

불규칙 매개변수 가진을 받는 비선형계의 확률론적 진동평가

이 신 영[#]

Vibration of Non-linear System under Random Parametric Excitations by Probabilistic Method

Sin-Young Lee[#]

ABSTRACT

Vibration of a non-linear system under random parametric excitations was evaluated by probabilistic methods. The non-linear characteristic terms of a system structure were quasi-linearized and excitation terms were remained as they were. An analytical method where the square mean of error was minimized was used. An alternative method was an energy method where the damping energy and restoring energy of the linearized system were equalized to those of the original non-linear system. The numerical results were compared with those obtained by Monte Carlo simulation. The comparison showed the results obtained by Monte Carlo simulation located between those by the analytical method and those by the energy method.

Key Words : Nonlinear system (비선형 시스템), Parametric excitation (변수 가진), Probabilistic method (확률론적 방법), Square of mean of error (오차제곱평균), Monte Carlo simulation (몬테카를로 시뮬레이션)

기호설명

1. 서론

K_{η} : spectral density of a white noise $\eta(t)$

$B(t)$: unit Wiener process

m : mean or moment

σ : variance

$E[\cdot]$: expectation value

\mathcal{F} : Fourier transformation

변동하는 외부 가진력에 대한 기계 및 구조 시스템의 진동 응답을 예측하는 방법은 설계 분야에서 중요성이 증가되고 있다. 구조물의 중량과 비용을 감소하며 기계, 엔진, 자동차의 중량대비 동력 비율을 증가하려는 계속적인 경향은 더욱 진동응답 레벨을 예측할 필요가 있도록 한다.¹ 실제의 많은 경우 구조의 특성과 가진 특성에 불규칙성이 포함

^{1st} 접수일: 2006년 5월 20일; 게재승인일: 2006년 10월 11일
[#] 교신저자: 군산대학교 기계공학부
 E-mail: sinylee@kunsan.ac.kr Tel. (063) 469-4716

되어 있으므로 이러한 비선형의 경우에 대한 구조물의 동적 응답 해석과 신뢰성 평가에 대한 필요가 증가되어져 오고 있다.^{2,3}

Yun⁴은 기하학적 비선형성과 축변형, 굽힘 변형 등을 포함하는 비선형 유연 보의 정식화에 대하여 연구하였으며, Cho⁵는 확률론적 방법을 사용하여 지반에 광대역 불규칙 가진력을 받는 경우에 내부 공진 효과로 인한 비선형 현상을 조사하였다.

통계적 선형화의 기본 아이디어는 비선형 시스템을 그것과 비슷한 거동을 하는 등가 선형 시스템으로 대체하는 것이다. To⁶에 의하면 본질적으로 이 방법은 결정론적 선형화 방법을 일반화한 것이다. 오차를 최소화하기 위하여 일반적으로 사용하는 기준은 오차 과정의 제곱 평균을 최소화하는 것이다. 이 기준으로부터 선형화 시스템의 매개 변수를 구할 수 있다.^{6,7}

통계적 선형화의 두 가지 기본 가정은 해가 Gauss 분포를 따르고, 시스템이 등가 선형 시스템으로 근사화 될 수 있다는 것이다. 첫 번째 가정은 물론 일반적인 비선형 시스템에 의해 만족되지 않는 반면, 둘째 가정은 불규칙 가진의 강도와 비선형성이 작은 것을 의미한다. 이 두 가지 가정이 기본적으로 부합되는 한 통계적 선형화에 의한 해는 적용 가능하고 유일하다.⁶⁻⁹

본 논문에서는 시스템의 응답 특성에 주요한 영향을 미치는 변수 가진이 작용하는 경우에 근사해를 구하는 과정에 대하여 연구한다. 시스템 전체가 아닌 일부를 선형화하는 준선형화 방법에 의하여 비선형 감쇠 및 비선형 강성을 선형화하였다. 변수 가진 항은 선형화하지 않으며, 통계적 적률에 의하여 진동 문제를 해석하였다. Ito의 미분규칙⁷을 사용하여 해석 절차를 진행하였으며 적분변환에 의하여 스펙트럼 밀도함수를 구하였다. 준선형화 계수를 구하는 것이 필요하며, 이를 위하여 본 논문에서는 원래의 비선형 시스템과 준선형화 시스템의 오차 제곱의 기댓값을 최소로 하는 방법을 사용하였다. 본 방법에 의하여 구한 해와 몬테카를로 시뮬레이션에 의하여 구한 해를 비교한 결과 약간의 차이를 나타내었으며, 대안으로써 원래의 비선형 시스템과 준선형화 시스템의 감쇠 에너지 및 탄성 에너지를 등치시키는 방법을 사용하였다. 몬테카를로 시뮬레이션의 결과는 강한 비선형성을 갖는 경우에도 이 두 가지 해석적 방법에 의하여 구한 해들 사이에 위치하였다.

2. 비선형 시스템의 준선형화

일반적인 비선형 시스템이 매개변수 가진을 받는 경우의 방정식은 식 (1)과 같다.^{7, 10}

$$\ddot{Y}_j(t) + h_j \{ Y(t), \dot{Y}(t) \} = \xi_j(t) + \sum_{i=1}^n [a_{ji} \dot{Y}_i(t) \eta_i(t) + b_{ji} Y_i(t) \gamma_i(t)] \quad (1)$$

본 연구에서는 다음의 식 (2)와 같은 비선형 감쇠와 강성을 갖는 시스템에 대하여 해석한다.

$$\ddot{Y} + 2a_1 \dot{Y} + \lambda \dot{Y}^3 + \Omega_1^2 Y + \delta Y^3 = Y_n(t) + Y_\gamma(t) + \xi(t) \quad (2)$$

Gauss 백색 잡음 $\eta(t)$, $\gamma(t)$ 및 $\xi(t)$ 의 스펙트럼 밀도가 각각 $K_{\eta\eta}$, $K_{\gamma\gamma}$ 및 $K_{\xi\xi}$ 이고, 세 가지 가진은 편의상 서로 연관되지 않는다고 가정한다. 비선형 시스템 (2)는 다음과 같은 등가 준선형계로 대체할 수 있다.

$$\ddot{Y} + 2a \dot{Y} + \Omega^2 Y = \dot{Y} n(t) + Y_\gamma(t) + \xi(t) \quad (3)$$

여기에서 a 와 Ω 는 등가 선형화계수(equivalent linearization coefficients)이다. $X_1 = Y$, $X_2 = \dot{Y}$ 이라고 하면, 식 (3)에서 Ito 통계학적 방정식이 유도된다.⁷ 임의의 Markov 과정 $W(t)$ 는

$$dW(t) = m(W, t)dt + \sigma(W, t)dB(t) \quad (4)$$

여기에서 $B(t)$ 는 단위 Wiener과정(unit Wiener process)이고,

$$E[dB(t_1)dB(t_2)] = \begin{cases} 0, & t_1 \neq t_2 \\ dt, & t_1 = t_2 = t \end{cases} \quad (5)$$

X_1 에 대하여 계산하면

$$m_1(X, t) = X_2 \\ \sigma_1^2(X, t) = 0$$

X_2 에 대하여 계산하면

$$m_2(X, t) = -2\alpha X_2 - \Omega^2 X_1 + \pi K_{nn} X_2$$

$$\sigma_2^2(X, t) = 2\pi (K_{nn} X_2^2 + K_{vy} X_1^2 + K_{\xi\xi})$$

종합하면

$$dX_1 = X_2 dt, \quad (6)$$

$$dX_2 = (-2\alpha X_2 + \pi K_{nn} X_2 - \Omega^2 X_1) dt$$

$$+ [2\pi (K_{vy} X_1^2 + K_{nn} X_2^2 + K_{\xi\xi})]^{1/2} dB(t) \quad (7)$$

Ito의 통계학적 미분규칙은 다음과 같다. p 차 적률을 m_{ij} 이라고 하면,

$$m_{ij}(X) = X_1^i X_2^j, \quad p = i + j \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} E[m_{ij}] = E \left[X_2 \frac{\partial m_{ij}}{\partial X_1} \right.$$

$$+ (-2\alpha X_2 + \pi K_{nn} X_2 - \Omega^2 X_1) \frac{\partial m_{ij}}{\partial X_2}$$

$$\left. + \pi (K_{vy} X_1^2 + K_{nn} X_2^2 + K_{\xi\xi}) \frac{\partial^2 m_{ij}}{\partial X_2^2} \right] \quad (9)$$

통계학적 미분규칙을 사용하여 2차 적률에 대한 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dm_{20}}{dt} = 2m_{11} \quad (10)$$

$$\frac{dm_{11}}{dt} = m_{02} - \Omega^2 m_{20} - (2\alpha - \pi K_{nn}) m_{11} \quad (11)$$

$$\frac{dm_{02}}{dt} = -2\Omega^2 m_{11} - 2(2\alpha - \pi K_{nn}) m_{02}$$

$$+ 2\pi (K_{vy} m_{20} + K_{nn} m_{02} + K_{\xi\xi}) \quad (12)$$

식 (10)~(12)의 정상 상태 해는

$$m_{20} = \frac{\pi K_{\xi\xi}}{2\Omega^2(\alpha - \pi K_{nn}) - \pi K_{vy}},$$

$$m_{02} = \Omega^2 m_{20}, \quad m_{11} = 0 \quad (13)$$

식 (13)이 유효할 조건은

$$\alpha > \pi K_{nn}, \quad 2\Omega^2(\alpha - \pi K_{nn}) > \pi K_{vy} \quad (14)$$

이것은 준선형 시스템 (3)의 2차 적률에 대한 안정 조건이다. 그러나 원래의 시스템 (2)에서 비선형계수 λ 와 δ 가 모두 양이면, 시스템 (2)는 모든 차수의 적률에서 안정이다. 이 경우, 준선형 시스템 (3) 역시 안정이고, 식 (14)의 조건은 만족된다고 본다.

같은 절차를 사용하여, 4차 정상 적률을 구하면 다음과 같다.

$$m_{40} = \frac{3\pi K_{\xi\xi} m_{20}}{\Delta m} [2\Omega^2 + 3A_{23}(\alpha - 2\pi K_{nn})]$$

$$m_{31} = 0$$

$$m_{22} = \frac{\Omega^2}{3} m_{40} \quad (15)$$

$$m_{13} = \frac{2}{3} (\alpha - \pi K_{nn}) \Omega^2 m_{40} - \pi K_{vy} m_{40}$$

$$- \pi K_{\xi\xi} m_{20}$$

$$m_{04} = A_{23} [2(\alpha - \pi K_{nn}) \Omega^2 - 3\pi K_{vy}] m_{40}$$

$$+ \Omega^4 m_{40} - 3\pi A_{23} K_{\xi\xi} m_{20}$$

여기에서

$$\Delta m = \Omega^4 (4\alpha - 7\pi K_{nn}) - 3\pi K_{vy} \Omega^2$$

$$+ A_{23} (\alpha - 2\pi K_{nn}) [6(\alpha - \pi K_{nn}) \Omega^2 - 9\pi K_{vy}],$$

$$A_{23} = 2\alpha - 3\pi K_{nn}.$$

4차의 적률에 대해서는 2차 적률에 대한 조건보다 더 제한적인 조건이 필요하다. 그러나 만약 원래의 비선형 시스템이 어떤 차수의 적률에서 안정하다면 등가의 준선형화 시스템은 같은 차수의 적률에서 안정하다. 원래 비선형 시스템의 λ 와 δ 가 양이면 이 조건들을 만족할 것이다.

준선형화 시스템에서 등가 선형화 계수는 오차의 제곱평균을 최소화하도록 선정한다.

$$E\{\text{error}\}^2 = \min. \quad (16)$$

여기에서

$$error = (2a_1 - 2a)Y + (\Omega_1^2 - \Omega^2)Y + \lambda \dot{Y}^3 + \delta Y^3$$

식 (16)을 a 와 Ω^2 에 대하여 편미분하고 기댓값을 취하면 등가 선형화계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$a = a_1 + \frac{\lambda m_{04} + \delta m_{34}}{2 m_{02}},$$

$$\Omega^2 = \Omega_1^2 + \frac{\delta m_{40}}{m_{20}}. \quad (17)$$

대안으로 에너지 방법을 제시한다. 원래의 비선형 시스템 (2)와 준선형화 시스템(3)의 강성 에너지 및 감쇠 에너지의 확률 평균이 동일할 조건으로부터

$$E[a \dot{Y}^2] = E[a_1 \dot{Y}^2 + \frac{1}{4} \lambda \dot{Y}^4],$$

$$E[\frac{1}{2} \Omega^2 Y^2] = E[\frac{1}{2} \Omega_1^2 Y^2 + \frac{1}{4} \delta Y^4] \quad (18)$$

정리하면

$$a = a_1 + \frac{\lambda m_{04}}{4 m_{02}}, \quad \Omega^2 = \Omega_1^2 + \frac{\delta m_{40}}{2 m_{20}} \quad (19)$$

식 (13), (15) 및 식 (17) 또는 식 (13), (15) 및 식 (19)를 반복적으로 풀면 선형화 감쇠계수를 구할 수 있다.

한편, 상관함수 $R_{ij}(\tau)$ 의 푸리에(Fourier) 변환으로부터 스펙트럼 밀도함수를 구할 수 있다.⁷ 상관함수의 푸리에 변환은

$$\overline{\Phi}_{ij}(\omega) = \mathcal{F}[R_{ij}(\tau)] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty R_{ij}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (20)$$

미분의 푸리에 변환은

$$\mathcal{F}\left[\frac{dR_{ij}(\tau)}{d\tau}\right] = i\omega \overline{\Phi}_{ij}(\omega) - \frac{1}{\pi} E[X_i X_j] \quad (21)$$

시스템 (3)에 식 (20), (21)을 적용하면

$$i\omega \overline{\Phi}_{11}(\omega) - \overline{\Phi}_{21} = \frac{1}{\pi} m_{20}$$

$$\Omega^2 \overline{\Phi}_{11}(\omega) + (2a - \pi K_{nn} - i\omega) \overline{\Phi}_{21}(\omega) = 0$$

$$i\omega \overline{\Phi}_{12}(\omega) - \overline{\Phi}_{22}(\omega) = 0 \quad (22)$$

$$\Omega^2 \overline{\Phi}_{12} + (i\omega + 2a - \pi K_{nn}) \overline{\Phi}_{22}(\omega) = \frac{1}{\pi} m_{02}$$

식 (22)를 풀고 $\overline{\Phi}_{ij}$ 의 실수부분을 취하면 스펙트럼 밀도함수를 구할 수 있다.

$$\Phi_{11}(\omega) = \frac{m_{11}}{S_p} \Omega^2 (2a - \pi K_{nn}),$$

$$\Phi_{22}(\omega) = \omega^2 \Phi_{11}, \quad (23)$$

$$\Phi_{12} = -\frac{m_{11}}{S_p} \Omega^2 (\Omega^2 - \omega^2)$$

여기에서

$$S_p = \pi [(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 (2a - \pi K_{nn})^2].$$

정상 상태 적률 (13)과 (15), 스펙트럼밀도 (23)은 등가 선형계 (3)에 대하여 엄밀하고, 그것들은 원래의 비선형 시스템 (2)에 대한 근사해이다.^{7,11}

3. 몬테카를로 시뮬레이션

몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation, MCS)은 계산을 수행하기 위하여 난수(random number)의 수열을 이용하는 방법을 가리키는 일반적인 용어이다.¹²⁻¹⁴ 몬테카를로 시뮬레이션의 기본 절차는 (1) 불규칙 입력 생성, (2) 시스템 모델, (3) 시스템 출력, (4) 출력치의 통계적 처리이다. 입력치의 생성은 보통 두 단계로 나누어진다. 첫 단계는 난수 발생기에 의하여 균일한 분포를 갖는 난수를 얻는 것이고, 둘째 단계는 변환장치를 사용하여 균일한 분포의 난수를 특정한 분포의 난수로 변환하는 작업이다.

일반적으로 많이 사용하는 발생법은 선형 조화 발생기(linear congruential generator)이고, 다음의 순환방정식에 기초한다.

$$X_{n+1} = (A \times X_n + C) \bmod M \quad (24)$$

여기에서 X_{n+1} 은 새로 발생되는 난수, X_n 은 직전에 발생된 난수, A 는 배수, C 는 증분, 모듈 M 은 $M > X_n$, $M > A$, 및 $M > C$. 발생되는 수열의 특성은 상수 A , C 및 M 의 선택에 의존한다. 균일하게 분포하는 실수의 수열은 변환에 의하여 여러 가지 분포를 갖는 수열로 변환할 수 있다. 정규분포의 수열을 구하는 Box-Muller 방법^{12, 13}의 수식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Y_1 &= \sqrt{-2 \ln X_1} \cdot \sin(2 \pi X_2) \\ Y_2 &= \sqrt{-2 \ln X_1} \cdot \cos(2 \pi X_2) \end{aligned} \quad (25)$$

여기에서 X_1 과 X_2 는 범위 (0, 1)에서 균일하게 분포하는 불규칙 변수이다. 독립적인 변수 Y_1 과 Y_2 는 정규화 된 정규분포를 가지며 기댓값 $\mu = 0$, 표준편차 $\sigma = 1$ 을 가진다. 변환된 난수의 품질은 전에 생성된 균일 분포 난수의 품질에 의존한다.¹³

본 논문에서 비선형 시스템의 시간이력 해석을 위하여 Runge-Kutta 방법^{16,17}을 사용하였다. 시스템이 다음과 같이 주어진 경우,

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) \quad (26)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \quad (27)$$

여기에서,

$$f_1 = hf(y_n, t_n)$$

$$f_2 = hf(y_n + \frac{1}{2} f_1, t_n + \frac{h}{2})$$

$$f_3 = hf(y_n + \frac{1}{2} f_2, t_n + \frac{h}{2})$$

$$f_4 = hf(y_n + f_3, t_n + h).$$

또한 h 는 시간 간격, y_n 과 y_{n+1} 은 각각 시각 t_n 과 t_{n+1} 에서의 응답을 나타낸다. 각 시각에서의 응답을 이용하면 변위 제곱의 기댓값 및 스펙트럼 밀도¹⁷를 구할 수 있다.

4. 수치계산 결과 및 고찰

시스템 (2)에 대한 수치계산을 하기 위하여 $\alpha_1 = 0.4$, $\Omega_1 = 6.0$ 인 경우에 해석을 실시하고, MCS(몬테카를로 시뮬레이션)의 결과와 비교하였다. 우선 MCS와 해석적 방법의 유효성을 확인하기 위하여 $\lambda = \delta \approx 0$, $K_{nn} \approx 0$, $K_{yy} \approx 0$ 인 경우에 대하여 K_{yy} 를 변화시켜가며 $E[Y_1^2]$ 를 구하고, $K_{yy} = 1.5$ 인 경우에 대하여 해석적 방법에 의한 스펙트럼 밀도와 MCS에 의하여 얻어진 시간이력 해석을 푸리에 변환하여 얻어진 스펙트럼 밀도를 Fig. 1과 같이 비교하였다. 두 결과가 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. Fig. 2는 $K_{nn} \approx 0$, $K_{yy} \approx 0$, $\delta = (5.0$ 또는 $200.)$ 인 경우 δ 값의 변화에 따른 $E[Y_1^2]$ 를 나타낸다.

Fig. 3은 λ 값의 변화($\lambda = 0.1$ 및 2.0)에 따른 값을 나타내고, Fig. 4는 δ 와 λ 값을 함께 준 경우의 변위 제곱의 기댓값이다. MCS의 결과는 해석적인

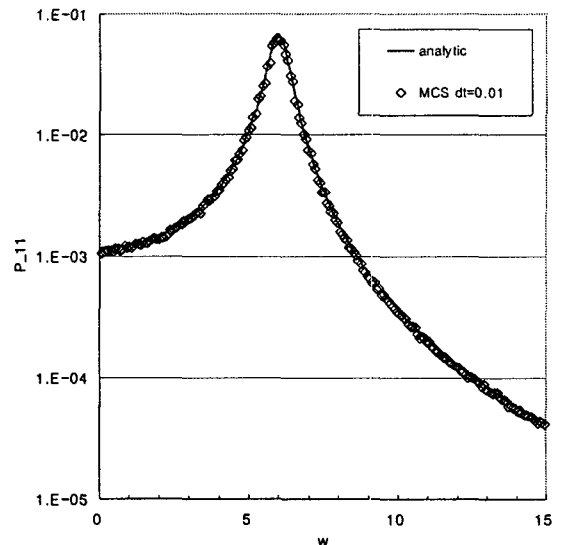


Fig. 1 Spectral density for linear random vibration $K_{yy} = 1.5$

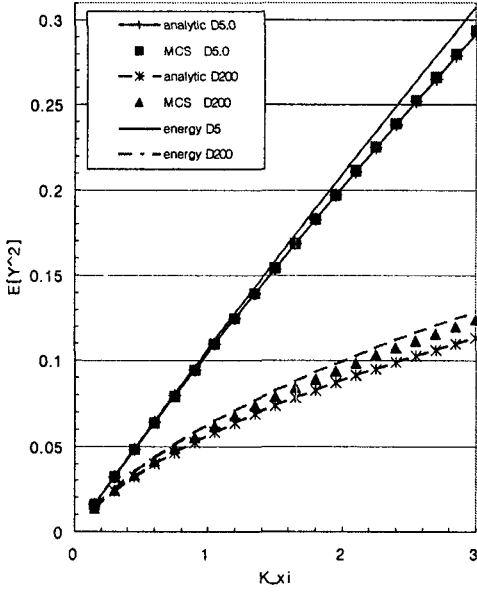


Fig. 2 Stationary mean square with δY^3

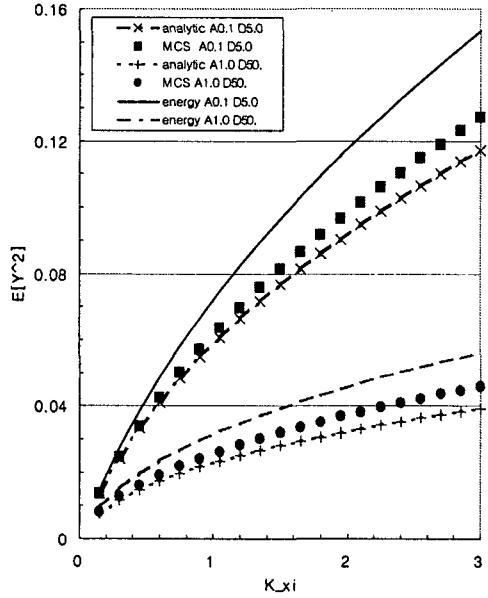


Fig. 4 Stationary mean square with $\lambda \tilde{Y}^3$ and δY^3

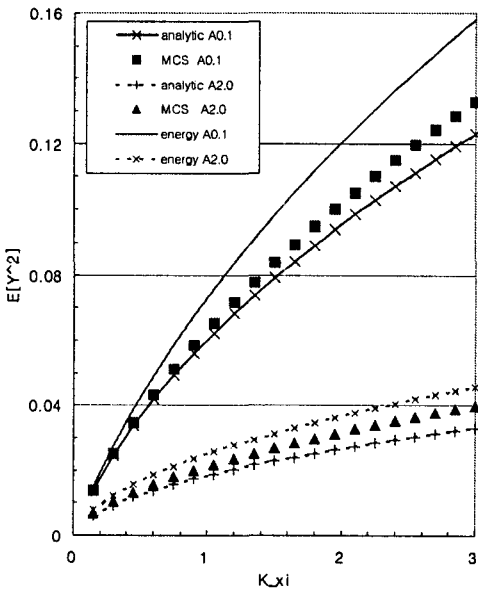


Fig. 3 Stationary mean square with $\lambda \tilde{Y}^3$

방법과 에너지 방법의 해 사이에 위치한다. Fig. 4에서 위 세 개의 그래프는 $\lambda=0.1$ 및 $\delta=5.0$ 인 경우를 나타내고, 아래 세 개의 그래프는 $\lambda=1.0$ 및 $\delta=50.0$ 인 경우를 나타낸다. 해석적인 방법은 MCS보다 작은 값들을 나타내었고, 대안으로 제시한 에너지 방법은 MCS보다 큰 값들을 나타내었다. 이 두 계산결과의 중간값은 MCS의 결과와 잘 일치하였다.

Fig. 5는 $\alpha_1=0.4$, $\Omega_1=6$, $K_{vv}=0.5$, $K_{nn}=0.05$ 인 경우 변수 가진의 스펙트럼 밀도 $K_{\xi\xi}$ 에 따른 $E[Y_1^2]$ 을 나타내고, Fig. 6은 그 중 $K_{\xi\xi}=1.5$ 인 경우의 스펙트럼밀도 $\phi_{11}(\omega)$ 를 나타낸다.

Fig. 7은 $\alpha_1=0.8$, $\Omega_1=12$, $K_{vv}=1.0$, $K_{nn}=0.1$ 인 경우의 $E[Y_1^2]$ 을 나타내고, Fig. 8은 그 중 $K_{\xi\xi}=1.5$ 인 경우의 스펙트럼밀도를 나타낸다. Figs. 3~5에서와 같이 MCS의 결과는 해석적인 방법과 에너지 방법의 해 사이에 위치한다.

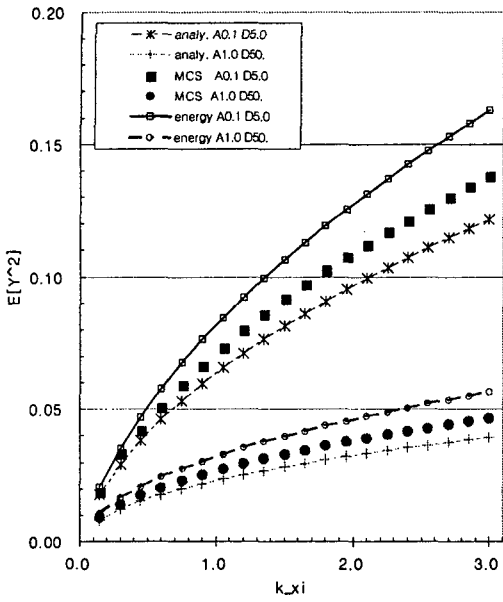


Fig. 5 Stationary mean square of response Y_1

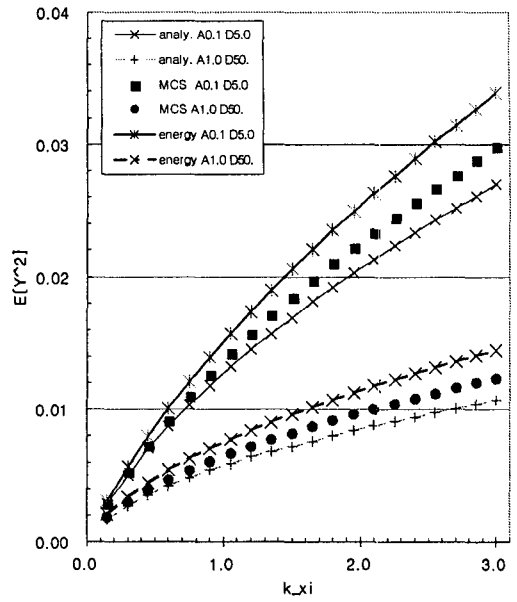


Fig. 7 Stationary mean square values of response Y_1

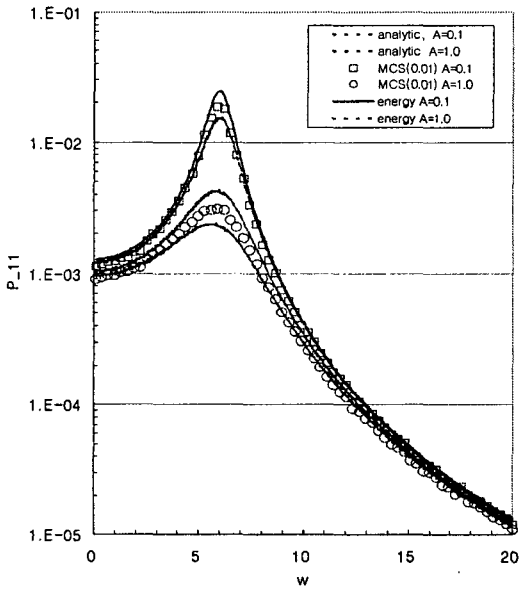


Fig. 6 Spectral density for $K_{33}=1.5$

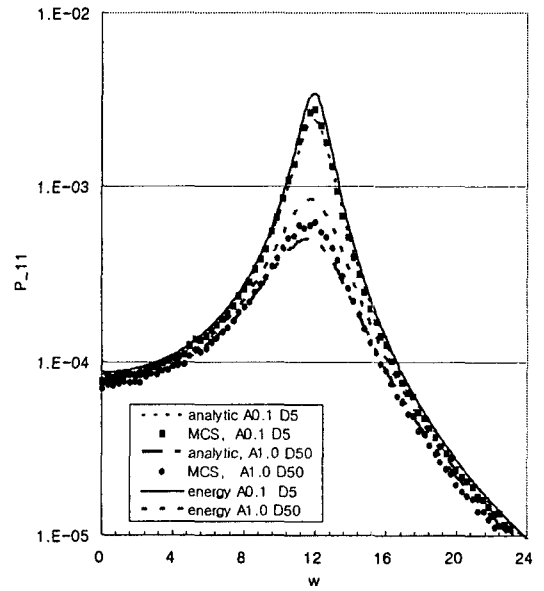


Fig. 8 Spectral density for $K_{33}=1.5$

5. 결론

비선형 진동 시스템이 불규칙 가진을 받고 매개 에너지 방법의 해 사이에 위치한다. 변수 가진을 포함하는 경우를 해석하기 위하여 통계적 방법을 사용하였고, 시스템의 비선형성만을 선형화하는 준선형화 방법을 사용하였다. 오차제곱의 기댓값을 최소화하는 해석적 방법, 원래의 비선형 시스템과 준선형화 된 시스템의 에너지의 기댓값을 같도록 하는 방법에 의한 해석을 실시하고 그 결과들을 몬테카를로 시뮬레이션의 결과들과 비교하였다. 해석적인 방법은 아래 한계 값을 나타내고, 에너지 방법은 위 한계 값을 나타내었다. 따라서 구하는 해는 이 두 가지 방법으로 얻어진 해의 중간에 위치한다고 할 수 있다.

참고문헌

1. