

간격 유한요소해석을 이용한 구조물의 위상 최적화

Topology Optimization of Structures using Interval Finite Element Method

이 동 규† 신 수 미* 박 성 수**

Lee, Dong-Kyu Shin, Soo-Mi Park, Sung-Soo

(논문접수일 : 2006년 2월 6일 ; 심사종료일 : 2006년 10월 2일)

요 지

구조물의 최적 설계는 유한요소해석과 그것을 상용할 수 있는 컴퓨터 기술의 진보와 함께 발전해 오고 있다. 특히 위상 최적설계는 제한 조건들을 만족하는 구조물의 형상뿐만 아니라 최적 위상을 산출할 수 있다는 점에서 최근들어 많이 사용되고 있다. 일반적으로 유한요소해석은 영계수나 프와송 비와 같은 구조물의 재료특성 계수와 작용 하중 같은 변수들의 확정된 값을 가정하여 사용하나, 실제적으로 이러한 값들은 외부 환경의 영향이나 제조과정의 에러 등으로 인한 불확실성을 가진다. 따라서 정적 또는 동적인 구조응답 해석에서 다른 추이를 보일지도 모르며, 이는 구조물의 최적설계에도 영향을 미칠 수 있다. 본 논문에서는 구조물의 정적응답 해석에 대해 불확실성을 고려하는 간격 유한요소방법을 이용하여 구조물의 위상최적설계를 수행하고 그 해법을 제시하였다. 구조물의 최적설계 결과는 이전에 사용되었던 결과와 비교를 통하여 그 타당성을 입증하였다. 본 해석방법은 기존의 밀도분포법과 유한요소해석에 의한 위상설계와 비교하여 간단한 방법으로 선형 탄성 구조 응답의 불확실성을 고려하는 대체적인 구조물의 위상 최적결과를 예측할 수 있다.

핵심용어 : 위상최적화, 간격 유한요소해석, 밀도분포법, 불확실성

Abstract

Structural optimization design has been developed with finite element analysis using effective and fast computational technology. Especially topology optimization design has been recently often used since it yields an optimal topology as well as an optimal shape under satisfied constraints. In general in finite element analysis, it is assumed that the structural material properties such as Young's modulus and Poisson's ratio and the variable of applied loading are fixed with obvious values in structure. However practically these values may take uncertainties because of environmental effect or manufacturing error of structures. Therefore static or dynamic analysis of the structures may make an error, then finally it may have an influence on quality of optimal design.

In this study, the topology optimization design of structure is carried out using so called the interval finite element method, and the analysis method is proposed. The results are also validated by comparing with conventional topology optimization results of density distribution method and finite element analysis results. The present method can be used to predict the optimal topology of linear elastostatic structures with respect to structural uncertainty of behavior.

Keywords : topology optimization, interval finite element analysis, density distribution method, uncertainty

1. 서 론

항공기, 선박, 자동차와 더불어 토목이나 건축 구조물의 설계는 안전상 신뢰할 수 있는 강도 설계가 중요하다. 그러나 구조적인 안전을 명목으로 구조 설계과정에서 재료의 지나친 투입은 비경제적인 구조물을 생산한다. 특히 항공기나 자동차와 같은 구조물에서 재료의 경량화는 안전성과 더불어

하나의 중요한 구조 설계 목적이다. 이러한 개념은 설계영역에서 제약 조건하에 목적함수를 최소화하는 최적화 기법과 연관된다. 최적화의 제약조건은 구조물의 설계에 사용될 수 있는 질량이나 부피의 한계나 가능한 설계변수의 범위를 말한다. 목적함수는 구조물의 경량화를 위해 선형이나 비선형 구조물에서 정적 또는 동적 거동의 특성에 따라 다양하게 정의가 가능하다. 이를테면, 선형 정적 구조물에서 최소 단성

† 책임저자, 정회원 · 독일 슈투트가르트대학교 토목공학과 구조역학연구소
Tel: +49-0711-685-66126 ; Fax: +49-0711-685-66130
E-mail: lee@ibb.uni-stuttgart.de

* 부산대학교 건축학부 연구원

** 부산대학교 건축학부 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시며 2007년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

에너지 또는 최대 강성, 비선형 문제에서의 최소 좌굴이나, 동적 구조물에서 최소 고유진동수가 적용된다.

구조 최적화 문제는 치수(size), 형상(shape), 그리고 위상(topology) 최적화로 나누어진다. 치수 최적화는 국부적인 부재의 두께, 높이, 굽과 같은 설계변수를 가지며, 형상 최적화에서는 설계변수로서 변화하는 구조물 형상의 경계면 위에 존재하는 점들의 좌표를 적용한다. 이에 반해 위상 최적화는 재료 밀도로 표현되는 설계변수들의 최적 밀도 분포를 생산하여 전체 구조물의 관점에서 최적 형상뿐만 아니라 최적 위상까지 산출할 수 있다는 점에서 다른 방법들과 차별된다. 위상이라는 용어는 원래 수학에서 위상수학 또는 위상기하학에서 나온 말이다. 구조물에서의 위상 최적설계는 구조물내의 구멍의 개수와 위치, 영역간의 연결과 같은 형상결정의 문제로 정의될 수 있다(유정훈, 2003). 위상최적화 방법에서는 기본 구조물로서 모든 가능한 부재들을 배치시키고, 최적성(optimality criterion)을 이용하여 최적화에 필요 없는 부재들을 제거하는 레이아웃이론(layout theory)을 사용할 수 있다(Prager, 1974; Rozvany 등, 1991). 그리고 무수히 많은 미소한셀을 가지는 설계영역을 가지는 설계 영역 개념(design domain concept)은 위상최적화를 해결할 수 있는 또 하나의 방법이다. 설계 영역 내에서 주기적인 분포를 가지는 다공성 합성 재료들의 미소 구조가 허용되도록 공식화되는 균질화법(homogenization method)은 이의 성공적인 작업이다(Bendsøe 등, 1988). 그러나 무수한 다공성을 가지는 최적 구조물은 제조적인 관점에서 어려움을 가질 수 있다. 설계영역 개념의 또 다른 방법으로서 밀도와 재료 물성치 사이의 현시적인 관계성을 가정한 SIMP라고 불리는 밀도분포법(density distribution method)은 공학적인 관점에서 수치적 단순성 때문에 매우 효율적이다(Bendsøe, 1989; Mlejnek, 1992; Yang 등, 1994).

구조 최적화의 수행은 일반적으로 구조해석(structural analysis), 민감도 해석(sensitivity analysis)과 최적화방법(optimization method)의 순차적이고 반복적인 알고리즘으로 구성되는데, 여기서 구조해석은 정의된 구조물의 거동을 알아내는 단계로서 사용자의 선택에 따라 유한요소, 유한차분, 경계요소 방법 등의 해석도구를 선택하여 사용할 수 있으나 일반적으로 유한요소해석을 많이 이용하고 있다. 다음으로 민감도 해석단계는 최적 설계변수의 변분에 대한 목적함수의 변화율을 계산하고 최적화방법의 알고리즘에서는 이 값들을 직접적으로 적용하여 이전의 설계변수 값을 갱신시킨다.

구조 최적화의 이러한 순차적인 알고리즘으로부터 최적 해는 구조해석 단계에서 구조물 응답의 물리적인 정확성과 신뢰성을 기초로 함을 알 수 있으며 민감도 해석과 최적화방법은 단지 수치적인 기법으로서 수행된다. 구조해석은 유한요소를 가정한 근

사적인 수치 해이기 때문에 실제 정확한 해석적인 해와 비교했을 때 오차가 발생한다. 그리고 원칙적으로 구조물을 정의하는 영계수나 프와송 비와 같은 재료 매개변수와 구조물에 작용하는 하중 그리고 구조물의 치수와 같은 기하학적인 변수들에 오차가 존재하나, 일반적으로 이를 무시하여 계산하고 있다. 이러한 초기데이터들은 근본적으로 수치적인 불확실성을 내포하고 있기 때문에, 구조물의 응답 불확실성이나 구조 최적 설계에서 안전성과 경제성의 불확실성을 초래할 수 있다. 일반적으로 이러한 불확실성 문제는 확률에 의한 방법을 통해 수행된다(양영순 등, 1999). 확률적인 방법을 이용할 때 통계적인 자료가 불충분한 경우 실제로 변수 값을 결정하는데 어려움이 있다.

간격 산술(interval arithmetic)은 분기 한정법의 일종으로 통계적인 자료가 필요 없는 비확률적인 방법이며, 수치적인 오차범위를 가지는 변수들의 산술 연산이다. 이러한 개념은 근본적으로 함수, 미분 적분방정식, 최적화 같은 시스템의 수치적인 오차 해석에 적용된다(Moore, 1966). 최근에는 간격 산술법이 유한요소법에 접목되어 간단한 구조물의 불확실성 응답해석과 최적화에 적용할 수 있는 간격 유한요소방법(interval finite element method)이 소개되었다(Pownuk, 1999; Chen 등, 2000; 이동규 등, 2003).

본 논문에서는 구조물의 불확실성 응답에 의한 설계영역 개념의 밀도분포법의 위상최적화를 수행하였다. 불확실성 구조해석은 선형 정적 구조물에 대해 간격 유한요소해석을 적용한다. 기존의 유한요소해석을 바탕으로 하는 위상최적화 방법에 의한 결과와 비교하여, 초기 자료의 불확실성에 의한 구조물의 불확실성의 경향, 그에 따른 위상최적 결과의 영향을 분석하였다.

2. 위상 최적화 문제

2.1 최적화 문제의 정의와 민감도 해석

선형 탄성 구조물을 지배하는 설계영역 $\Omega_x \subseteq R^n$ 을 정의하면 장조건(field conditions)과 경계조건(boundary conditions)을 가지는 위상 최적화의 체계는 Fig.1과 같다.

$\Gamma = \partial\Omega_x = \Gamma_u \cup \Gamma_t \cup \Gamma_x$ 는 설계영역의 경계조건으로 각각 디리힐레트(Dirichlet), 노이만(Neumann), 마찰자유(traction free) 조건들을 형성한다. t_0 과 u_0 은 각각 초기 외력과 초기 작용변위, \bar{t} 와 \bar{u} 는 외력과 변위이다.

장조건은 균형방정식 $div\sigma + \bar{b} = 0$, 구성조건식 $\sigma = C\epsilon$, 그리고 운동학적 방정식 $\epsilon = Lu$ 을 가진다. 여기서, \bar{b} 는 물체력이고, 응력 σ 은 실제적인 변위에 의존한다. 재료 텐서 C 는 선형 탄성 구조물의 수치적 감차 과정에서 대칭 구조를 형성하므로 변위장 u 는 유일 해를 가진다. 변위는 미분 텐서 L 에

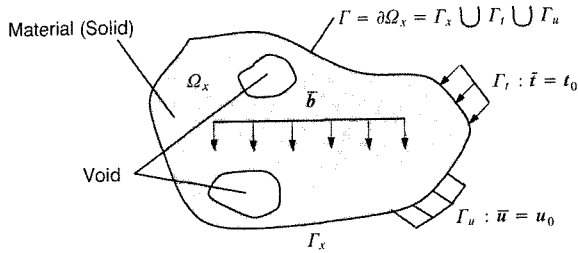


Fig.1 Schematic for topology optimization of structure with specified field and boundary conditions

의해 변형률 ϵ 을 생성한다.

가상일의 원리는 실제량의 변분인 가상변위 δu 와 변형률 $\delta \epsilon$ 을 고려하면 아래와 같이 정의된다.

$$\delta \omega(\delta u, u) = \delta \omega^i(\delta u, u) + \delta \omega^a(\delta u, u) = 0; \delta u, u \in U \quad (1)$$

여기서 $\delta \omega^i$ 과 $\delta \omega^a$ 는 각각 가상 내부일과 외부일이다.

Eq.(1)은 약 형식으로서 아래와 같은 힘의 평형 조건식을 만족한다.

$$\int_{\Omega_x} \delta \epsilon^T \sigma d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \delta u^T \bar{b} d\Omega_x + \int_{\Gamma_t} \delta u^T \bar{t} d\Gamma_t \quad (2)$$

위 식은 총 포텐셜 에너지가 허용 변위의 변분에 대해 정적 상태이어야 한다는 것을 말해주며, 안정적인 탄성 상태에서 최소화될 수 있다. 따라서 힘의 평형조건식의 약 형식은 총 포텐셜 에너지의 원리에 의해 다음 식과 같이 변분된다.

$$\text{Min} \Pi(u) \rightarrow \delta \Pi(u) = 0; \delta u, u \in U \quad (3)$$

최소 포텐셜 에너지의 원리를 이용하여 최적화의 목적함수로서 최소 변형률 에너지 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi(u) &= \Pi^i(u) + \Pi^a(u) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \epsilon^T C \epsilon d\Omega_x - \int_{\Omega_x} u^T \bar{b} d\Omega_x \\ &\quad - \int_{\Gamma_t} u^T \bar{t} d\Gamma_t = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \epsilon^T C \epsilon d\Omega_x \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 재료 텐서 C 는 평면응력 상태로서 설계영역이 유한요소로 감차될 때 위상최적화의 설계변수인 요소의 재료 밀도 $0 \leq \Phi_i \leq 1$ 을 포함한다.

최적화의 제약조건은 아래와 같이 일정한 부피 V_0 로서 투입되는 재료의 한계를 정의한다.

$$\int_{\Omega_x} d\Omega_x - V_0 = 0 \quad (5)$$

밀도분포법에 의하면 영계수는 전체 설계영역에서 균일한

것이 아니라 요소의 영계수 집단으로 표현된다. 요소의 영계수들은 설계변수인 요소밀도에 의존하여 요소의 강성에 영향을 미친다. 요소 영계수 E_i 와 밀도 Φ_i 와의 관계성은 다음과 같다.

$$E_i(\Phi_i) = E_0 \left(\frac{\Phi_i}{\Phi_0} \right)^k; 0 \leq \Phi_i, \Phi_0 \leq 1, i = \text{요소번호} \quad (6)$$

여기서, E_0 와 Φ_0 는 공칭 영계수와 공칭 요소밀도이며, k 는 벌칙 매개변수로서 일반적으로 1 이상의 값을 가진다.

벽체 구조물과 같은 평면응력의 등방성 재료를 가정하면 요소의 재료 텐서 C_i 는 Eq.(6)을 이용하여 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$C_i = \frac{E_i(\Phi_i)}{(1-\nu_0^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ \nu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_0}{2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서 ν_0 는 공칭 프와송 비를 나타낸다.

감차 과정에 의해 요소의 재료 텐서를 포함하는 목적함수 식으로서 최소 변형률 에너지는 다음과 같다.

$$\text{Min} f = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{요소수} \int_{\Omega_e} \epsilon^T C_e \epsilon d\Omega_e \quad (8)$$

연속적인 변위장은 최적 설계변수 s 에 의존하기 때문에 Eq.(8)에 정의된 목적함수 f 의 민감도는 명시적인(explicit) 편미분 항과 암시적인(implicit) 편미분 항으로 구성된다(Haug 등, 1986). 이로부터 총 편미분은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \epsilon^T \nabla_s C(\Phi) \epsilon d\Omega_x \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \epsilon^T C(\Phi) \nabla_u \epsilon \nabla_s u d\Omega_x \end{aligned} \quad (9)$$

연속적인 변위장의 민감도 $\nabla_s u$ 를 구하기 위해 힘의 평형 조건식 Eq.(2)을 미분하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_x} \delta u^T L^T C L \nabla_s u d\Omega_x &= \int_{\Omega_x} \delta u^T \nabla_s \bar{b} d\Omega_x \\ &\quad + \int_{\Gamma_t} \delta u^T \nabla_s \bar{t} d\Gamma_t - \int_{\Omega_x} \delta u^T \nabla_s L^T C L u d\Omega_x \\ &\quad - \int_{\Omega_x} \delta u^T L^T \nabla_s C L u d\Omega_x - \int_{\Omega_x} \delta u^T L^T C \nabla_s L u d\Omega_x \end{aligned} \quad (10)$$

$\nabla_s u$ 는 Eq.(10)에서 직접적으로 계산 될 수 있다. 하지만 변위장의 민감도는 계산을 위한 비용이 많이 요구되기 때문에 여기서는 이의 민감도 계산이 필요 없는 라그랑지 계수

γ 의 수반법(adjoint method)을 사용한다(Haug 등, 1986). 라그랑지 계수는 임의로 선택할 수 있는 변수이다. 그러므로 수치적으로 비용이 큰 연속적인 변위장의 민감도를 제거할 수 있는 특정한 라그랑지 계수 값을 적용할 수 있다.이로부터 감차과정에서 물체력 \bar{b} , 외력 \bar{t} , 미분 텐서 L , 야코비(Jacobi) 매트릭스는 설계변수에 의존하지 않는다는 가정에 의해, 설계변수에 대한 목적함수의 최종적인 편미분 감차식은 다음과 같다.

$$\nabla_s \tilde{f} = -\frac{1}{2} \sum_{e=1}^{요소수} \hat{u}^T \int_{\Omega_e} B_e^T \nabla_s C_e(\Phi) B_e d\Omega_e \hat{u}_e e \quad (11)$$

여기서, \hat{u}_e 는 절점 변위벡터, B_e 는 요소 연산 매트릭스, C_e 는 요소의 재료 텐서를 가리킨다.

3. 간격 유한요소해석(IFEM)

3.1 간격 연산법(Interval Arithmetic)

간격 연산법에서 오차와 불확실성은 간격으로 표시된다. 간격 벡터 $X^I = [X, \bar{X}]$, $I=1,2,\dots,n$ 의 중점 벡터 X^C 와 최대 오차 벡터 ΔX 는 다음 식과 같이 나타낸다.

$$X^C = \frac{(\bar{X} + X)}{2} \quad (12)$$

$$\Delta X = \frac{(\bar{X} - X)}{2} \quad (13)$$

여기서, \bar{X} 와 X 는 각각 간격 X^I 을 구성하는 상한 경계 값과 하한 경계값이다. 간격 벡터는 Eq.(12)와 (13)에 의해 다음과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$X^I = [X^C - \Delta X, X^C + \Delta X] \quad (14)$$

여기서 $\Delta X = \alpha X^C$ 이고, $\alpha \in R$ 는 허용오차이다. 간격 벡터는 행과 열로 구성되는 간격 매트릭스로 확장될 수 있다.

$A^I = [a, \bar{a}]$ 와 $B^I = [b, \bar{b}]$ 를 간격 변수로 가정하면 사칙연산은 다음 식으로 정의된다.

$$A^I + B^I = [a, \bar{a}] + [b, \bar{b}] = [a + b, \bar{a} + \bar{b}] \quad (15)$$

$$A^I - B^I = [a, \bar{a}] - [b, \bar{b}] = [a - \bar{b}, \bar{a} - b] \quad (16)$$

$$\begin{aligned} A^I \times B^I &= [a, \bar{a}] \times [b, \bar{b}] \\ &= [\min(a \cdot b, a \cdot \bar{b}, \bar{a} \cdot b, \bar{a} \cdot \bar{b}), \\ &\quad \max(a \cdot b, a \cdot \bar{b}, \bar{a} \cdot b, \bar{a} \cdot \bar{b})] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{A^I}{B^I} = \frac{[a, \bar{a}]}{[b, \bar{b}]} = [a, \bar{a}] \times \frac{1}{[b, \bar{b}]} \quad (18)$$

3.2 불확실성 강성방정식의 유도

본 연구에서는 등방성 재료의 평면응력 상태를 가지는 정적인 선형 탄성 구조물에 대해 수행한다. 유한요소는 4절점 정사각형 요소로 구성된다.

가상변위의 원리는 다음과 같은 전체 시스템의 힘의 평형 조건식을 유도한다.

$$\delta \hat{u}^T (K\hat{u} - \hat{P}) = 0 \rightarrow K\hat{u} = \hat{P} \quad (19)$$

유한요소 감차 과정에서 전체 강성 매트릭스 K 는 요소의 강성 매트릭스 K_e 의 조합으로 구성된다. 기지의 외력이나 물체력을 포함하는 전체 하중벡터 \hat{P} 는 기지의 절점변위와 함께 선형 지배방정식 내에서 확정된다. 이러한 조건하에서 미지의 요소 절점변위 \hat{u}_e 를 구성하는 전체 변위벡터 \hat{u} 가 계산된다. 이러한 수행은 유한 요소법을 기초로 한 구조응답 해석이다. 구조물의 불확실성 응답은 초기 자료의 불확실한 값의 특성에 기인한다. 그래서 초기 자료의 불확실성을 포함하는 요소 강성 매트릭스와 하중 벡터가 수정되어질 필요가 있다. 이는 비확률적인 방법인 간격 산술법에 의해 수행된다. 이러한 접근법을 유한 요소 해석에 간격 산술법이 조합되는 것으로 간격 유한 요소 해석이라고 부른다.

여기서 치수와 두께 같은 구조물의 기하학적 특성들은 확정적인 값이라고 가정하며, 강성 매트릭스를 구성하는 영계수와 프와송 비 그리고 물체력을 제외한 외부하중이 불확실성을 가진다. 이것들은 간격 연산법에 의해 다음 식과 같이 각각 나타낼 수 있다.

$$E_i = \left(\frac{\Phi_i}{\Phi_0} \right)^k [E_0^C - \alpha E_0^C, E_0^C + \alpha E_0^C] \quad (20)$$

$$v = [v_0^C - \beta v_0^C, v_0^C + \beta v_0^C] \quad (21)$$

$$P = [P_0^C - \lambda P_0^C, P_0^C + \lambda P_0^C] \quad (22)$$

여기서, P_0 는 공칭 외부 하중, i =요소 번호, $\alpha, \beta, \lambda \geq 0$ 는 허용 오차이다.

