국전력공사 서울전력구 건설처 토목1부

\*\* 제일엔지니어링 구조부 사원

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시던 2007년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

과정에서 광물매장 가능성이 높은 데이터와 비교적 덜 중요한 데이터간에 가중치를 부여하여 광물매장량이 가장 많은 위치를 통계학적으로 산정하는 방식이다. 따라서, 가중치 결정을 위해 Goldberger(1962)는 공간좌표계상의 데이터보간 시 정규크리깅(ordinary kriging) 개념을 제안하여 자료값 사이의 공분산(covariance)에 기초를 둔 베리오그램(variogram) 작성을 통해 보간법을 설명한 바 있다. Matheron(1973)도 크리깅 보간을 위한 이론적 베리오그램에 대한 연구를 수행하여 현재의 학문적 근간을 마련하였다. 그 후에도 베리오그램의 종류, 정규크리깅을 포함한 다양한 크리깅 보간법의 연구, 분리 거리에 따른 이론적 베리오그램의 작성, 가중치를 고려한 최소제곱법 등 이에 관한 많은 연구가 수행되어 왔으며 적용분야도 석유탐사, 저수지의 수심, 토양 및 수질오염 문제등을 포함하고 있다. 구조해석분야에는 그 적용이 늦어 Dai 등(2003)이 무요소법(meshfree method)에 처음 적용하였다. 그러므로, 이 방법의 구조역학 분야로의 적용에 대한 연구가 앞으로 기대된다. 이 연구에서는 두 가지 연구동기를 갖고 수행되었다. 첫째는, 과연 지구통계학에서 사용되는 크리깅 보간법이 유한요소법 분야로의 적용성이 가능할 것인가? 둘째는, 적응적  $p$ -체 눈 세분화( $p$ -mesh refinement)에 필요한 사후오차평가시 필요한 준정해(estimated exact solution)를 결정하기 위해 크리깅보간법을 사용할 수 있으며, 특히 응력특이문제에 적합할 것인가?

첫 번째 연구동기의 배경은 통상 유한요소 프로그램에서는 가우스적분점에서 계산된 응력값은 요소 경계면에서 불연속되므로 응력평활화(stress smoothing)를 통해 응력등고선(stress contour)를 연속적으로 분포되게 그려준다. 이때 가우스적분점에서의 응력값을 보간하여 응력함수를 결정하게 되는데 전술한 바와 같이 최소제곱법이 주로 사용되고 있다. 이때 가우스 적분점에서의 응력값에 가중치(weight factor)를 베리오그램 모델링을 통해 결정하는 방식인 크리깅 보간법을 사용하게 되면 보다 신뢰성있는 응력평활화가 될 수 있을 것이라는 예측에서 출발되었다.

두 번째의 연구동기의 배경은 다음과 같다. 즉, 적응적 유한요소법은 크게 Zienkiewicz와 Zhu(1992)가 제안한 초수렴 패치복구기법(superconvergent patch recovery technique)을 포함한 응력복구기법(recovery technique)과 Babuska, Szabo(1991)와 Oden 등(1995)에 의한 잔차기법(residual method)으로 대별될 수 있다. 본 연구에서 관심을 갖는 복구기법은 유한요소해석을 수행한 후 가우스적분점에서의 응력값을 최적화(fitting)시킨 응력함수를 소위 준정해로 하여 유한요소해석값과의 차이를 정규화시킨 응력놈(stress norm) 또는 에너지놈(energy norm)을 요소전체와 개별요

소내에서의 에너지놈을 비교한 후 요소를 더 분할하는 방식이다. 따라서, 준정해는 초기체눈(initial mesh)에서 최종 적응적 체눈(final adaptive mesh)을 결정할때 까지 여러 반복단계를 거치게 되는데, 각 단계마다 새로이 결정된다. 준정해를 기존의 Zienkiewicz와 Zhu는 보통 4개의 요소로 구성되는 패치를 만들어 패치조립점(patch assembly point)을 따라 이동함에 따라 최소제곱법을 사용하여 준정해를 정의하였다. 반면에 본 연구에서는 앞에서의 설명과 같이 크리깅 보간법을 통해 준정해를 구하려 하는 것이다. 두 방식의 차이를 실제 구조해석을 통해 비교해 보는 것이 연구의 목표가 된다.

한편, 크리깅 보간법은 응력특이(stress singularity) 문제, 즉 응력특이점 부근의 응력경사(stress gradient)가 가파르게 변화되는 문제에 더 적합할 수 있다. 왜냐하면 균열 문제와 같이 균열선단부에서의 응력값들과 균열선단에서 비교적 멀리 떨어진 점에서의 응력값들을 동일한 가중치로 보간하는 것 보다는 베리오그램 모델링을 통해 얻는 가중치를 부여하여 보간하는 방식이 응력분포를 나타내는데 더 적합할 것으로 판단되기 때문이다. 따라서, 본 연구는 인장력을 받는 2차원 균열판의 응력해석을 수행하였으며, 유한요소법은  $p$ -체 눈 세분화 방식을 채택하였다. 또한, 크리깅방법은 모집단과 표본집단사이의 평균 및 공분산값이 같다는 가정 즉, 불편향 조건(unbiased condition)에 기초를 둔 정규크리깅(ordinary kriging) 방법이 채택되었다. 절점연결, 요소정의, 좌표 및 경계조건, 하중,  $p$ -적응적 체눈의 구성과 사후오차평가, 베리오그램 모델링을 통한 가중치의 결정 등은 컴퓨터 그래픽기능이 장착된 연구목적용 프로그램에서 자동으로 이루어지게 하였다.

## 2. 베리오그램 모델링(Variogram Modeling)

크리깅 보간법의 중요한 통계분석기법은 베리오그램이라 할 수 있다. 그러므로 자료값의 공간적 연속성(spatial continuity)은 베리오그램 분석으로 검증된다. 자료값간의 베리오그램은 거리에 관한 함수로 표현되어지므로 결국 가중치를 부여함에 있어 가장 중요한 인자는 자료점간의 분리거리(separation distance)라 할 수 있다. 분리거리가  $h$ 인 두 점간의 베리오그램  $2\gamma(h)$ 는 거리에 따른 자료값의 공분산(covariance)으로 식 (1)과 같이 표현되며, 이러한 자료점의 쌍이  $n$ 개 존재할 경우 반베리오그램(semi-variogram)  $\gamma(h)$ 는 식 (2)와 같이 표현된다(Jian, 1996; Lloyd, 2001; Chen, 2001; Stein, 1999; 최종근, 2002).

$$2\gamma(h) = \text{Var}[z(x+h) - z(x)] \quad (1)$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [z(x_i) - z(x_i+h)]^2 \quad (2)$$

즉, 식 (1)에서 베리오그램  $\gamma(h)$ 는 두 자료값간의 차이에 대한 기대값으로 나타난다. 대상 영역에서의 자료의 분포가 연속적이라면 두 자료점의 거리가 가까울수록 베리오그램은 작게 나타나고, 거리가 멀어짐에 따라 베리오그램이 커지거나 혹은 두 자료값이 상관관계를 상실하여 무의미한 값을 가지게 될 것이다. 따라서 주어진 표본공간에서 채집된 자료값들간의 거리와 베리오그램을 계산하여 도식화하면, 그림 1과 같이 굵은 점으로 위치를 표시하는 일반적인 분리거리-베리오그램 모델을 구할 수 있으며, 이를 실험적 베리오그램(experimental variogram)이라 한다. 그림 1에서 분리거리가 점점 커지게 되면 더 이상 자료간의 상관관계가 없거나 일정한 경향을 상실되는 점이 발생될 수 있다. 이 분리거리를 상관거리(range)  $a$ 라 한다. 또, 이에 대응되는 베리오그램값을 일컬어 문턱값(sill)  $C_0$ 라 정의한다.

한편, 이론적 베리오그램(theoretical variogram)이란 실험적 베리오그램이 나타내는 거리와 베리오그램의 관계를 최적화(fitting)하는 수학적 모델을 의미한다. 실험적 베리오그램이 자료간의 공간적 상관관계를 표현하고 있지만 일정 거리 이상에서는 베리오그램이 공간적 상관관계를 충실히 표현하지 못한다. 따라서 자료간의 거리에 따른 베리오그램의 모델에서 베리오그램이 더 이상 공간적 상관관계를 표현하지 못하는 일정 거리를 결정하는 일이 선행되어야 한다. 실험적 베리오그램을 실제 그려보면 문턱값이 명료하게 판단될 수 있는 경우와 Jian 등(1996)과 Chen 등(2001)의 논문을 보면 분리거리가 증가함에 따라 계속 증가되는 형태도 나타난다. 이 경우에는 문턱값을 결정할 수 없게 되는데, 이와 관련된 이론적 베리오그램 모델은 Power Model, Log Model 등이 있으며 대부분 이론적 베리오그램 모델은 문턱값이 있는 경우에 해당된다. 표 1에서 보는 바와 같이 이론적 베리오그램을 결정하려면 문턱값이나 상관거리 등의 판단을 연구자가 해야 한다. 그러나, 이 연구에서는 적응적 유한요소해석을 수행하여야 하므로 초기체눈에서 최종체눈까지 진행되는 단계가 모두 프로그램내에서 자동화가 이루어져야 한다. 따라서, 실험적 베리오그램 분석 후 이를 최적화할 수 있는 수학적모델로 다항식 모델(polynomial model)을 제안하였다. 다시 말하면 최소제곱법을 프로그램내에 넣어 그림 1과 같이 굵은 점으로 도시되어 있는 실험적 베리오그램을 자동적으로 최적화할 수 있도록 하여 연구자의 주관의 개입을 배제하였으며 다항식의 차수는 최대 4차로 고정시켰다. 또한, 표 1의  $h(0)$ 는 Heaviside함수로 분리거리가 0이면 1이고, 그 외에

는 0이 되는 특성을 갖으며  $a$ 와  $\beta$ 는 양의 상수이다. 표 1 외에도 많은 이론적 베리오그램 모델이 제시되어 있으나 생략하였다.

표 1 이론적 베리오그램의 수학적 모델

Model	Variogram
Linear	$\gamma(h) = \begin{cases} C_0 \frac{h}{a}, & \text{for } h \leq a \\ C_0, & \text{for } h > a \end{cases}$
Spherical	$\gamma(h) = \begin{cases} C_0 \left[ 1.5 \left( \frac{h}{a} \right) - 0.5 \left( \frac{h}{a} \right)^3 \right], & \text{for } h \leq a \\ C_0, & \text{for } h > a \end{cases}$
Exponential	$\gamma(h) = C_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{3h}{a}\right) \right]$
Power	$\gamma(h) = C_0 (1 - H(0)) + ah^\beta, \quad 0 < \beta < 2; \quad h \geq 0$
Polynomial	$\gamma(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \dots + a_n h^n$

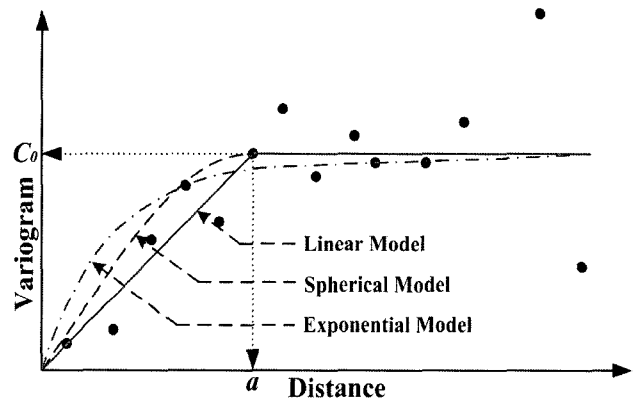


그림 1 실험적 및 이론적 베리오그램 모델

### 3. 정규 크리깅 보간법(Ordinary Kriging Interpolation)

주어진 표본공간에서 자료값을 채집하여 실험적 베리오그램을 작성하고 적절한 이론적 베리오그램이 설정되었다면 크리깅 보간 추정식을 정식화할 수 있다. 정규 크리깅 보간법을 통해 임의의 점에서의 예측값(unsampled data)  $z_0^*$ 를 얻기 위해 임의의 점 근처의 자료값(neighbor data)  $z_i$ 에 대한 가중치를 결정하기 위해서는 두 가지 제약조건을 만족해야만 한다. 즉, 정규 크리깅 보간법의 오차분산이 최소가 되는 조건과 크리깅 예측값의 불편향(unbiased) 조건이다. 불편향이란 모집단의 인자평균과 추정값의 인자평균간의 차이로 정의되며 이러한 차이가 없는 경우를 가리켜 불편향 되었다고 한다. 정규 크리깅 보간법을 통한 예측값은 식 (3)과 같이 가중치  $\lambda_i$ 를 곱한 자료값의 조합으로 정의된다(Stein, 1999; 최종근, 2002).

$$z_0^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \quad (3)$$

불편향 조건이 되기 위해서는 모든 가중치의 합이 1이 되는 조건을 만족해야 한다. 따라서 정규 크리깅 보간법을 위한 제약조건은 식 (4)와 같다.

$$1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad (4)$$

또한, 정규 크리깅 보간법에 의한 예측값의 분산은 지구통계학에서는 최소분산 불편향예측자(MVUE: minimum variance unbiased estimator) 또는 최적선형 불편향예측자(BLUE: best linear unbiased estimator)라 설명되어 있는데, 이를 위해 불편향조건은 물론이고 위에서 설명된 오차분산이 최소가 되는 조건도 수반되어야 한다는 것이다. 일반적으로 정규 크리깅 보간법에 의한 분산은 식 (5)와 같이 정의된다. 즉,

$$\text{Minimize: } \sigma^2 - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{0i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \sigma_{ij}^2, \quad (5)$$

$$\sigma_{ij}^2 = \text{Cov}(z_i, z_j)$$

$$\text{Subject to: } 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$$

식 (5)를 라그랑지 승수법(Lagrange multiplier method)을 사용하여 다시 표현해 보면 식 (6)과 같이 정리할 수 있다(Stein, 1999; 최중근, 2002).

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; \omega) = \sigma^2 - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{0i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \sigma_{ij}^2 + 2\mu \left( 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \quad (6)$$

여기서,  $L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; \mu)$ 는 라그랑지 목적함수(Lagrange objective function)이고  $\mu$ 는 라그랑지 승수라 한다. 라그랑지 목적함수를 최소화하기 위해서는  $\lambda_i$ 와  $\mu$ 에 대해 편미분한 값이 0이면 된다.

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -2 \sigma_{0i}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{ii}^2 - 2\mu = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 2 \left( 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) = 0 \quad (8)$$

식 (7)과 식 (8)을 다시 재정리하여 표현하면 식 (9)와 식(10)이 되며, 이것을 매트릭스를 사용하여 표현해보면 식 (11)이 된다. 그러므로, 식 (11)의 매트릭스 방정식을 풀면 식 (3)에서 요구되는 가중치  $\lambda_i$ 를 결정하게 된다. 여기서,  $\sigma_{0i}^2$ 는 구하고자 임의의 점  $x_0$ 에서의 예측값  $z(x_0)$ 와 이미

알고 있는 표본점(본 연구에서는 가우스 적분점)  $x_l$ 에서의 자료값(본 연구에서는 응력값)  $z(x_l)$ 간의 분산을 나타낸다(Yamamoto, 2000; 우광성, 2006).

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{il}^2 - \mu = \sigma_{0i}^2, \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \dots & \sigma_{1n}^2 & 1 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2n}^2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1}^2 & \sigma_{n2}^2 & \dots & \sigma_{nn}^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{01}^2 \\ \sigma_{02}^2 \\ \dots \\ \sigma_{0n}^2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

#### 4. 수정 S.P.R.법과 $p$ -체는 세분화

사후오차평가(a posteriori error estimation)중 대표적으로 사용되고 있는 방식은 복구기법(recovery technique) 중의 하나인 초수렴 패치복구(S.P.R.: superconvergent patch recovery)기법이라 할 수 있다. Zienkiewicz와 Zhu(1992)에 의해 제안되었기 때문에 Z/Z 방법이라고도 하며,  $h$ -version 유한요소법을 대상으로 주로 적용되었다. 다시 말하면, 초기체눈에서 최종 적응적 체눈을 형성하기까지 매 단계마다 사후오차평가를 통해 자동체눈생성(automatic mesh generation)을 하게 된다. 이 때 사후오차평가는 가우스 적분점에서 유한요소해석 결과에 의한 응력값과 이를 평활화한 응력값(이를 준정해라 함)과의 오차를 에너지놈(energy norm) 또는 응력놈(stress norm)으로 정규화시킨 물리량으로 평가하여 요소분할을 더 할 것인가, 아닌 가를 결정하는 방식이다. 문제에 따라 다르겠지만 적응적  $h$ -체는 세분화의 경우 최종체 눈까지 도달하게 되면 상당히 많은 개수의 요소수를 필요로 한다. 그러므로, 보통 4개의 요소로 구성되는 패치를 정의하여 에너지놈을 계산하며, 패치 조립점(patch assembly point)를 따라 전체 요소망을 포함할 수 있도록 이동하면서 패치의 에너지놈과 각 요소에서 계산된 에너지놈과의 차이로 체눈세분화를 더 진행할 것인가를 판단한다.

그러나, 본 연구의 경우 기존의 초수렴패치 복구기법은 다소 수정이 되어야 한다. 왜냐하면 첫째로, 응력평활화된 값을 준정해(estimated exact solution)로 보는 방식은 동일하나, Z/Z의 연구는 최소제곱법을 통해 산정한 반면, 이 연구에서는 준정해를 지구통계학에 기초를 둔 베리오그램 모델링과 크리깅 보간 추정식을 통해 보다 합리적으로 결정하는 것이 근본적으로 다르다. 둘째는, 적응적  $h$ -체는 세분화의 경우 요소망의 형상함수 차수, 즉  $p$ -level은 통상 1 아니면 2로 고정시키고 요소수를 증가시켜가는 반면, 이 연구에서는

요소수는 고정시키고  $p$ -level을 고차로 증가시킴은 물론 요소망의 형상함수의 차수도 불균등하게 분배되므로 사용되는 가우스 적분점의 개수도 차이가 날 수 있다. 아울러, 사용되는 형상함수도 계층적 형상함수인 적분형 르장드르 함수를 사용하는 점이 차이점으로 지적할 수 있다. 이 연구에서는 주로 크리깅 보간법에 관한 연구이므로 응력평활화와 이에 따른 에너지놈 산정 및 체논 세분화에 대한 내용을 중심으로 살펴보도록 한다.

임의의 변위장에서 발생하는 에너지놈은 응력오차에 기초를 둔 Z/Z방법에 의하면 다음과 같이 정의될 수 있다 (Zienkiewicz, 1992). 즉,

$$\|e_r\| = \left( \int_{\Omega} (Z^* - Z^p)^T [D]^{-1} (Z^* - Z^p) d\Omega \right)^{1/2} \quad (12)$$

여기서,

$Z^*$ : smoothed stress field by projection

$Z^p$ : computed stress at Gauss points by non-uniform  $p$ -refinement

$[D]$ : constitutive matrix

$\Omega$ : mesh domain

그러므로, 응력값으로 계산되는 오차는 정해  $Z$ , 또는 응력평활화를 통한 준정해  $Z^*$ 와  $p$ -version 유한요소법으로 직접 계산된 응력값  $Z^p$ 와의 차이로 나타내며 식 (13)과 같다. 여기서,  $Z^*$ 는 연속된 응력장(continuous stress field) 함수를 나타내고,  $Z^p$ 는 요소와 요소간에서 불연속이며 요소 내에서도 가우스 적분점에서 계산된 개별적(discrete)인 값이 된다.

$$e_o = Z - Z^p \approx Z^* - Z^p \quad (13)$$

앞에서 설명된 바와 같이 준정해로 고려되는 평활화된 응력함수는 유한요소해석 수행 후에 계산된 가우스 적분점에서의 응력값의 선형조합으로 나타낼 수 있으며, 특히 임의의 점  $(x_o, y_o)$ 에서의 응력값은 실제 위치를 나타내는 좌표값  $x_o, y_o$ 를 대입하면 응력값의 예측이 가능하게 된다(우광성, 2003; 우광성, 2006).

$$Z^*(x_o, y_o) = \sum_{j=0}^k \lambda_j Z_j(x, y) \quad (14)$$

여기서,  $k$ 는 가우스 적분점의 개수,  $\lambda_j, Z_j(x, y)$ 는 각각 가중치 및 가우스 적분점에서의 응력값이다. 이 연구에서 사용된 응력값은 von-Mises 응력으로 대표되었다. 유한요소해석

그 자체에 의한 에너지놈  $\|\hat{r}\|$  산정은 아래 식과 같다.

$$\|\hat{r}\| = \left( \int_{\Omega} (Z^p)^T [D]^{-1} Z^p d\Omega \right)^{1/2} \quad (15)$$

그러므로, 에너지놈의 상대오차 백분율은 다음과 같이 정의된다.

$$\eta_{\Omega} = \left( \frac{\|e_r\|^2}{\|e_r\|^2 + \|\hat{r}\|^2} \right)^{1/2} (\%) \quad (16)$$

응력특이가 발생하는 경우, 요소망의 형상함수 차수가 증가하게 되면 수렴구간(asymptotic range)에 들게 된다. 점근수렴(asymptotic convergence)된  $p$ -version 유한요소법은 외삽법을 통해 실제 변형에너지(exact strain energy)에 가까운 값을 예측하게 한다. 이를 극한치(limit value)라 하며 Babuska의 외삽법(extrapolation)에 의해 산정될 수 있다. 자유도가 충분히 크다고 생각되는 수렴구간에 있는  $p$ -version 유한요소법의 수렴률(convergence rate)은 식 (17)과 같이 Babuska의 역정리(inverse theorem)를 사용하여 제안된 바 있다(Babuska, 1991)

$$|U_{ex} - U_{fe}| \leq k / N_p^{2\alpha} \quad (17)$$

여기서,  $U_{ex}$ 와  $U_{fe}$ 는 극한치에 의해 외삽된 에너지값의 정해와 FEM해석에 의한 에너지값의 근사치라 한다. 그리고,  $\alpha$ 는 응력특이의 정도,  $N_p$ 와  $k$ 는 형상함수 차수가  $p$ 일때의 자유도와 체논과 관련된 상수이다. 따라서, 3개의 미지수  $U_{ex}, k$ 와  $\alpha$ 가 식 (17)에 존재한다. 수렴구간의 연속된 차수  $p-2, p-1$ 와  $p$ 가 있을 때, 식 (17)을 사용하면 미지수  $\alpha$ 와  $k$ 를 제거할 수 있다. 이와 같은 방법에 의해 Babuska는 아래와 같은 외삽방정식을 제안하였다(Babuska, 1991; 우광성, 2003).

$$\frac{\text{Log} \frac{U_{ex}^p - U_p}{U_{ex}^p - U_{p-1}}}{\text{Log} \frac{U_{ex}^p - U_p}{U_{ex}^p - U_{p-2}}} = \frac{\text{Log} \frac{N_{p-1}}{N_p}}{\text{Log} \frac{N_{p-2}}{N_p}} \quad (18)$$

여기서,  $U_p, U_{p-1}$ 와  $U_{p-2}$ 는 형상함수의 차수가  $p, p-1$ 와  $p-2$ 일 때의 계산된 변형에너지를 말하며,  $U_{ex}^p$ 는 예측된 에너지값의 정해(estimated exact strain energy)를 나타낸다. 한편,  $N_p, N_{p-1}$ 와  $N_{p-2}$ 는 차수변화에 따른 자유도이다. 그러므로, 식 (19)와 같이 새로운 형태의 에너지놈을 제안한다. 적응적 체논을 결정하기 까지 여러 단계를 거치면서 Z/Z 방법은 매 단계마다 에너지놈값을 새로이 산정하는 반면, 이 연구에서는 식 (19)와 같은 에너지놈 하나만을 사용

하여 사후오차를 평가해 볼 수 있다.

$$\|e\|_E = \left[ \frac{U_{ex}^L - U_P}{U_{ex}^L} \right]^{1/2} \quad (19)$$

식 (16)과 같이 S.P.R.기법에 기초를 둔 에너지놈의 상대오차 백분율과 유사하게 극한치 개념을 도입한 에너지놈의 상대오차 백분율은 식 (20)과 같다. 이 연구에서는 두 가지 방식이 서로 비교되었다.

$$\zeta = \left[ \frac{U_{ex}^L - U_P}{U_{ex}^L} \right]^{1/2} \quad (\%) \quad (20)$$

### 5. 응력확대계수 산정

가상균열확장법(virtual crack extension method)은 균열의 성장에 의해 방출되는 에너지 값이 균열성장을 위해 필요한 에너지 값을 충분히 감당하면 균열의 전파가 일어난다는 개념에 의해 파괴역학의 인자, 특히 무차원 응력확대계수를 계산하는 방법이다. 즉 그림 2의 균열  $a$ 가  $a+da$ 로 성장하면 그림 3의  $\triangle OAB$ 만큼의 에너지가 방출되는 의미를 한다. 가상균열확장법의 배경은 다음과 같다(윤영필, 1993; 이채규, 1995).

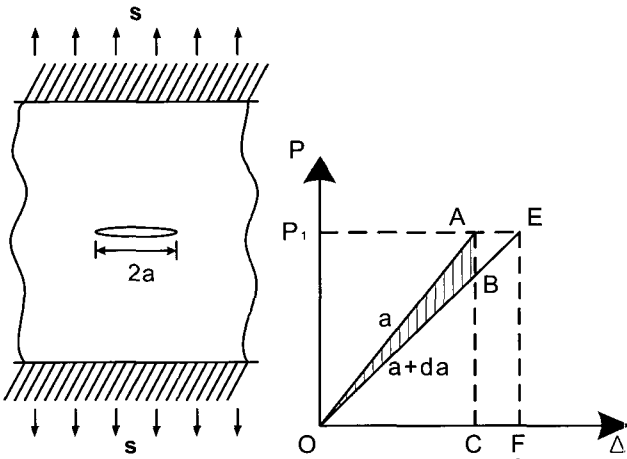


그림 2 인장력을 받는 임의형상의 균열판

그림 3 균열판의 하중-변위곡선

Griffith는 균열의 성장조건은  $dU/da = dW/da$ 로 표시할 수 있는데, 이 식에서  $U$ 는 변형에너지이고,  $W$ 는 균열성장에 필요한 에너지이다. 또한 Griffith는 Inglis의 응력장 계산을 기초로하여  $dU/da$ 를 다음과 같이 계산하였다.

$$G = \frac{dU}{da} = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} \quad (21)$$

이 식은 단위두께에 대해 유도되었고,  $G$ 는 에너지방출률

(energy release rate)이라 하며, 균열진전력(crack driving force)이라 한다. 균열전파에 소비되는 에너지는  $R = dW/da$ 로 표시되고 균열저항력(crack resistance force)이라 부른다. 가상균열확장법은 균열길이  $a$ 가  $a+da$ 로 진전될 때의 소산되는 에너지방출률값을 계산한다. 에너지 방출률  $G$ 는 식 (22)로 계산되는데  $U$ 는 균열길이가  $a$ 일 때 변형에너지 값이며,  $U'$ 은 균열길이가  $a+da$ 가 되었을 때 변형에너지 값이다. 이 식을 이용해 계산할 때  $da$ 는 일반적으로  $10^{-7} \times a$ 로 가정하였다(Woo, 1998). 식 (21)과 식 (22)를 사용하여 무차원 응력계수를 산정할 수 있게 된다.

$$G = -\frac{dU}{da} = \frac{U' - U}{da} \quad (22)$$

인장모드(opening mode)  $K_I$ 은 통상 식 (23)과 같이 정의되며  $F(a/b)$ 는 형상에 따른 보정계수(correction factor) 또는 무차원 응력확대계수(non-dimensional stress intensity factor)이며, 각 경우에 대해서 여러 경험식들이 CRACK HANDBOOK에 제안되었다(윤영필, 1993; 이채규, 1995).

$$K_I = C \sigma \sqrt{\pi a} \cdot F\left(\frac{a}{b}\right) \quad (23)$$

표 2 중앙균열판에 대한 무차원 응력확대계수 산정식

중앙균열판(Central Crack)	
$F(a/b) = \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b}}$	Irwin
$F(a/b) = 1 + 0.128\left(\frac{a}{b}\right) - 0.288\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1.525\left(\frac{a}{b}\right)^3$	Brown
$F(a/b) = \sqrt{\frac{\pi a}{2b}}$	Feddersen
$F(a/b) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2a}{W}\right)^2}}$	Dixon

표 3 양변균열판에 대한 무차원 응력확대계수 산정식

양변균열판(Double Edged Crack)	
$F(a/b) = \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b}}$	Irwin
$F(a/b) = 1 + 0.203\left(\frac{a}{b}\right) - 1.197\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1.930\left(\frac{a}{b}\right)^3$	Brown
$F(a/b) = \frac{1.122 - 0.561(a/b) - 0.015(a/b)^2 + 0.091(a/b)^3}{\sqrt{1 - \frac{a}{b}}}$	Bentham
$F(a/b) = \left(1 + 0.122 \cos^4 \frac{\pi a}{2b}\right) \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b}}$	Tada

표 4 일반균열판에 대한 무차원 응력확대계수 산정식

일반균열판(Single Edged Crack)	
$F(a/b) = 1.12 - 0.231\left(\frac{a}{b}\right) - 10.55\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 21.72\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30.39\left(\frac{a}{b}\right)^4$	Brown
$F(a/b) = 0.265(1 - a/b)^4 + \frac{0.857 + 0.265a/b}{(1 - a/b)^{3/2}}$	Tada
$F(a/b) = \frac{\sqrt{\frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b}} \cdot (0.752 + 2.02(a/b) + 0.37\left(1 - \sin \frac{\pi a}{2b}\right)^3)}{\cos \frac{\pi a}{2b}}$	Paris

6. 수치해석 예제

6.1 인장력을 받는 중앙균열판 해석

인장력을 받는 중앙균열판(CCP: centrally cracked panel)의 기하형상이 그림 4에 도시되어 있다. 대칭성을 사용하여 1/4 평판만이 8개의 요소망으로 모델링되었으며, 적응적 p-체 눈 세분화를 통한 최종 적응적 체눈은 그림 5와 그림 6과 같다. 그림 5의 경우는 종래의 최소제곱법(LSM: least square method)으로, 그림 6은 정규크리깅(OK: ordinary kriging)에 의해 평활화된 응력 Z\*를 계산하였다. p-체 눈 세분화는 컴퓨터 프로그램내에서 컴퓨터 그래픽스 기능을 사용하여 자동으로 수행되게 프로그램되었다. 이 때 초기체눈(initial mesh)은 8개 요소 모두 p-level=1로 고정시킨 후 시작되었다. 균열판의 높이, 폭과 균열길이는 각각 2h, 2b, 2a로 나타내었으며, h/b=2, σ=1.0, E=2×10<sup>6</sup>, 그리고 ν=0.3으로 사용

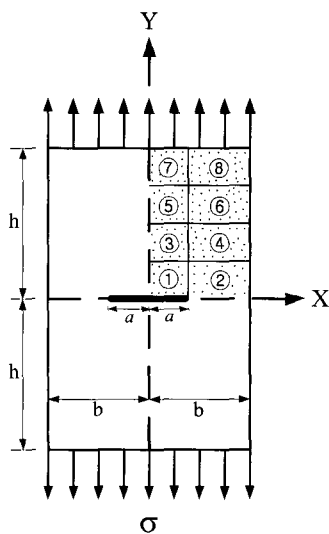


그림 4 중앙균열판의 기하형상 및 유한요소 모델

하였다. 그림 5와 그림 6의 최종체눈을 비교해 보면 균열선단 부 근처의 p-level은 최소제곱법에 기초를 둔 체눈세분화 방식에 비해 정규크리깅에 의한 p-level이 훨씬 작은 차수의 p-분배가 이루어져 있음을 알 수 있다. 표 5에서는 그림 5와 그림 6의 최종체눈을 사용하여 인장력을 받는 중앙균열판의 무차원 응력확대계수값을 a/b(균열길이/평판의 폭)를 0.1에서 0.9로 변화시켜가면서 해석해 보았다. 무차원 응력확대계수를 구하기 위해 가상균열확장법을 사용하였으며, 또 가상균열 크기에 대한 민감도 조사를 수행한 결과 da=10<sup>-6</sup>a로 결정하였다. 표 5의 마지막 열의 p=8(all meshes)는 요소망 전체에 p=8로 고정시켜 유한요소해석을 수행한 결과로 참고값으로 간주하였다. 그림 7을 보면 기존의 연구자들이 제시한 경험식과 LSM 및 OK에 의한 최종 적응적 체눈에 의한 유한요소 해석값들이 상대오차 ±5%내에 드는 충분한 정확도를 확보하고 있음을 알 수 있다. 이 결과로 그림 6의 정규크리깅에 의한 최종체눈이 그림 5의 최소제곱법에 의해 결정된 최종체눈에 비해 훨씬 적은 자유도에서 이미 정해에 수렴된 것을 알 수 있다. 덧붙여 설명하면 최소제곱법에 의한 최종체눈은 이미 무차원 응력확대계수 값이 정해에 수렴된 이후에도 계속 몇 단계의 반복을 더 진행한 후 프로그램이 멈추는 것을 알 수 있었다.

표 6을 보면 a/b=0.5일때 최소제곱법과 정규크리깅에 의해 p-체 눈 세분화 단계마다 에너지norm의 상대오차 백분율 비교를 나타내었다. 최소제곱법과 정규크리깅을 사용하여 p-체 눈 세분화를 수행하면 각각 반복단계가 9회, 4회에서 컴퓨터 프로그램에 의해 자동으로 작업이 종료되었다. 이 때의 p-차수의 분배가 그림 5와 그림 6인 것이다. 동일한 수준의 자유도에서 최소제곱법의 경우 NDF=140일때 η<sub>σ</sub>(%)=10.92인데 비

P=2	P=2
P=2	P=2
P=6	P=6
P=8	P=7

그림 5 중앙균열판의 경우 a/b=0.5 일때 LSM에 의한 최종 적응적 체눈

P=2	P=2
P=3	P=3
P=5	P=5
P=5	P=4

그림 6 중앙균열판의 경우 a/b=0.5 일때 OK에 의한 최종 적응적 체눈

표 5 중앙균열판의 경우  $a/b$ 의 변화에 따른 무차원 응력확대계수의 비교

$a/b$	Irwin	Brown	Feddersen	Dixon	$p$ -adaptive mesh(LSM)	$p$ -adaptive mesh(OK)	$p = 8$ (all meshes)
0.1	1.004	1.011	1.006	1.005	0.950	0.931	0.977
0.2	1.017	1.026	1.025	1.0211	0.994	0.984	1.001
0.3	1.040	1.054	1.059	1.048	1.033	1.007	1.035
0.4	1.075	1.103	1.112	1.091	1.086	1.054	1.085
0.5	1.128	1.183	1.189	1.155	1.162	1.123	1.158
0.6	1.208	1.303	1.304	1.250	1.274	1.251	1.267
0.7	1.336	1.473	1.484	1.400	1.448	1.420	1.437
0.8	1.565	1.670	1.799	1.667	1.748	1.700	1.729
0.9	2.114	1.994	2.528	2.294	2.420	2.331	2.384

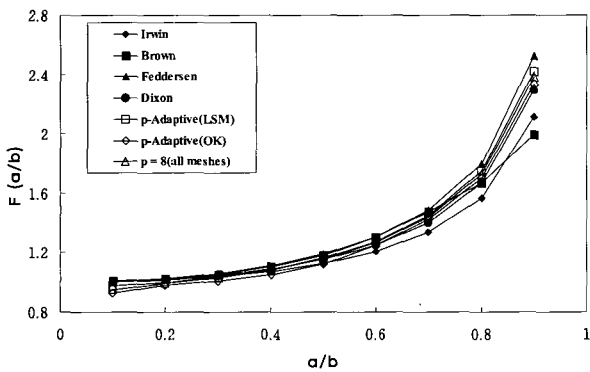


그림 7  $a/b$  비의 변화에 따른 중앙균열판의 무차원 응력확대계수  $F(a/b)$ 의 비교

해 정규크리깅의 경우  $NDF=135$ 일 때  $\eta_{\Omega}(\%)=2.73$ 으로 많은 차이를 보이고 있다. 이때 그림 5의  $p$ -차수가 그림 6에 비해  $p$ -차수가 더 고차인데 왜 에너지놈의 상대오차 백분율  $\eta_{\Omega}(\%)$ 는 더 크게 나오는 것인가? 그 이유는 체눈 세분화가 진행되는 때 단계마다 소위 준정해  $Z^*$ 는 유한요소해석후 가우스 적분점에서의 응력값들을 최적화시킨 값으로 매 단계마다 준정해는 달라지게 되며, 하나는 최소제곱법으로, 또 하나는 정규크리깅으로 평활화시킨 응력함수로 정의하기 때문에 준정해간의 정확도 차이에 기인될 수 있는 것이다. 그러므로,  $\eta_{\Omega}(\%)$ 는 체눈세분화를 더 진행해야 되느냐를 결정하는 오차지시자(error indicator) 역할을 수행하는데 사용되면 될 뿐이고, 실제 에너지놈의 상대오차는  $\eta_{\Omega}(\%)$ 와도 차이가 발생할 수 있다.

이러한 이유로 본 연구에서는 Babuska가 제안한 외삽방정식(extrapolation equation)을 사용한 극한치(limit value)방법을 제시한 것이다. 평소에는 이 방법은 사용되지 않는다. 왜냐하면 극한치를 구할 경우 이미 충분한 자유도로 요소분할 또는  $p$ -차수의 증가 등으로 이 해석값 자체가 바로

표 6 중앙균열판의 경우  $a/b=0.5$ 일 때 수정 SPR법에 의한 에너지놈의 상대오차 백분율 비교

No. of Iteration	Least Square Method		Ordinary Kriging	
	NDF	$\eta_{\Omega}(\%)$	NDF	$\eta_{\Omega}(\%)$
1	23	14.77	23	11.99
2	49	13.34	49	9.58
3	66	11.35	79	5.66
4	83	10.91	104	4.06
5	113	10.73	135	2.73
6	140	10.92	-	-
7	168	10.39	-	-
8	203	10.10	-	-
9	215	9.92	-	-

유한요소해석으로 산정할 수 있는 정해가 되므로 적응적 유한요소해석은 필요 없게 된다. 이 경우는 매단계마다 정해 대신에 극한치를 대신 사용하여 에너지놈의 상대오차 및 유한요소해석의 수렴성을 평가한다.

표 7에서는 에너지놈의 상대오차 백분율을 SPR법에 의해 정의된 식 (16)대신에 극한치개념을 도입한 식 (20)을 갖고 표 6과 동일한 포맷으로 평가해보았다. 자유도가 증가함에 따라 최소제곱법이나 정규크리깅 모두 상대오차가 점진적으로 감소되는 것을 볼 수 있다. 최소제곱법에 의해 체눈세분화가 되는 경우  $NDF=140$ 일 때  $\zeta(\%)$ 는 16.04%이며, 정규크리깅에 의해 체눈세분화가 진행되는 경우 자유도수가 비슷할 때 즉,  $NDF=135$ 일 때 역시  $\zeta(\%)$ 는 14.56%임을 알 수 있다. 무차원 응력계수에 대한 상대오차는 LSM과 OK에 의한 체눈세분화 과정을 통해 결정된 최종체눈으로 계산해보면 기존 연구자들과 비교하여 상대오차  $\pm 5\%$ 내에 드는 것을 알 수 있었는데, 에너지놈으로 평가하면 10%를 다소 상회하는 값을 보이고 있다. 이는 역시 외삽방정식으로 예측한 준



표 7 중앙균열판의 경우  $a/b=0.5$ 일 때 극한치법에 의한 에너지흐름의 상대오차 백분율 비교

No. of Iteration	Least Square Method		Ordinary Kriging	
	NDF	$\zeta(\%)$	NDF	$\zeta(\%)$
1	23	31.83	23	30.75
2	49	22.29	49	20.65
3	66	20.94	79	19.17
4	83	18.37	104	17.06
5	113	16.93	135	14.56
6	140	16.04	-	-
7	168	15.44	-	-
8	203	13.79	-	-
9	215	13.78	-	-

표 8 중앙균열판의 경우 최소제곱법의  $a/b$  변화에 따른 최종체눈까지 진행되는 자유도와 반복횟수의 비교

No. of Iteration	NDF with respect to $a/b$								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	23	23	23	23	23	23	23	23	23
2	26	34	34	49	49	54	62	62	62
3	43	55	55	66	66	79	79	73	79
4	62	73	78	78	83	104	104	96	107
5	82	86	94	107	113	123	130	130	140
6	91	119	127	116	140	150	159	159	169
7	115	138	146	145	168	174	194	170	191
8	137	169	172	168	203	196	213	194	217
9	177	194	182	185	215	217	226	231	223
10	194	198	-	191	-	223	231	-	-
11	210	-	-	-	-	-	-	-	-

표 9 중앙균열판의 경우 정규크리깅 방법의  $a/b$  변화에 따른 최종체눈까지 진행되는 자유도와 반복횟수의 비교

No. of Iteration	NDF with respect to $a/b$								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	23	23	23	23	23	23	23	23	23
2	28	35	44	49	49	54	54	54	62
3	40	52	61	67	79	74	87	65	87
4	66	66	75	84	104	103	97	78	130
5	86	95	102	91	135	110	104	98	137
6	-	-	118	111	-	141	113	107	146
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-

정해도 실제로 존재하는 이론적 정해와 차이를 보이고 있음을 말해주는 것으로 판단되며, 또 평활화를 하기 위해 사용되는 최소제곱법과 정규크리깅법 모두 보간과정에서 오차를 포함하고 있다는 것을 말해주는 것으로 해석된다.

그러므로, 적응적 유한요소법에서 사용되는 사후오차평가 는 체눈세분화를 더 진행할 것인가를 판단해주는 오차지시자로서의 역할로는 충분하지만 실제 오차를 평가하는데는 이론적 정해가 없는 경우에는 좀더 수학적인 접근이 필요함을 알 수 있다. 한편, 표 8과 표 9에서 보듯이  $a/b$ 비가 0.1에서 0.9까지 변화할 때 하나는 최소제곱법으로, 또 하나는 정규 크리깅을 사용하여 체눈세분화를 수행하게 되면 최종체눈까지 필요한 반복횟수도 서로 다르게 된다. 즉, 최소제곱법에 의한 반복횟수는  $a/b$ 변화에 따라 9회~11회의 반복단계가 필요하지만, 정규크리깅에 의하면 5회~6회로 반복횟수가 훨씬 줄어들음을 알 수 있다. 이 결과는 바로 해석시간의 단축으로 이어진다. 이 배경에는 정규크리깅에 의한 최종체눈으로도 충분한 정확도를 갖는 균열해석이 가능한데도 불구하고, 최소제곱법방식은 최종체눈을 결정하기 위해 체눈세분화를 더 진행하고 있다는 것을 반증하는 것이다. 물론, 두 경우 모두 체눈세분화를 할 것인지를 판단해주는 지시자(indicator)는 동일하게 설정하여 프로그램된 것임을 밝혀둔다.

### 6.2 인장력을 받는 양변 및 일변균열판 해석

그림 8에는 인장력을 받는 양변균열판(double edged crack) 과 일변균열판(single edged crack)의 기하형상 및 유한요소 모델이 도시되어 있다. 중앙균열판 해석과 같이 본 연구에서 제안하는 정규 크리깅 보간법을 이용한 적응적  $p$ -체 눈 해석을 수행해 보았다.  $h/b=2$ 로 하였고 인장력도  $\sigma=1.0$ 로 고정시켰다. 대칭성을 감안하여 양변균열판의 경우 1/4 모델, 일변균열판의 경우 1/2 모델만 고려하였다. 또한 초기체눈은 8개를 사용했으며 균열크기  $a$ 의 변화에 따른 무차원 응력확대계수  $F(a/b)$ 을 산정하기 위해서 중앙균열판 해석과 같이 가상균열확장법을 사용하였으며, 또 가상균열 크기에 대한 민감도 조사를 수행한 결과  $da=10^{-6}a$ 로 결정하였다. 각각의 재료상수는  $E=2 \times 10^6$ ,  $\nu=0.3$ 으로 설정했다. 처음 시작되는 초기체눈은 모두  $p=1$ 차로 고정하였다. 최종체눈의  $p$ -level 분포는 두 경우 모두 중앙균열판과 유사하여 따로 나타내지 않았다.

양변균열판의 경우도 앞서 언급한 중앙균열판 예제와 같이 무차원 응력확대계수의 정확도 측면에서 비슷한 결과를 볼 수 있다. 그림 9에서 보는 바와 같이 기존의 Irwin, Brown,

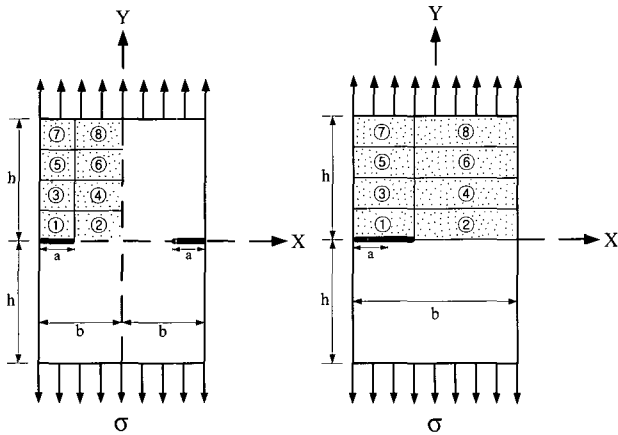


그림 8 인장력을 받는 양변 및 일변 균열판의 기하형상과 유한요소 모델

Benthem, Tada 등의 경험식(윤영필, 1993; 이채규, 1995)과 최소제곱법(LSM)을 이용한 적응적  $p$ -체논 모델 및 전 해석 영역에서 동일한 차수( $p=8$ )로 해석한 결과들이 정규 크리깅(OK)을 사용한 적응적  $p$ -체논 모델의 해석결과와 비교되었다.  $a/b=0.9$ 를 제외하고는 무차원 응력확대계수  $F(a/b)$ 가 상대오차  $\pm 5\%$ 내의 정확도를 보여주고 있음을 알 수 있다. 표 10에는 균열전선이  $a/b=0.5$ 일 때 해석단계별 에너지놈의 상대오차 백분율이 나타나 있다. 최종체논이 결정될 때까지 최소제곱법의 경우와 정규크리깅 방법은 각각 9회와 6회로 정규크리깅에 의한 체논세분화가 빨리 종료됨을 알 수 있다. 이때의 자유도 NDF도 223과 130으로 예측된 바와 같이 정규크리깅에 의한 체논세분화가 훨씬 적은 자유도를 필요로 하는 것을 알 수 있다. 에너지놈의 상대오차 백분율  $n_{\sigma}(\%)$ 도 정규크리깅에 의해 결정된 최종체논이 3.05%로 최소제곱법에 의해 결정된 최종체논의 9.89%로 상대오차가 적음을 알 수 있으며, 이로 인해 반복횟수의 감소를 가져왔다고 판단된다. 이 결과도 역시 각 단계별로 유한요소해석을 수행한 후 준정해로 고려하는 평활화된 응력함수  $Z$ 의 정확도와 무관하지 않음을 알 수 있다.

한편, 표 11에서는 극한치법을 사용하여 에너지놈의 상대오차 백분율을 비교하여 보았다. 이 경우는 준정해를 외삽법 정식에 의해 산정한 극한치를 매 반복단계에 고정적으로 사용되기 때문에 자유도 증가에 점진적 오차수렴이 된다. 또한, 비슷한 자유도에서 계산된 상대오차, 즉 최소제곱법의 경우 NDF=124일 때  $\zeta(\%)=13.59$ 인데 비해 정규크리깅의 경우 NDF=120일 때  $\zeta(\%)=16.99$ 임을 알 수 있다.

한편, 일변 균열판에서도 앞에서 해석된 예제인 중앙균열판 및 양변균열판과 마찬가지로 정규 크리깅 보간법을 이용한 적응적 유한요소해석이 수행되어 비슷한 결과를 얻을 수 있었다. 그림 10에도 Gross, Tada, 및 Paris의 제안식(윤

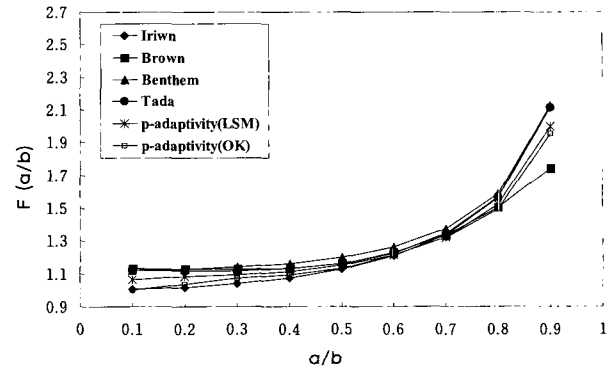


그림 9  $a/b$  비의 변화에 따른 양변균열판의 무차원 응력확대계수  $F(a/b)$ 의 비교

표 10 양변균열판의 경우  $a/b=0.5$ 일 때 해석단계별 에너지놈의 상대오차 백분율

No. of Iteration	Least Square Method		Ordinary Kriging	
	NDF	$n_{\sigma}(\%)$	NDF	$n_{\sigma}(\%)$
1	23	14.52	23	16.37
2	62	12.57	55	11.50
3	83	11.97	67	8.83
4	95	11.37	99	4.21
5	124	10.88	120	3.52
6	144	10.73	130	3.05
7	185	10.28	-	-
8	213	9.93	-	-
9	223	9.89	-	-

표 11 양변균열판의 경우  $a/b=0.5$ 일 때 극한치법에 의한 에너지놈의 상대오차 백분율

No. of Iteration	Least Square Method		Ordinary Kriging	
	NDF	$\zeta(\%)$	NDF	$\zeta(\%)$
1	23	28.45	23	29.65
2	62	20.41	55	22.14
3	83	19.03	67	20.93
4	95	16.21	99	18.31
5	124	13.59	120	16.99
6	144	11.67	130	14.56
7	185	10.11	-	-
8	213	8.93	-	-
9	223	8.92	-	-

영필, 1993; 이채규, 1995)과 최소제곱법 및 정규크리깅에 의한 최종 적응적 체논모델을 이용한 유한요소해석과  $p$ 의 차수를 전 해석영역에 8차로 동일하게 배치한 유한요소해석을 통해 산정된 무차원 응력확대계수  $F(a/b)$ 값을 서로 비교하여 나타내었다. 해석결과가 앞의 예제들과 비슷한 분석관점

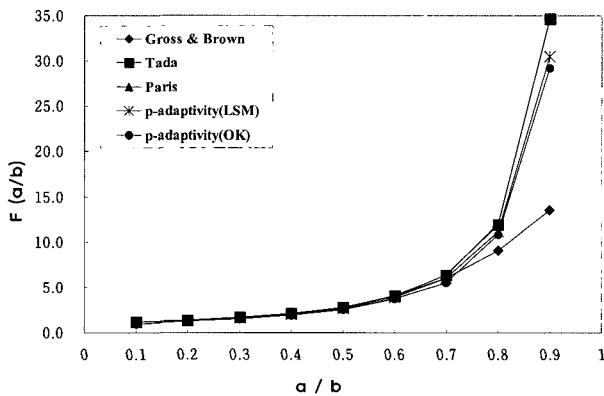


그림 10 \$a/b\$ 비의 변화에 따른 일반균열판의 무차원 응력확대계수 \$F(a/b)\$의 비교

표 12 일반균열판의 경우 \$a/b=0.5\$일 때 극한치법에 의한 에너지놈의 상대오차 백분율

No. of Iteration	Least Square Method		Ordinary Kriging	
	NDF	\$\zeta\$ (%)	NDF	\$\zeta\$ (%)
1	28	48.66	28	50.37
2	47	38.66	57	40.99
3	76	36.05	76	38.63
4	105	31.64	109	34.59
5	144	26.54	127	32.24
6	193	22.93	137	14.56
7	242	20.00	-	-
8	285	17.68	-	-
9	315	17.67	-	-
10	321	17.67	-	-
11	329	17.67	-	-

을 갖고 평가하였기 때문에 필요한 부분의 표와 그림만을 도시하였다. 먼저, 반복횟수는 정규크리깅이 6회인데 비해 최소제곱법에 의한 체눈세분화는 최종체눈 설계에 까지 11회의 반복단계를 요구하고 있음을 알 수 있다. 한편, 극한치법에 의한 에너지놈의 상대오차 백분율을 비교해 보면 최소제곱법의 경우 반복횟수가 8회 이상부터는 상대오차의 변화가 없는 것으로 볼 때, 이미 수렴구간내에 있을 것이라는 평가를 내릴 수 있다. 이러한 결론은 그림 10의 그림에서도 알 수 있다. 표 12에서 보듯이 정규크리깅에 의해 결정된 최종체눈의 경우 NDF=137로 무차원 응력확대계수를 산정한 결과는 최소제곱법으로 체눈세분화를 수행하여 얻은 최종체눈 모델, 즉 NDF=329에 비해 훨씬 적은 자유도에서 이미 정해에 수렴된 것을 알 수 있다. 그림 10과 같이 균열진전에 따른 무차원 응력확대계수의 정확도는 정규크리깅 방법이 제시된 여러 연구자들의 결과와 비교해 정확도가 떨어지지 않는 것으로 보아 최소제곱법을 갖고 평활화된 응력을 추정하는 방식에

비해, 거리와 응력값의 상관관계로 가중치를 부여하여 평활화된 응력을 구하는 방식이 보다 효율적이라 할 수 있겠다.

## 7. 결 론

본 연구를 통해 새로운 적응적 \$p\$-체눈 세분화 방법을 제시하였다. 기존의 적응적 \$h\$-체눈이나 적응적 \$p\$-체눈세분화 방식은 Zienkiewicz나 Zhu를 포함한 대부분의 연구자들이 해석단계별로 유한요소해석을 수행한 후, 계산된 가우스적분점에서의 응력값을 평활화하여 소위 준정해로 고려하였다. 응력함수로 표현되는 준정해와 해석된 유한요소값과의 오차를 평가하여 체눈세분화 여부를 평가하였다. 이 연구에서는 응력특이가 심한 균열문제를 대상으로 지구통계학에서 사용되고 있는 정규크리깅 방법을 사용하여 베리오그램 작성을 통한 새로운 응력평활화 개념을 제시하였다. 그 결과 다음과 같은 결론을 도출하였다.

첫째, 기존에 응력평활화에 사용된 최소제곱법 방식은 동일한 가중치를 모든 가우스적분점의 응력값에 부여한 반면, 정규크리깅 방식은 베리오그램 모델링과 크리깅 보간추정식을 통해 산정된 가중치를 모든 응력값에 부여하여 보간하는 만큼 평활화된 응력함수 또는 준정해의 신뢰성이 상대적으로 높음을 알 수 있었다. 이는 향후 유한요소 프로그램의 응력 등고선(stress contour)을 그릴 때 사용되는 post-processor에 적용될 수 있을 것으로 판단한다.

둘째, 초기체눈에서 최종체눈까지의 반복횟수가 현저히 줄었으며, 사용되는 자유도 역시 감소되었음을 알 수 있었다. 이는 역으로 말하면 최소제곱법 방식은 이미 수렴되었는데도 불구하고 지속적인 체눈세분화가 이루어진 다음에야 적응적 체눈세분화 과정을 완료하고 있음을 알 수 있었다.

셋째, 정규 크리깅방식과 최소제곱법 방식을 균열문제에 적용한 결과 모두 다 기존의 연구자들과 비교하여 높은 정확도 및 신뢰성을 확보하고 있음을 확인하였다.

## 감사의 글

이 논문은 2005년 한국학술진흥재단의 지역대학 우수과학자 지원사업으로 수행된 연구로 귀 재단에 깊은 감사를 나타냅니다. (KRF-2005-202-D00495).

## 참 고 문 헌

김영인, 우광성, 이채규(1995) 선형탄성 파괴역학에서 J-적분법에 의한 \$p\$-Version 균열모델의 적용, 한국전산구조공학회,

- 8(4), pp.137~148.
- 박병기, 신영식, 윤영필, 우광성(1993) 인장력을 받는 균열판의 응력확대계수 산정을 위한 P-version 균열모델, 한국전산구조공학 논문집, 6(4), pp.57~66.
- 안재석, 우광성, 조준형(2003) 사후오차평가에 의한 적응적  $p$ -체는 세분화, 대한토목학회 논문집, 23(2A), pp.177~185.
- 우광성, 이동진, 조준형(2006) 적응적  $p$ -Version 유한요소법에서 정규크리깅에 의한 응력복구기법, 대한토목학회 논문집, 26(4A), pp.677~687.
- 최종근(2002) 공간정보 모델링 - 크리깅과 최적화기법, pp.83~163, 구미서관.
- Abani Patra, Oden, J. T.(1995) A parallel adaptive strategy for  $hp$  finite element computations, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, pp.449~470.
- Atkinson, P.M., Lloyd, C. D.(2001) Assessing uncertainty in estimates with ordinary and indicator kriging, *Computer & Geoscience*, 27, pp.929~937.
- Babuska, I., Szabo, B.(1991) *Finite Element Analysis*, Wiley, New York.
- Chen, Y., Jiao, X.(2001) Semivariogram fitting with linear programming; Short Note, *Computer & Geoscience*, 27, pp.71~76.
- Dai, K. Y., Gu, Y. T., Lim, K. M., Liu, G. R.(2003) Comparison between the radial point interpolation and the kriging interpolation used in meshfree method, *Computational Mechanics*, 32, pp.60~70.
- Goldberger, A. S.(1962) Best linear unbiased prediction in the generalized linear regression, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 57, pp.369~375.
- Jian, X., Olea, R. A., Yu, Y. S.(1996) Semivariogram modeling by weighted least squares, *Computer & Geosciences*, 22(4), pp.387~397.
- Krige, D.G.(1951) A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand, *Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa*, 52, pp.119~139.
- Matheron, G.(1973) The intrinsic random functions and their applications, *J. Appl. Probab.*, 5, pp.439~468.
- Stein, M. L.(1999) *Interpolation of Spatial Data- Some Theory for Kriging*, Springer.
- Woo, K. S., Hong, C. H., Shin, Y. S.(1998) An extended equivalent domain integral method for mixed mode fracture problems by the  $p$ -version of FEM, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 42, pp.857~884.
- Yamamoto, J. K.(2000) An Alternative Measure of the Reliability of Ordinary Kriging Estimates, *Mathematical Geology*, 32(4), pp.489~509.
- Zhu, J. Z., Zienkiewicz, O. C.(1992) The super-convergent patch recovery and a posteriori error estimate Part I : The recovery Technique, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 33, pp.1331~1364.
- Zhu, J. Z., Zienkiewicz, O. C.(1992) The super-convergent patch recovery and a posteriori error estimate Part II : Error Estimate and Adaptivity, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 33, pp.1365~1382.