

# 혼합법칙을 이용한 황동 개재물이 있는 AI 정사각판의 고유진동수 해석

## A Study on the Natural Frequency of AI Square Plates with a Brass Inclusion using Rule of Mixtures

이 윤 복\*                      이 영 신†                      이 세 훈\*  
Lee, Youn-Bok                      Lee, Young-Shin                      Lee, Se-Hoon  
(논문접수일 : 2006년 2월 23일 ; 심사종료일 : 2006년 10월 9일)

### 요 지

황동 개재물이 있는 AI 정사각판의 고유진동수는 혼합법칙을 이용하여 해석되었다. 혼합법칙에 의한 고유진동수는 개재물의 크기에 따른 유효 내평면 파동속도와 무차원 진동수 매개변수와 곱으로 이루어진다. 해석모델은 외팔형, 2번 고정-2번 자유형, 3번 고정-1번 자유형 및 4번 고정형의 황동 개재물이 있는 4가지의 AI판이다. 자유단이 1개 이상 존재하는 경계조건에서 개재물이 판의 중앙에 위치하였을 때 개재물에 대한 판 전체의 면적비가 1/9 이하이면 혼합법칙 및 유한요소 해석에 의한 고유진동수는 10% 이내로 잘 일치하였다. 4번 고정형 경계조건을 제외하고 3가지 경계조건에서 개재물이 판 중앙에 있을 경우 개재물의 크기가 커짐에 따라 개재물이 있는 판의 고유진동수는 낮아짐을 알았다. 또한 개재물의 밀도가 판의 밀도보다 작을 때, 개재물 크기가 커짐에 따라 개재물이 있는 판의 고유진동수는 높아진다.

핵심용어 : 혼합법칙, 외팔형 판, 경계조건, 탄성 개재물, 고유진동수

### Abstract

The natural frequencies of AI square plates with a brass inclusion were analyzed by the rule of mixtures. The rule of mixtures is the method to derive natural frequency multiplying effective inplane wave speed and nondimensional frequency parameters. Numerical models were AI square plates with an inclusion with cantilever type, 2 clamped edge-2 free edge type, 3 clamped edge-1 free edge type and fully clamped edge type. In cantilever type plates, 2 clamped edge-2 free edge type plates and 3 clamped edge-1 free edge plates with an inclusion, good agreement within 10% obtained from rule of mixtures' results and numerical analysis results within inclusion area ratio 1/9. It was found that the natural frequencies of the cantilever type, 2 clamped edge-2 free edge type and 3 clamped edge-1 free edge type plates with an inclusion decrease as the size of inclusion increases when inclusion is located center of plates. And when the density of inclusion is less than the plates, natural frequency of plates with an inclusion increases as the size of inclusion increases.

*Keywords : rule of mixtures, cantilever type plate, boundary condition, elastic inclusion, natural frequency*

### 1. 서 론

국내의 연구자들은 기계 구조물의 기본요소로 사용되는 사각판의 정적, 동적 해석을 수행해 왔다(우광성 등, 2001; 최명수, 2003; 김성균 등, 2003; 노승훈 등, 2000). 그러나 기계 구조물의 형상이 점점 복잡한 설계에 있어서 단순한 해를 기초로 하여 발전시키는 공학적 접근방법이 사용되었다(이영

신 등, 1994 A). 실제 설계에서는 불연속부가 존재하는 구조물을 대상으로 하기 때문에 개구부 또는 개재물을 지닌 판의 동적거동 이해가 중요하다. 여기서 개재물은 rigid 개재물과 탄성 개재물로 구별되며, 실제 문제에서는 판에 개구부가 있을 경우 개구부가 판의 재질과 다른 탄성재료로 채워질 때, 즉 서로 다른 재질로 구성된 이종재료로서 탄성 개재물로 다루어진다(Timoshenko, 1959). rigid 개재물은 탄성 개재물의 극한

† 책임저자, 정회원 · 충남대학교 기계설계공학과 교수  
Tel: 042-821-6644 ; Fax: 042-821-8894  
E-mail: leeys@cnu.ac.kr

\* 충남대학교 기계설계공학과 대학원

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

경우로 고려된다. 산업계의 탄성 개재물은 판의 고정을 위한 강 인서트, AI이나 강 재질내의 동 부싱, 마찰 감소를 위한 선반 베드의 동 재질 및 전자제품의 PCB(Printed-circuit Board)내의 압입된 주석 재질 등 여러 분야에 공학적으로 적용되고 있다. 또한 선박 및 항공기 구조요소의 손상부분의 제거 및 수리에 구체적 사용 예를 들 수 있다.

Laura 등에 의해 등방성판보다 밀도가 높은 직교이방성 개재물이 있는 불균질 직사각형판의 횡진동 해석은 중첩법에 의한 변형에너지와 대칭성이 있는 처짐함수로 1차 고유진동수를 탄성지지 경계조건에 대하여 연구하였다. Ercoli 등은 단순지지된 직교이방성이 있는 불균질 사각판을 중첩법으로 변형에너지를 구하고 변위를 삼각함수로 가정하여 유한요소해석과 비교 연구하였다(Laura, 1984; Ercoli 1992). Bucaro 등은 강판 내부에 있는 모르타르로 된 개재물의 탐지와 위치 식별을 위한 역문제 해석(Bucaro, 2004)을 수행하였다.

본 연구에서는 황동 개재물의 크기에 따른 AI 정사각판의 고유진동수를 경계조건 즉, 외팔형, 2변 고정-2변 자유형, 3변 고정-1변 자유형 및 4변 고정형의 4가지 조건에 따라 혼합법칙으로 구하였다. 또한 황동 개재물이 있는 AI 정사각판(이영신 등, 1994 B; Rajalingham, 1996; Chang, 2003)의 고유진동수를 여러 가지 경계조건에 따라 유한요소해석으로 수행하여 혼합법칙의 결과와 비교, 분석을 통하여 개재물의 위치가 판의 중앙에 있을 때 개재물의 크기에 따른 진동특성을 고찰하였다(이윤복 등, 2005).

## 2. 혼합법칙

혼합법칙(Gibson 1994)은 복합재료의 미소역학으로 복합재료의 강성을 구성물질의 강성으로 구하는 것이다. 일 방향 섬유복합재료를 대상으로 복합재료의 유효 탄성계수, 유효 밀도 및 유효 포와송비를 구성물질의 탄성계수, 밀도 및 포와송비와 체적비율로 예측하는 이론이고, 섬유와 기지는 균질, 선형탄성, 등방성이며 기공이 존재하지 않는다고 가정한다. 이 가정에 따르면 개재물이 있는 판에 대하여 혼합법칙을 적용할 수 있으며 이로 부터 간단한 수학적 방법으로 개재물이 있는 판의 고유진동수를 구할 수 있다.

$$V = V_{AI} + V_i \quad (1)$$

$$v_{AI} = \frac{V_{AI}}{V} \quad (2)$$

$$v_i = \frac{V_i}{V} \quad (3)$$

$$\rho = \rho_{AI}v_{AI} + \rho_i v_i \quad (4)$$

$$E = E_{AI}v_{AI} + E_i v_i \quad (5)$$

$$\nu = \nu_{AI}v_{AI} + \nu_i v_i \quad (6)$$

여기서,  $V$ : 판의 체적,  $V_{AI}$ : AI의 체적,  $V_i$ : 개재물의 체적,  $v_{AI}$ : AI의 체적 비율,  $v_i$ : 개재물의 체적 비율,  $\rho$ : 판의 유효 밀도,  $\rho_{AI}$ : AI의 밀도,  $\rho_i$ : 개재물의 밀도,  $E$ : 판의 유효 탄성계수,  $E_{AI}$ : AI의 탄성계수,  $E_i$ : 개재물의 탄성계수,  $\nu$ : 판의 유효 포와송비,  $\nu_{AI}$ : AI의 포와송비,  $\nu_i$ : 개재물의 포와송비이다.

고유진동수와 무차원 진동수 매개변수의 관계(Blevins, 1979)는

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}} \quad (7a)$$

$$= \frac{\lambda_i^2 h}{4\sqrt{3}\pi a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (7b)$$

으로 나타난다.

여기서,  $a$ : 판의 길이,  $h$ : 판의 두께,  $\lambda_i^2$ : 판의 무차원 진동수 매개변수이다.

식 (7b)는 고유진동수와 내평면 파동속도에 대한 1차식으로 나타난다. 여기서  $\lambda_i^2$ 는 경계조건을 만족하는 평판의 무차원 진동수 매개변수이고 식 (7b)에 개재물의 크기에 따른 내평면 파동속도값을 대입하여 고유진동수를 구한다.

유효 내평면 파동속도는 개재물의 체적 비율  $v_i$ 를 면적비  $m$ 이라고 하면 식 (4)~(6)에 의해

$$\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} = \sqrt{\frac{E_{AI}(1-m) + E_i m}{\{\rho_{AI}(1-m) + \rho_i m\}[1 - \{\nu_{AI}(1-m) + \nu_i m\}^2]}} \quad (8)$$

이고

$$f_i = \frac{\lambda_i^2 h}{4\sqrt{3}\pi a^2} \times \sqrt{\frac{E_{AI}(1-m) + E_i m}{\{\rho_{AI}(1-m) + \rho_i m\}[1 - \{\nu_{AI}(1-m) + \nu_i m\}^2]}} \quad (9)$$

이다.

직사각판의 경계조건에 자유단이 1개 이상 존재하면  $\lambda_i^2$ 이  $\nu$ 값에 종속되어  $\nu$ 가 증가함에 따라  $\lambda_i^2$ 가 감소하나 이

영향은 오차가 수 % 이므로 무시하였다. 또한 식 (9)의  $\lambda_i^2$  은 경계조건, 형상비 및 포와송비의 함수인 무차원 진동수 매개변수이므로 경계조건과 형상비가 같으면, 개재물의 유무에 관계없이  $\lambda_i^2$  값은 동일하다. 또한 혼합법칙의 장점은 판의 중앙에 개재물을 갖는 사각판에 대하여 손쉽게 고차의 근사 고유진동수를 구할 수 있는 점이고, 판의 중앙에 있는 임의의 개재물 형상에 대하여 고차의 근사 고유진동수를 구할 수 있는 것이다. 그 대신 혼합법칙의 단점은 개재물이 편심되었을 때 고유진동수를 제시하기 어렵고, 직접적으로 모드 형상을 구할 수 없는 것이다. 그리고 혼합법칙은 등질화 개념으로 볼 수 있으며 1개의 개재물을  $n$  등분하면 개재물이 편심되어 분포한다. 이 때 편심된 여러 개의 개재물로부터 해석 오차가 포함된다. 따라서 혼합법칙의 오차는 일반적으로 유한요소해석의 오차보다 크다고 할 수 있다.

3. 유한요소해석

3.1 개요

황동 개재물이 있는 Al 정사각판의 진동특성을 여러 가지 경계조건에 따라 유한요소해석을 수행하였다. 유한요소해석은 상용 전산프로그램인 ANSYS 8.1을 이용하여 고유값 문제(Eigenvalue problem)를 부공간법(Subspace method)으로 구하였다(Kohnke, 1992). 부공간법은 절점과 자유도가 많은 구조물을 유한요소해석할 때 동적거동의 기여도가 큰 주요한 몇 개의 모드만을 구하여 구조 전체의 동적거동을 근사적으로 구하는 방법이다. 따라서 구조물의 자유도를 축소하여 계산상의 효율을 기하면서 고유값을 구할 수 있다. 유한요소모델은 그림 1과 같이 셸요소(Shell 63)를 사용하였으며 셸요소의 특성은 4절점 및 각 절점당 6자유도(3개의 병진운동 및 3개의 회전운동)를 갖는다.

3.2 유한요소 모델

유한요소모델은 그림 2와 같이 개재물이 있는 판은 가로 300mm, 세로 300mm 및 두께 4.8mm 이고 개재물의 크기는 0, 50×50, 100×100, 150×150 및 300×300mm 이며, 경계조건은 자유단의 유무, 기하학적 대칭 및 고정단, 자유단의 조합을 고려하여 외팔형, 2변 고정-2변 자유형, 3변 고정-1변 자유형 및 4변 고정형이다. 여러 가지 경계조건을 간단히 표현하기 위하여 x=0인 변으로부터 시계방향으로 각 변의 고정(Clamp : C) 및 자유단(Free : F)의 약어로 연속하여 기술

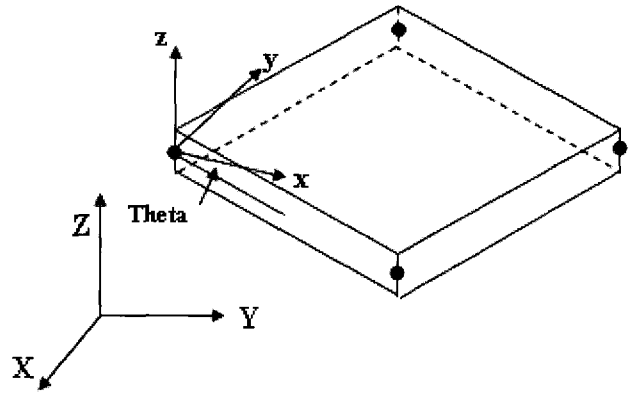


그림 1 Shell 63 element in ANSYS

표 1 Material properties of Al 5083, brass and steel

Materials	E(GPa)	$\rho(kg/m^3)$	$\nu$	$\sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}(m/s)$
Al 5083	72.3	2,744	0.33	5,437.7
Brass	94.6	8,850	0.17	3,317.7
Steel	216.0	7,835	0.26	5,437.6

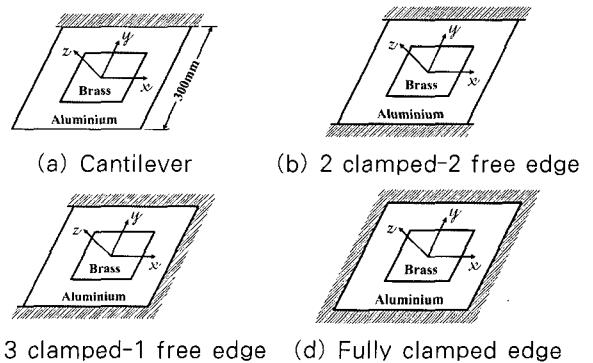


그림 2 Four typical models of Al square plates with an inclusion

하면 외팔형(FCFF), 2변 고정-2변 자유형(FCFC), 3변 고정-1변 자유형(FCCC), 4변 고정형(CCCC)로 된다.

물성치는 표 1과 같으며, Al 5083은 metal sheet의 데이터이고 황동은 실험 데이터이며, 강은 크롬 모리브텐 강으로 참고문헌(Blevins, 1979)을 인용하였으며, 이것은 Al 5083과 내평면 파동속도를 동일하게 선택한 것이다.

또한 Al 판과 개재물 사이의 해석조건은 경계면에서 유한요소 크기(Mesh size)가 5mm 크기로 하여 노드가 공유됨으로써 Al과 황동의 경계가 연속으로 모델화하였다. 유한요소 크기가 5mm인 정사각형으로 하여 총 요소수는 3,600개, 총 절점수는 3,721개, 총 자유도수는 22,326개, 축소된 자유도수는 20,886개 그리고 부공간의 크기는 12개이다.

#### 4. 결과 및 고찰

##### 4.1 혼합법칙에 의한 고유진동수 해석

혼합법칙을 적용하여 판의 중앙에 개재물의 크기가 증가할 때 경계조건(외팔형, FCFC, FCCC, CCCC)에 따라 고유진동수의 변화를 1차부터 4차에서 표 2~5에 나타내었다. 이는 혼합법칙으로 식 (9)와 같이 유효 내평면 파동속도와 무차원 진동수 매개변수의 곱으로 계산한 것이다. 4가지 경계조건 모두에 대하여 개재물의 크기가 0, 50×50, 100×100, 150×150 및 300×300mm로 커짐에 따라 1차부터 4차까지의 고유진동수는 낮아진다. 표 6은 표 2의 황동 개재물을 갖는 외팔형

AI 정사각판과 반대로 AI 개재물이 있는 황동 정사각판에 대하여 개재물의 크기에 따른 고유진동수를 나타낸다. 고유진동수는 개재물의 크기가 커짐에 따라 점점 증가하는 경향이고 이는 표 2와 반대의 현상을 나타낸다. 표 7은 강 개재물을 갖는 외팔형 AI 정사각판으로 개재물의 크기에 따른 고유진동수를 나타낸다. 여기서 강과 AI은 내평면 파동속도의 크기가 같다. 표 8은 표 7과 반대로 AI 개재물을 갖는 외팔형 강재질의 정사각판으로 개재물의 크기에 따른 고유진동수를 나타낸다. 표 7과 표 8에서 개재물과 정사각판의 내평면 파동속도가 거의 같으므로 개재물의 크기가 변하여도 고유진동수는 거의 일정함을 알 수 있다.

표 2 Comparison of FEM and rule of mixtures' results in cantilever type plates with inclusion size

Inclusion Size (mm)		1st		2nd		3rd		4th	
		FEM	Mix.	FEM	Mix.	FEM	Mix.	FEM	Mix.
0 Al plate	Hz	46.1	46.5	111.5	113.6	281.3	285.5	360.8	364.1
	error*	+1		+2		+1		+1	
50×50	Hz	45.5	45.3	112.3	110.5	273.3	277.7	343.4	354.2
	error	0		-2		+2		+3	
100×100	Hz	43.5	42.1	113.6	102.8	250.3	258.4	330.5	329.5
	error	-3		-10		+3		0	
150×150	Hz	40.3	38.2	112.1	93.2	232.9	234.3	329.1	298.8
	error	-5		-20		+1		-10	
300 Brass plate	Hz	28.5	28.4	73.6	69.3	177.4	174.2	225.3	222.2
	error	0		-6		-2		-1	

$$* \text{error} (\%) = \frac{\text{Mix.} - \text{FEM}}{\text{FEM}} \times 100$$

표 3 Comparison of FEM and rule of mixtures' results in FCFC type plates with inclusion size

Inclusion Size (mm)		1st		2nd		3rd		4th	
		FEM	Mix.	FEM	Mix.	FEM	Mix.	FEM	Mix.
0 Al plate	Hz	294.7	296.7	349.3	353.4	577.2	581.7	813.4	818.9
	error	0		+1		0		+1	
50×50	Hz	276.4	288.6	348.6	343.8	529.9	565.8	807.7	796.7
	error	+4		-1		+6		+1	
100×100	Hz	238.6	268.5	339.8	319.8	495.0	526.4	737.0	741.1
	error	+11		-6		+1		+1	
150×150	Hz	209.4	243.5	313.0	290.0	491.3	477.3	614.5	672.0
	error	+14		-8		-3		+9	
300 Brass plate	Hz	181.4	181.0	220.4	215.6	363.6	354.9	500.3	499.7
	error	0		-2		-2		0	

표 4 Comparison of FEM and rule of mixtures' results in FCCC type plates with inclusion size

Inclusion Size (mm)		1st		2nd		3rd		4th	
		FEM	Mix.	FEM	Mix.	FEM	Mix.	FEM	Mix.
0 Al plate	Hz	317.5	320.0	530.9	533.4	840.2	845.8	1020.1	1022.6
	error	0		0		+1		0	
50×50	Hz	302.0	311.3	479.9	518.9	835.7	822.8	1002.9	994.8
	error	+3		+8		-2		-1	
100×100	Hz	264.0	289.6	434.1	482.7	763.7	765.4	867.1	925.4
	error	+9		+10		0		+6	
150×150	Hz	232.8	262.6	407.6	437.7	633.6	694.1	746.8	839.1
	error	+11		+7		+8		+11	
300 Brass plate	Hz	197.0	195.2	330.2	325.5	518.1	516.1	628.2	623.9
	error	-1		-1		0		-1	

표 5 Comparison of FEM and rule of mixtures' results in CCCC type plates with inclusion size

Inclusion Size (mm)		1st		2nd		3rd		4th	
		FEM	Mix.	FEM	Mix.	FEM	Mix.	FEM	Mix.
0 Al plate	Hz	479.4	479.5	977.6	978.0	977.6	978.0	1441.1	1442.8
	error	0		0		0		0	
50×50	Hz	412.4	466.4	960.0	951.4	960.0	951.4	1450.1	1403.6
	error	+12		-1		-1		-3	
100×100	Hz	330.0	433.9	817.0	885.0	817.0	885.0	1352.1	1305.6
	error	+24		+8		+8		-4	
150×150	Hz	290.1	393.4	662.5	802.5	662.5	802.5	1058.9	1183.9
	error	+26		+17		+17		+11	
300 Brass plate	Hz	292.5	292.5	596.6	596.7	596.6	596.7	879.4	880.3
	error	0		0		0		0	

표 6 Comparison of FEM and rule of mixtures' results in cantilever type brass plates with Al inclusion size

Inclusion Size (mm)		1st		2nd		3rd		4th	
		FEM	Mix.	FEM	Mix.	FEM	Mix.	FEM	Mix.
0 Brass plate	Hz	28.5	28.4	73.6	69.3	177.37	174.3	225.3	222.2
	error	0		-6		-2		-1	
50×50	Hz	28.6	28.6	73.2	69.8	178.7	175.5	228.7	223.7
	error	0		-5		-2		-2	
100×100	Hz	28.9	29.2	72.1	71.4	181.1	179.5	239.9	228.9
	error	+1		-1		-1		-5	
150×150	Hz	29.6	30.5	71.3	74.5	183.3	187.3	256.6	238.8
	error	+3		+4		+2		-7	
300 Al plate	Hz	46.1	46.5	111.5	113.6	281.3	285.6	360.8	364.1
	error	+1		+2		+2		+1	

표 7 Comparison of FEM and rule of mixtures' results in cantilever type Al plates with steel inclusion size

Inclusion Size (mm)		1st		2nd		3rd		4th	
		FEM	Mix.	FEM	Mix.	FEM	Mix.	FEM	Mix.
0 Al plate	Hz	46.1	46.6	111.5	113.6	281.3	285.7	360.8	364.3
	error	+1		+2		+2		+1	
50×50	Hz	45.9	46.7	114.6	113.9	282.0	286.3	354.7	365.2
	error	+2		0		+2		+3	
100×100	Hz	44.9	46.9	122.4	114.5	285.3	287.9	363.4	367.2
	error	+4		-7		+1		+1	
150×150	Hz	43.3	47.2	130.6	115.3	293.6	289.8	394.4	369.6
	error	+8		-13		-1		-7	
300 Steel plate	Hz	45.2	47.8	109.9	116.8	276.4	293.6	354.0	374.4
	error	+5		+6		+6		+5	

표 8 Comparison of FEM and rule of mixtures' results in cantilever type steel plates with Al inclusion size

Inclusion Size (mm)		1st		2nd		3rd		4th	
		FEM	Mix.	FEM	Mix.	FEM	Mix.	FEM	Mix.
0 Steel plate	Hz	45.2	46.6	109.9	113.6	276.4	285.7	354.0	364.3
	error	+3		+3		+3		+3	
50×50	Hz	46.3	46.6	114.2	113.7	276.4	285.8	363.2	364.4
	error	+1		+0		+3		0	
100×100	Hz	45.9	46.6	110.1	113.8	279.5	286.0	364.0	364.8
	error	+2		+3		+3		0	
150×150	Hz	45.0	46.7	104.9	114.0	274.1	286.5	366.8	365.3
	error	+4		+8		+4		0	
300 Al plate	Hz	46.1	46.5	111.5	113.6	281.3	285.7	360.8	364.3
	error	+1		+2		+2		+1	

4.2 유한요소해석에 의한 고유진동수 해석

판의 중앙에 개재물의 크기가 0, 50×50, 100×100, 150×150 및 300×300mm로 증가할 때 1차부터 4차에서의 고유진동수 변화는 표 2~5에 나타냈었다. 표 2은 외팔형 경계 조건에서 개재물의 크기에 따라 유한요소해석으로 1차부터 4차의 고유진동수를 구한 것이다. 개재물이 없는 Al판에서 유한요소해석의 정확도를 살펴보기 위하여 유한요소해석 결과와 이론해석 결과(Blevins, 1979)를 비교하면 유한요소해석 결과가 상대적으로 낮게 나타나 있으나 2% 오차범위 내로 잘 일치한다. 개재물의 크기가 커짐에 따라 차수별 고유진동수는 낮아지고 있으나 2차 모드에서 개재물의 크기가 50×50, 100×100 및 150×150mm일 때 Al판(111.5 Hz)보다 조금 높아지는 경향을 보이고 있으며, 이는 2% 오차로 공학

적 범위 내에 있다고 판단된다. 표 3은 2번 고정-2번 자유형(FCFC) 경계조건에서 개재물의 크기에 따라 유한요소해석으로 고유진동수를 1차부터 4차까지 구한 것이다. 개재물의 크기가 0, 50×50, 100×100, 150×150 및 300×300mm로 커짐에 따라 1차부터 4차까지의 고유진동수는 낮아진다.

표 4은 3번 고정-1번 자유형(FCCC)경계조건에서 개재물의 크기에 따라 유한요소해석으로 고유진동수를 1차부터 4차까지 구한 것이다. 표 3과 마찬가지로 개재물의 크기가 커짐에 따라 모드별 고유진동수가 낮아짐을 알 수 있다. 표 5는 4번 고정형(CCCC) 경계조건에서 개재물의 크기에 따라 유한요소해석으로 고유진동수를 1차부터 4차까지 구한 것이다. 표 6은 개재물의 크기가 커질수록 고유진동수가 대부분 증가하나 2차 모드에서 약간 저하되는 경향이 있다. 표 7은 개재물의 크기가 커질수록 고유진동수가 대부분 증가하나 개재물

의 크기가 100×100mm 및 150×150mm 부근의 1차 모드에서 약간 저하되는 경향이 있다. 표 8은 4차 모드까지 개재물의 크기에 따른 경향을 보이지 않고 있다. 이는 표 7과 표 8에서 혼합법칙에 비해 유한요소해석이 오차를 많이 포함하고 있음을 알 수 있다.

### 4.3 유한요소해석에 의한 절선 해석

혼합법칙은 모드형상 및 절선을 직접적으로 구할 수 없으므로 유한요소해석에 의한 절선해석을 하였다. 그림 3은 외팔형, FCFC, FCCC 및 CCCC 경계조건에 대하여 1차부터 4차까지의 절선 및 고유진동수를 나타내었다. 경계조건이 외팔형 및 FCFC일 때의 절선은 y축에 대하여 대칭으로 나타나 있으며 절선형태로 보아 개재물의 영향이 거의 보이지 않는다. 경계조건이 FCCC인 경우 고정지지의 영향이 크므로 절선이 자유단쪽으로 편심되어 나타난다. 경계조건이 CCCC

일 때 2차 및 3차 모드에서 고유진동수는 같으나 절선이 다른 현상을 보이고 있다.

### 4.4 고찰

혼합법칙 및 유한요소해석 결과에서 개재물의 크기에 따른 1차부터 4차까지의 고유진동수를 비교해 보면 표 2~8과 같다. 표 2~4 및 표 6~8은 경계조건(외팔형, FCFC, FCCC)에 따른 유한요소해석 결과와 혼합법칙 결과를 개재물의 크기 별로 1차부터 4차까지의 고유진동수를 비교하고 그 오차를 구한 것이다. 여기서 개재물의 크기가 100×100mm이하이면 오차의 범위가 거의 10%이내로 즉, Al판의 중앙에 개재물의 크기가 어느 정도 작게 존재하면 혼합법칙이 잘 맞으며, 혼합법칙은 개재물의 크기에 제한이 되나 전체 판의 중앙에 있을 때 유용하다. 또한 개재물의 크기가 100×100mm를 초과하면 점차로 오차가 증가한다. 여기서 만족하는 면적비(m)는 1/9 즉,

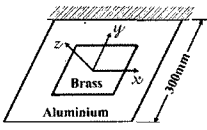
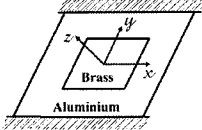
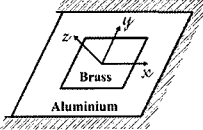
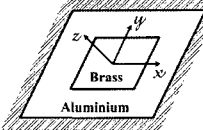
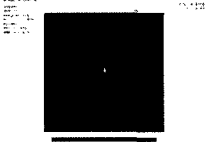
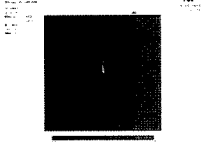
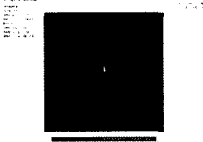

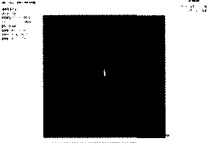

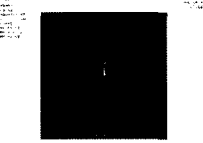
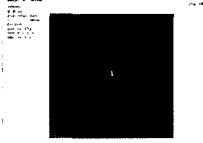
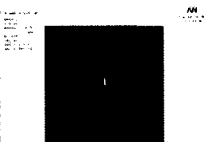

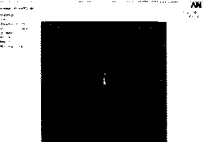
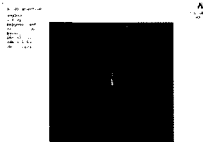
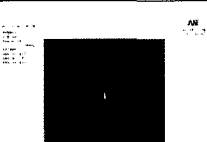

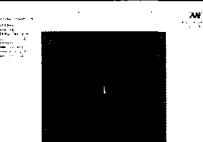

Order	 Cantilever	 2 clamped-2 free edge	 3 clamped-1 free edge	 Fully clamped edge
1st (Hz)	 40.326	 209.40	 232.77	 290.14
2nd (Hz)	 112.06	 312.97	 407.57	 662.45
3rd (Hz)	 232.88	 491.32	 633.59	 662.45
4th (Hz)	 329.09	 614.49	 746.84	 1058.9

그림 3 Numerical nodal lines and natural frequencies up to 4th mode in 4 boundary conditions

개재물의 크기가 100×100mm이다. 표 5에서 혼합법칙과 유한요소법의 오차는 4변 고정형에서 개재물의 크기가 150×150mm일 때 최대 26%에 이른다. 이의 근본적인 원인은 개재물의 크기 즉 면적비의 영역이 어느 범위를 넘어가면 오차상승에 기인한다. 4변 고정형 경계조건에 대하여 개재물의 크기가 증대됨에 따라 1차부터 4차까지의 고유진동수를 유한요소해석 결과와 혼합법칙 결과와 비교한 것으로 일부분의 오차가 10%를 넘고 있다. 표 6은 혼합법칙과 유한요소해석의 오차범위가 표 2(20%)보다 7%로 낮다. 표 7과 표 8은 혼합법칙과 유한요소해석의 오차범위가 13%이내로 나타나며 개재물과 판의 내평면 파동속도가 같다. 따라서 개재물의 크기가 변하여도 고유진동수가 변하지 않는 특성을 고려하면 혼합법칙의 경우가 엄밀해에 근접한다고 할 수 있다. 여기서 혼합법칙과 유한요소해석의 비교는 유한요소해석결과의 참고치로 혼합법칙 결과의 오차를 파악하여 혼합법칙 결과를 검증하기 위함이다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 혼합법칙 및 유한요소해석을 통하여 황동 개재물이 있는 AI 정사각판에 대한 1차부터 4차까지의 고유진동수 및 절선을 제시하였다. 이로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 개재물의 밀도가 판의 밀도보다 클 때, 개재물 크기가 커짐에 따라 개재물이 있는 판의 고유진동수는 낮아진다.
- 2) 개재물의 밀도가 판의 밀도보다 작을 때, 개재물 크기가 커짐에 따라 개재물이 있는 판의 고유진동수는 높아진다.
- 3) 혼합법칙의 결과로 개재물의 내평면 파동속도와 판의 내평면 파동속도가 같을 때, 개재물의 크기가 커짐에 따라 개재물이 있는 판의 고유진동수는 거의 변하지 않는다.
- 4) 자유단이 1개 이상 존재하는 경계조건에서 개재물의 크기가 100×100mm 즉, 면적비가 1/9이하이면 혼합법칙 결과와 유한요소해석 결과는 오차범위가 10% 수준으로 잘 일치한다.
- 5) 4가지 절선은 3변 고정-1변 자유형을 제외하고 판 전체에 대칭을 이룬다.

## 참 고 문 헌

김성균, 유홍희 (2003) 임의의 자세를 갖는 외팔형판의 진동 해석, 대한기계학회 논문집 A권, 27(8), pp.1331~1337.  
 노승훈, 조한중, 최은환 (2000) 데이터베이스를 이용한 사각형판의 자유진동해석, 대한기계학회 논문집 A권, 24(8), pp.1978~1990.

우광성, 허철구, 박진환 (2001) C<sup>0</sup>-계층적 평판요소에 의한 정사평판의 비선형 해석, 한국전산구조공학회 논문집, 14(1), pp.65~76.  
 이영신, 이운복 (1994 A) 2개의 원형구멍이 있는 4변 고정등방성 정사각형판의 자유진동해석, 한국소음진동공학회지, 4(3), pp.283~293.  
 이영신, 최명환 (1994 B) 외팔형 복합재료 및 혼합적층 사각판의 자유진동해석, 대한기계학회 논문집, 18(8), pp.1899~1909.  
 이운복, 이영신, 이세훈 (2005) 황동 개재물이 있는 AI 외팔형 정사각판의 자유진동해석, 한국소음진동공학회 논문집, 15(12), pp.1347~1354.  
 최명수 (2003) 유한요소-전달강성계수법을 이용한 평판구조물의 강제진동해석, 한국소음진동공학회 논문집, 13(2), 2003, pp.99~107.  
 Bucaro, J.A., Romano, A.J., Abraham, P.(2004) Detection and Localization of Inclusions in Plates Using Inversion of Point Actuated Surface Displacements, *The Journal of the Acoustical Society of America*, January, 115(1), pp.201~206.  
 Chang, D., Wang, G., Wereley, N.M.(2003) Analysis and Application of Extended Kantorovich-Krylov Method, *Applicable Analysis*, 82(7), pp.713~740.  
 Ercoli, L., Laura, P.A.A.(1992) Transverse Vibration of an Isotropic, Simply Supported Rectangular Plate with an Orthotropic Inclusion, *Journal of Sound and Vibration*, 153(2), pp.217~221.  
 Kohnke, P (1992) ANSYS User's Manual, Volume IV Theory, Swanson Analysis System, Inc.  
 Laura, P.A.A., Gutierrez, R.H.(1984) Transverse Vibrations of Orthotropic, Non-Homogeneous Rectangular Plate, *Fibre Science and Technology*, 21, pp.125~133.  
 R.D. Blevins (1979) Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold Company, New York, p.254.  
 R.F. Gibson (1994) Principles of Composite Material Mechanics, McGraw-Hill, Inc., pp.62~77.  
 Rajalingham, C., Bhat, R.B., Xistris, G.D. (1996) Closed Form Approximation of Vibration Modes of Rectangular Cantilever Plates by the Variational Reduction Method, *Journal of Sound and Vibration*, 197(3), pp.263~281.  
 S. P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger (1959) Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, Inc., pp.322~323.