이러한 조건하에 불확실성 요소 강성 매트릭스는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_i = \left(\frac{\Phi_i}{\Phi_0} \right)^k \left[\frac{E_0^C - \alpha E_0^C}{1 - (\beta + 1)^2 (v_0^C)^2} \frac{E_0^C + \alpha E_0^C}{1 - (\beta - 1)^2 (v_0^C)^2} \right]$$

$$\times \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & k_7 & k_8 \\ \cdot & k_1 & k_8 & k_7 & k_6 & k_5 & k_4 & k_3 \\ \cdot & \cdot & k_1 & k_6 & k_5 & k_4 & k_3 & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & k_1 & k_8 & k_3 & k_2 & k_5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_1 & k_8 & k_7 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_1 & k_6 \\ sym. & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기서, 위 강성 매트릭스의 각 원소들은 다음과 같다

$$k_1 = \left[\frac{3 - (\beta + 1)v_0^C}{6}, \frac{3 + (\beta - 1)v_0^C}{6} \right] \quad (24)$$

$$k_2 = \left[\frac{1 - (\beta - 1)v_0^C}{8}, \frac{1 + (\beta + 1)v_0^C}{8} \right] \quad (25)$$

$$k_3 = \left[\frac{-3 - (\beta + 1)v_0^C}{12}, \frac{-3 + (\beta - 1)v_0^C}{12} \right] \quad (26)$$

$$k_4 = \left[\frac{-1 - 3(\beta - 1)v_0^C}{8}, \frac{-1 + 3(\beta + 1)v_0^C}{8} \right] \quad (27)$$

$$k_5 = \left[\frac{-1 - (\beta - 1)v_0^C}{12}, \frac{-1 + (\beta + 1)v_0^C}{12} \right] \quad (28)$$

$$k_6 = \left[\frac{-1 - (\beta + 1)v_0^C}{8}, \frac{-1 + (\beta - 1)v_0^C}{8} \right] \quad (29)$$

$$k_7 = \left[\frac{-(\beta - 1)v_0^C}{6}, \frac{(\beta + 1)v_0^C}{6} \right] \quad (30)$$

$$k_8 = \left[\frac{1 - 3(\beta + 1)v_0^C}{8}, \frac{1 + 3(\beta - 1)v_0^C}{8} \right] \quad (31)$$

불확실성 요소 강성 매트릭스는 구조 매개변수들의 불확실성을 고려했을 때 요소 강성이 가장 큰 경우와 작은 경우를 포함한다. 이것은 위상최적 알고리즘의 구조해석 부분에 사용되는 유한요소해석을 위해 적용된다. 산출된 구조해석 결

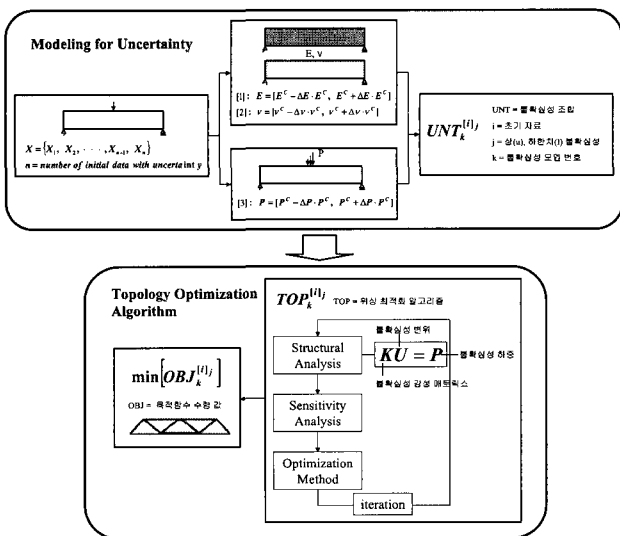


Fig.2 Algorithm of topology optimization using Interval finite element method

과는 상·하한치 값으로 나타나며 위상최적 결과에 직접적으로 영향을 미친다. 따라서 주어진 구조물의 불확실성에 대응하여 구조적으로 가장 우수하거나 가장 취약한 최적 위상을 산출할 수 있다.

3.3 간격유한요소법을 이용한 위상최적 알고리즘

본 연구에서 수행되는 간격 유한요소해석을 이용한 위상최적설계는 두 단계로 나누어진다. 우선 초기 자료들의 불확실성 모델을 불확실성(허용오차) 유무와 그 조합들로서 정의한다. 두 번째 단계로서 위상최적화 알고리즘이 구조해석, 민감도해석, 최적화방법을 거치며 순차적으로 수행된다. 이때 구조해석 부분에서 불확실성 구조응답이 발생하게 되며 이는 간격산술법에 의해 상·하한 경계값으로 표현된다. 최적화 알고리즘은 구조물의 역학적인 거동에 영향을 받기 때문에, 최종적인 위상최적 결과는 구조적으로 가장 안전한 위상과 가장 취약한 위상을 포함하는 사이 값들로 산출된다.

이러한 수행과정은 Fig.2의 알고리즘 흐름도로서 나타낼 수 있다.

4. 수치 예제

4.1 MBB 보 구조물의 위상최적화

첫 번째 예제로서 평면 응력 상태를 가지는 2차원 선형 탄성 문제의 MBB(Messerschmitt-Bolkow-Blohm) 보 구조물에 대한 위상최적화가 고려된다. 이 구조물의 형상과 정의는 Fig.3과 같이 나타낼 수 있다.

MBB 보 구조물은 길이 L과 높이 H의 비가 6:1로서 양쪽 단순지지 하에 보 상판의 중앙에 아래 방향의 집중하중을 받는 설계 조건을 가지고 있다. 이 구조물은 현재 위상최적 설계에 가장 범용적인 수치적인 예제로서 사용되고 있다. 여기서 MBB 보는 대칭 구조물이기 때문에 계산의 효율성을 위해 그

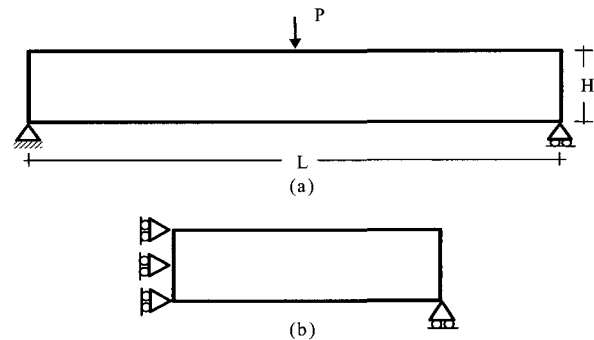


Fig.3 Geometry and definition of MBB-Beam structure: (a) MBB-Beam. (b) half MBB-Beam

것의 절반 구조물인 Fig.3(b)가 최적 설계에 수행된다. 그리고 설계영역(60cm×20cm)에서 60×20의 유한 요소가 감차된다. 이때 유한 요소는 위상 최적화의 설계변수인 요소밀도를 가진다. 이것은 요소 안에 균등하게 분포한다. 목적함수는 최소 변형률 에너지이며, 부피제약조건은 30%, 40%, 50%, 60%가 적용된다. 영계수, 프와송 비, 외부하중의 초기 자료 불확실성 오차는 모든 부피 제약조건들에 대해 5%가 사용되었다. 수치 계산의 단순성을 위해 공칭 영계수 $E_0 = 1.0 \text{ GPa}$, 공칭 프와송 비 $\nu_0 = 0.2$, 공칭 작용하중 $P_0 = 1.0 \text{ N}$ 이 적용된다.

밀도분포법에서 주어진 불확실성 내에서 벌칙 계수의 값이 작으면 최적위상의 변동이 작은 관계로, 기존의 위상최적 결과와 비교하여 간격유한요소법에 의한 구조물의 위상최적 결과에서 확연한 차이를 나타내기 위하여 수치적인 불안정성이 발생되지 않는 범위 내에서 $k = 5.0$ 값을 사용하였다.

위상최적화에서 국소적인 최소화나 매쉬 의존성과 더불어 단점으로 지적되어 온 체크보드(checkerboard)현상은 설계 영역 내에 밀도분포가 0과 1의 격자모양으로 분포되는 것을 말하며, 이것은 0과 1의 격자 사이에서 수치적인 불안정성을 유발한다. 이를 제거하기 위해 필터링 기법(filtering method)을 사용하였다(Sigmund, 2001). 이때 필터링 계수와 유효영역 반경은 각각 5.0과 1.5를 적용하였다. 이러한 설계 조건들의 가정 하에, 초기 자료들의 불확실성을 가지는 위상 최적구조물의 특성을 기존의 최적구조물과 비교 분석하였다.

Fig.4는 부피제약 조건 50%를 가지는 밀도분포법을 이용했을 때, 영계수, 프와송비, 외부하중의 초기 자료 불확실성(5%)에 따른 목적함수 값(N·m)의 수렴성 변화 추이를 보여준다. 위상최적화의 수렴 정도는 상·하한치의 경계 곡선으로서 나타나는 불확실성을 가짐을 알 수 있다. 제한된 재료 물량을 가지고 최대강성을 만족하는 구조물을 설계해야하는

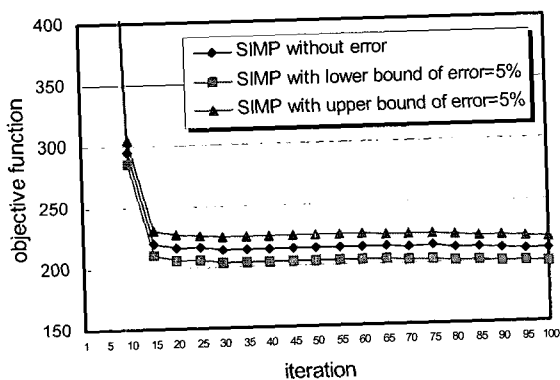


Fig.4 History of convergence in SIMP with volume =50%: SIMP without error, SIMP with lower bound of error=5%, SIMP with upper bound of error=5%

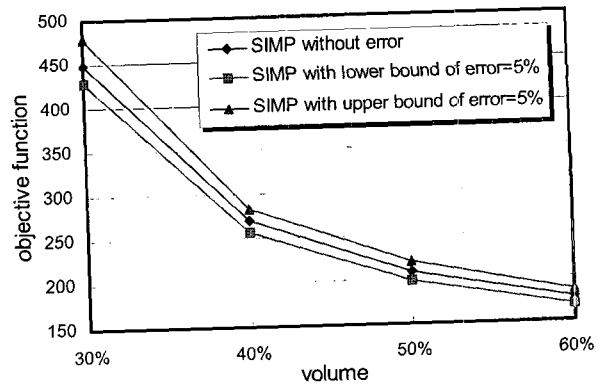


Fig.5 Converged objective function values in SIMP with different volume=30%, 40%, 50%, and 60%: SIMP without error, SIMP with lower bound of error=5%, SIMP with upper bound of error=5%

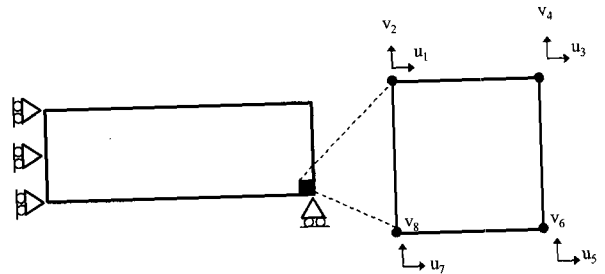


Fig.6 Nodal displacements of a finite element on the right edge in half-MBB-Beam

최적화의 개념을 고려한다면, 하한치 경계를 이루며 수렴하는 변형률 에너지 추이곡선은 가장 위험한 구조적 안정성에 대비한 가장 우수한 위상최적 구조물을 생산한다. 만약, 상한치 경계곡선의 최적 구조물을 산출했다면, 이 구조물은 추후에 발생할 지도 모르는 초기 자료들의 불확실성으로 인해 안전성 측면에서 가장 위험한 하한치 경계곡선의 추이에는 대비할 수 없다. 그러므로 실제 최적 설계에서 목적함수가 이처럼 최소 변형률 에너지인 경우, 하한치 수렴 곡선을 가지는 최적 설계가 채택되어야 함을 알 수 있다.

제약 조건으로서 구조물 설계에서 허용되는 부피의 양은 목적 함수의 수렴성 정도를 결정한다. 이를테면, 적은 물량을 투입할 때 수렴되는 변형률 에너지 값은 많은 물량에서보다 크다. 이것은 적은 재료물량을 가지는 최적 구조물은 강성적인 측면에서 취약함을 의미한다. 다양한 부피 제약조건들을 적용했을 때 수렴되는 변형률 에너지 값은 Fig.5와 같다. 초기 자료들의 불확실성에 의한 위상최적결과와 불확실성은, 큰 부피제약조건 일수록 초기 자료 불확실성의 의존성 정도가 감소되는 것을 알 수 있다.

최적화 수행 시에 Fig.6에서 정의된 유한요소 절점변위 (mm)의 수렴성은 Fig.7로 나타낼 수 있다. 여기서 요소의

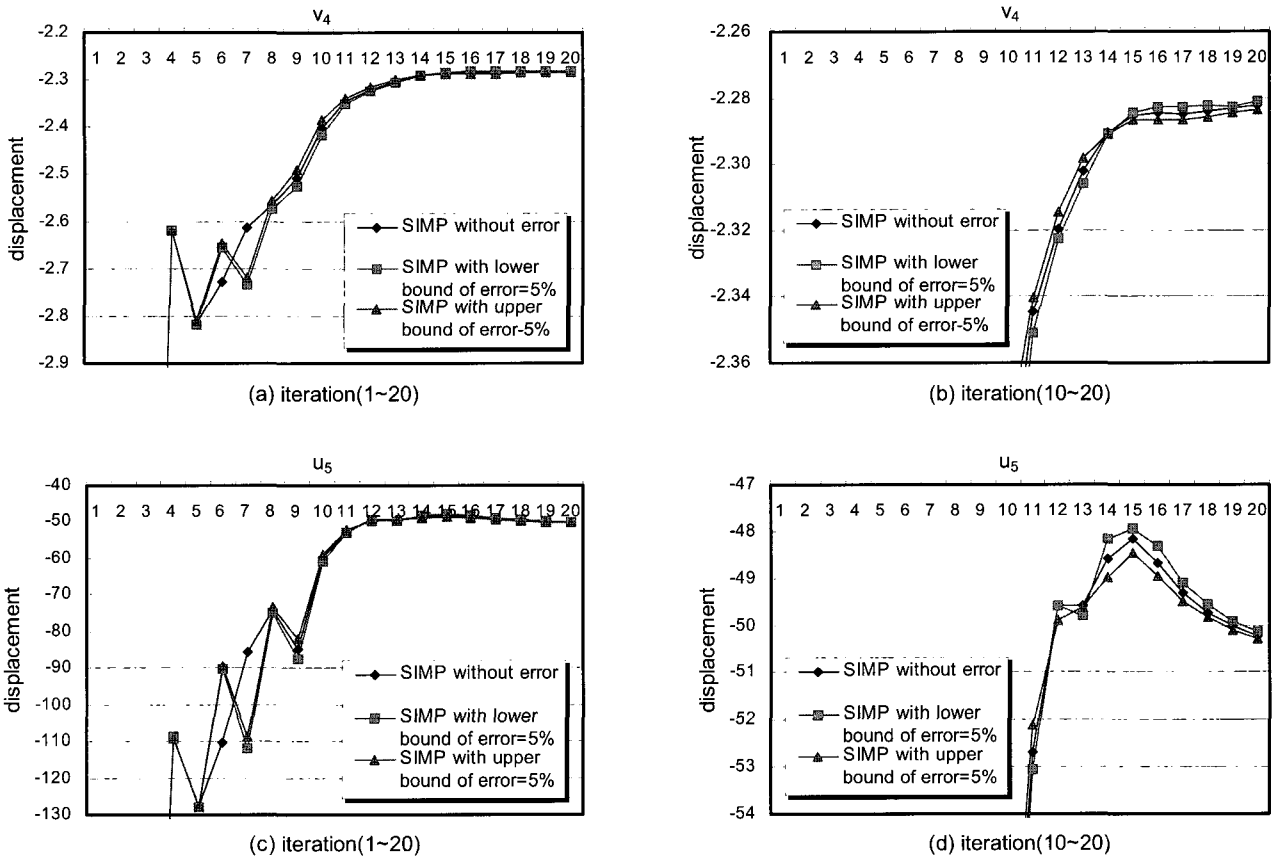


Fig.7 History of convergence of displacement value in SIMP with volume=50%: SIMP without error, SIMP with lower bound of error=5%, SIMP with upper bound of error=5%. (a),(b) are vertical displacement v_4 . (c),(d) are horizontal displacement u_5

절점변위로서, 수직변위 v_4 와 수평변위 u_5 의 수렴성이 조사되었다. Fig.7(a)와 (c)는 기존의 위상 최적화와 불확실성을 고려한 위상최적화들의 전체적인 수렴성 추이를 나타내기 위하여 도시된 것이며, Fig.7(b)와 (d)는 수렴 단계부분을 확대하여 상, 하한치 수렴 변화 특성을 나타낸 것이다.

초기 자료들의 불확실성을 가지는 위상최적화는 불확실성을 고려하지 않는 기존의 위상최적화 결과처럼, 절점변위 곡선의 수렴성을 보인다. 이것은 Fig.4에서 나타나는 변형률 에너지 곡선의 수렴성 추이와 유사하다. 최적화의 반복횟수가 10을 넘어서부터 절점변위의 하한과 상한치 곡선이 역전 형상을 일으킨다. 이것은 Fig.4에서 보이는 초기 자료의 하한치 경계 값으로 인해 하한치 최적 수렴 값을 가지기 위해서, 그것의 변위 절대 값이 작아야 함을 의미한다. 일반적으로 변형률 에너지 값은 변위 값의 제곱에 비례하기 때문이다. Fig.7(b)과 (d)에 의하면, 수직변위 절대 값의 경우 수렴곡선은 점차적으로 감소하는 점근적인 근사성을 보이는 반면, 수평변위 절대 값은 반복횟수가 15를 넘어서면서 점차적으로 증가하여 수렴하는 근사성을 보인다.

Fig.8은 부피제약조건이 30%일 때, 초기 자료들의 불확실

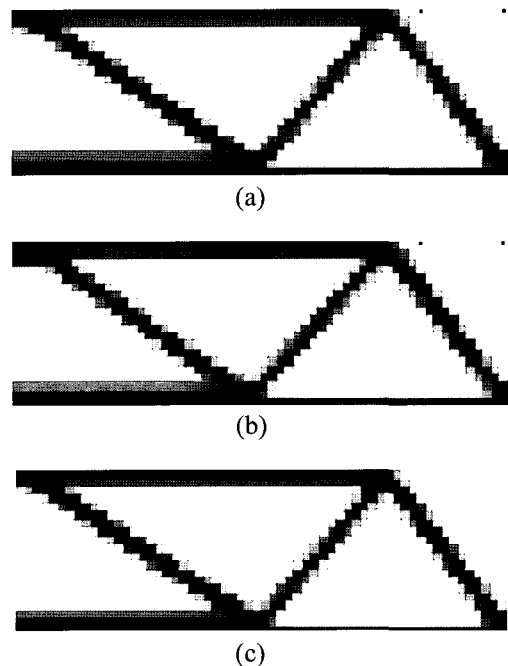


Fig.8 Optimal topology and shape as density distributions in SIMP with volume=30%: (a) SIMP without error, (b) SIMP with lower bound of error=5%, (c) SIMP with upper bound of error=5%

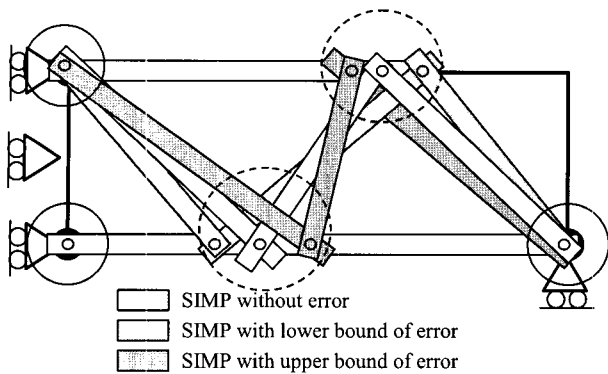


Fig.9 Topology of structure by uncertainty of initial data

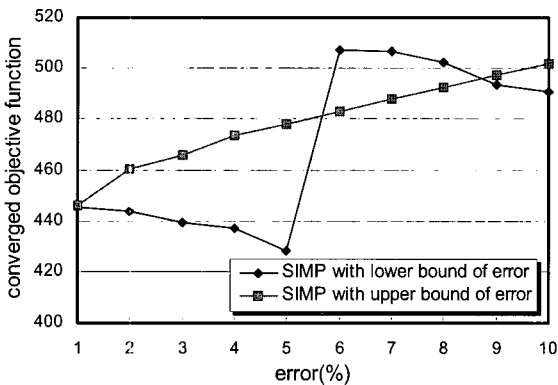


Fig.10 Converged objective function values by changes of error (1~10%) with lower and upper bound in volume constraint=30%

성을 적용한 것과 아닌 경우에 산출되는 위상최적 구조물의 재료 밀도 분포를 나타낸 것이다. Fig.8(a)는 초기 자료들의 불확실성을 고려하지 않는 경우, (b)는 초기 자료들의 불확실성 하한치 경계를, (c)는 상한 경계치를 적용한 경우의 최적 재료 분포들이다. 다음 그림에서, 초기 자료들의 불확실성을 고려하는 최적 구조물은 구조물의 위상, 즉 구조 부재들 간의 연결성은, 불확실성이 없는 기존의 해와 비교하여 동일하나, 구조 부재들 접합부의 위치에서 변화가 있음을 알 수 있다.

이것을 보다 분명하게 도식적으로 표현하면 Fig.9와 같다. Fig.9에서 실선 원 부분은 경계조건에 의하여 부재의 연결성이 확정된 반면, 점선 원 부분은 구조물의 불확실성 정도에 따라 접합부의 위치에 변동을 일으킨다. 일반적으로 구조물에서 접합부는 부재들 자체보다 구조적으로 취약하기 때문에 구조 설계 시에 많은 주의가 요구된다. 접합부의 적합한 재료적 특성이나 강성에 의한 구조물에서의 최적 배치는 가장 민감하고 중요한 구조 설계과정 중의 하나이다.

Fig.9에 의하면, 불확실성을 고려하지 않는 구조물의 최적 위상은 부재의 접합부 설계를 위한 정보를 다 포함한다고 볼 수 없다. 최소 변형을 에너지를 가져야 하는 최적 설계개념에 의하면, Fig.4에서 처럼 오차의 하한 경계치를 가지는 초기

자료 정의를 사용한 위상최적화의 결과가 신뢰할 수 있는 구조 안정성 측면에서 가장 우수함을 알 수 있다. 부피제약 조건이 30%일 때 이것의 최적위상 결과는 Fig.8(b)와 같다.

Fig.10은 부피제약조건 30%에서 초기자료들의 불확실성 오차가 1%에서 10%까지 변할 때 상·하한 경계 수렴값들의 변화 추이를 나타낸다. 불확실성이 5%가 넘어서면 상·하한 경계 수렴 값이 바뀌는 양상을 보인다. 이것은 초기 자료들의 상·하한 경계 불확실성이 목적함수의 상·하한 수렴 값에 그대로 적용되지 않으며, 초기 자료들의 불확실성 하한치 값이 목적함수의 상한치 경계 값을 생산할 수도 있음을 제시한다. 즉, 목적함수의 상·하한치의 결정은 초기 자료의 불확실성 정도에 의존한다.

4.2 Michell 트러스교 구조물의 위상최적화

두 번째 예제로서 Fig.11과 같은 선형 탄성 문제의 Michell 트러스교 구조물에 대한 위상최적화가 고려된다. 길이 L과 높이 H의 비는 2:1로서 가정하며, 양쪽 단순지지 하에 중앙 하판에 집중하중을 받는 설계 조건을 가진다. Michell 트러스교 구조물은 최대 인장력과 압축력에 대응하는 최적 배열을 형성하기 위해서 각 부재들은 직교성을 가지고 배치되어야 한다. 이것은 오늘날 MBB 보 구조물과 함께 최적화의 해를 검증하기 위해 범용적으로 사용되고 있다.

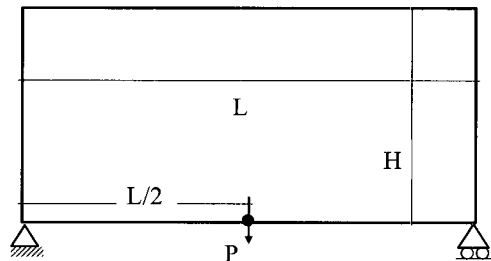


Fig.11 Problem definition of Michell truss-bridge structure

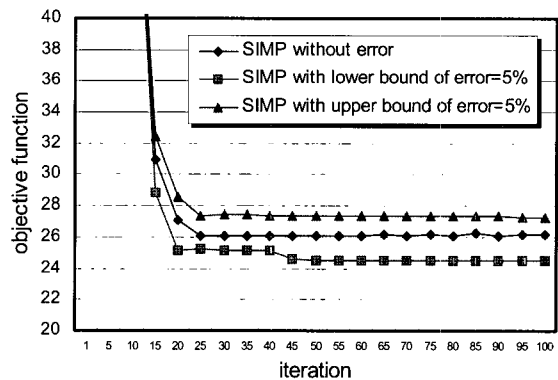


Fig.12 History of convergence in SIMP with volume=30%: SIMP without error, SIMP with lower bound of error=5%, SIMP with upper bound of error=5%

수치적인 계산을 위해 연속체 구조물의 감차가 요구되며, 설계영역(80cm×40cm) 안에 80×40의 유한 요소가 적용된다. 목적함수는 최소 변형을 에너지이며, 부피제약조건은 30%가 적용된다. 영계수, 프와송 비, 외부하중의 초기 자료 불확실성 오차는 5%가 사용되었다. 이들의 공칭 값은 4.1장의 보 구조물 예제와 같은 $E_0 = 1.0GPa$, $\nu_0 = 0.2$, $P_0 = 1.0N$ 을 적용한다. MBB 보 구조물의 예제와 마찬가지로 벌칙 계수 $k = 5.0$ 의 밀도분포법이 적용된다. 체크보드 현상을 제거하기 위해 필터링 기법을 사용하였다. 부피제약조건이 30%일 때 목적함수 ($N \cdot m$)의 수렴곡선은 Fig.12와 같다.

Michell 트러스교 구조물의 위상과 형상에 대한 최종적인 최적 재료 분포는 Fig.13과 같다.

Fig.12의 하한치 경계 수렴곡선은 구조물의 불확실성을 고려한 최적의 구조설계를 생산한다.

이러한 최적 결과들에 따라 구조물을 구성하는 부재들 접합부 배치를 도식적으로 표현하면 Fig.14와 같다. 실선 원의 설계영역은 하중이나 변위의 경계조건에 의해 불변의 위상을 나타내는 반면, 점선 원의 부분은 구조응답의 불확실성에 따라 확정적이지 않은 위상을 보인다.

Fig.15는 부피제약조건 30%에서 초기자료들의 불확실성 오차가 1%에서 10%까지 변할 때 상·하한 경계 수렴 값들

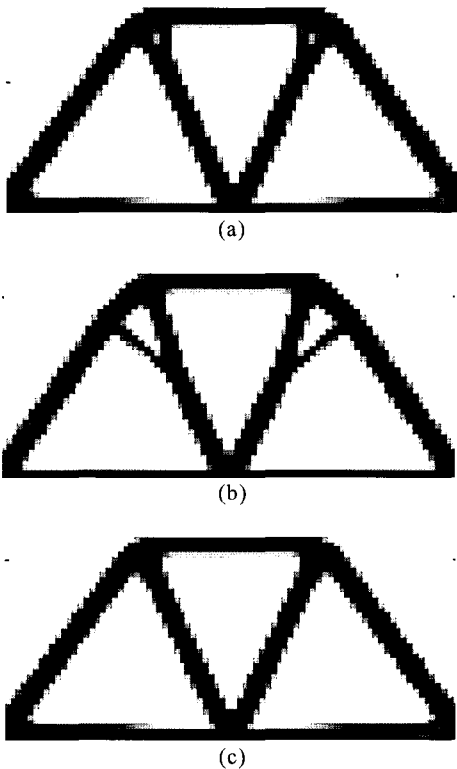


Fig.13 Optimal topology and shape as density distributions in SIMP with volume=30%: (a) SIMP without error, (b) SIMP with lower bound of error=5%, (c) SIMP with upper bound of error=5%

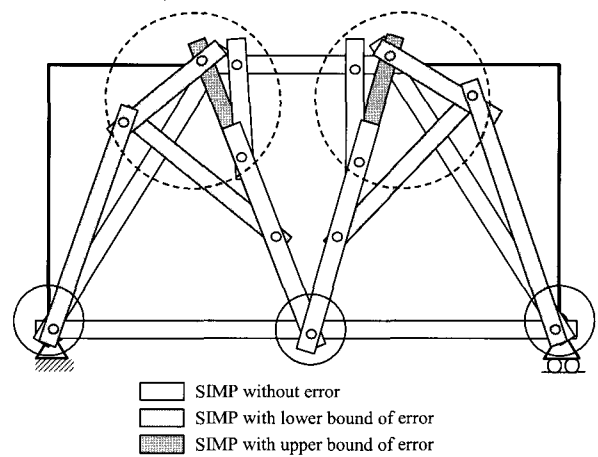


Fig.14 Topology of structure by uncertainty of initial data

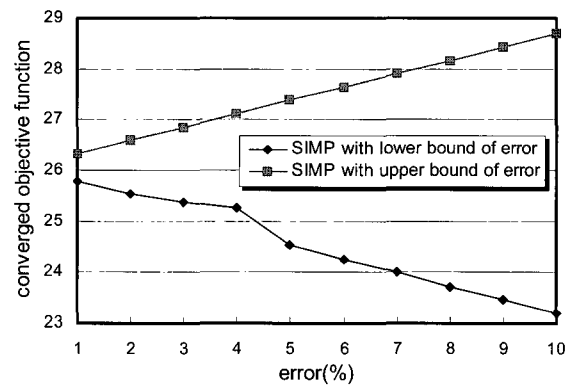


Fig.15 Converged objective function values by changes of error (1~10%) with lower and upper bound in volume constraint=30%

의 변화 추이를 나타낸다. 불확실성이 증가할수록 상·하한 경계 수렴 값의 차이가 점점 커지는 양상을 보인다. 이것은 Fig.10에서 보인 결과인 불확실성이 5%까지는 Fig.15와 유사한 곡선을 그리다가, 5%이상 일때 상·하한치 수렴 값의 차이가 줄어들다가 다시 늘어나는 것과 상이하다. Fig.15에 의하면 주어진 불확실성 정도에 따라 하한 경계치로 수렴하는 최적 위상이 구조물의 안전적인 측면에서 가장 신뢰할 수 있는 최적결과임을 나타낸다.

5. 결 론

본 연구를 통하여, 구조물에 작용하는 하중, 프와송비, 영계수 등과 같은 초기 자료들의 불확실성 문제는 구조물의 설계 시에 최적 구조물의 위상과 형상에 영향을 미침을 알 수 있다.

특히 부재들 간의 접합부는 구조 설계 시에 안전과 신뢰성을 요하는 부분이지만, 초기 자료의 불확실성과 그로 인해 야기되는 구조응답의 불확실성은 위상최적설계 시에 최적 접합부 위치의 이동을 초래한다. 그러므로 불확실성을 고려하

지 않는 최적 설계는 안전성과 경제성을 동시에 가진다고 볼 수 없다. 이를테면, 구조 응답의 불확실성에 의해 생성되는 위상 최적 설계가 하한치 경계로 목적함수 값이 수렴한다면, 이에 의한 최적 구조물은 최소 변형률을 가지기 때문에 제한된 재료물량 하에 불확실성에 대응할 수 있는 실질적인 최적 설계가 된다. 이에 준하는 구조 부재들의 접합 위치 및 상태가 최적이라고 볼 수 있다.

본 연구에서 제시된 간격 산술법을 이용한 유한 요소 해석은 최적화를 수행하기 위해 이전에 시도되지 않았던 것으로, 초기 자료들의 불확실성을 비확률적인 방법으로 해석하는 효율적인 수치기법이다. 이들 해석결과는 MBB 보와 Michell 트러스교 구조물의 위상최적화 수치 예제를 통하여 그 타당성을 입증하였다.

본 연구를 통하여 다음과 같은 추가적인 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 이전의 연구(이동규 등, 2003)에서 제시된 구조응답의 불확실성이 초기 자료들의 불확실성에 비례하는 것으로 보아, 구조 응답해석을 포함하는 위상최적화 알고리즘에서 결론적으로 초기 자료들의 불확실성이 커질수록 위상 최적 구조물의 불확실성도 커짐을 예측할 수 있다.
- 2) 부피 제약조건이 커지면, 위상 최적 구조물의 불확실성이 줄어든다. 재료 투입량의 경제성에 근거한다면, 일반적으로 부피제약조건 값은 작아야 한다. 그러나 이에 반비례하여 위상 최적 구조물의 불확실성은 점점 커진다. 이러한 점은 구조 설계 시에 불확실성 문제를 반드시 다루어야 하는 필요성을 부여한다.
- 3) 불확실성 초기 자료들의 하한치 경계 값은 일반적으로 Fig.15에서 처럼 위상최적 시에 목적함수 값의 하한치 수렴성을 생산하지만, Fig.10의 결과에 의하면 초기 자료들의 불확실성이 커지면 반드시 하한치 수렴성을 가지지는 않는 역전 현상이 발생 할 수 있다. 이것으로부터 위상최적 결과의 불확실성은 초기 자료의 불확실성 정도에 절대적으로 의존함을 알 수 있다.
- 4) Fig.10과 Fig.15에서 초기자료들의 불확실성이 커질수록 상한치 경계 값을 가지는 목적함수 즉 최소 변형률 에너지의 수렴 값은 커짐을 알 수 있다.
- 5) 3)과 4)의 특성으로부터 불확실성을 고려하는 가장 안전한 구조물 설계를 얻기 위해서는 목적함수의 정량적인 상·하한치 수렴 값 비교 분석이 필요함을 알 수 있다. 특히 목적함수(최소 변형률 에너지)의 하한치 경계 값을 가지는 최적 구조물은 강성이 가장 큰 구조물이며 어떠한 불확실성에도 대처 가능하기 때문에 구조적으로 안전한 최적 설계 결과로서 사용될 수 있다.

참 고 문 헌

- 이동규, 신수미, 박성수 (2003) 平面트러스 構造物의 不確實性 構造 應答에 關한 研究, 대한건축학회 논문집 19(6), pp.45~52.
- 서용석, 양영순, 이재욱 (1999) 구조 신뢰성 공학, 서울대학교 출판부.
- 유정훈 (2003) 구조물의 위상최적설계에 대한 고찰, 한국전산구조공학회 학회지, 16(1), pp.77~85.
- Bendsøe, M.P. (1989) Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem, *Structural Optimization*, 1, pp.193~202.
- Bendsøe, M.P., Kikuchi, N. (1988) Generating Optimal Topologies in Optimal Design using a Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71; pp.197~224.
- Chang, C., Yang, R. (1994) Optimal Topology Design using Linear Programming, *Computers and Structures*, 52, pp.265~275.
- Chen, S.H., Yang, X.W. (2000) Interval finite element method for beam structures, *Finite Elements in Analysis and Design*, 34, pp.75~88.
- Choi, K.K., Haug, E.J., Komkov, V. (1986) Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, Academic Press, Orlando, New York.
- Mlejnek, H.P. (1992) Some Aspects of the Genesis of Structures, *Structural Optimization*, 5, pp.64~69.
- Moore, R.E. (1966) Interval Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliff, N.J.
- Pownuk, A. (2000) Optimization of Mechanical Structures using Interval Analysis, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Science*, 7(4), pp.551~558.
- Prager, W. (1974) A Note on Discretized Michell Structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3, pp.349~355.
- Rozvany, G.I.N., Zhou, M. (1991) COC Algorithm, Part I: Cross Section Optimization or Sizing; Part II: Topological, Geometrical and Generalized Shape Optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89, pp.281~336.
- Schmit, L.A. (1960) Structural Design by Systematic Synthesis, Processing of 2nd ASCE, *Electronic Computation*, ASCE, New York.
- Sigmund, O. (2001) A 99 line topology optimization code written in Matlab, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21, pp.120~127.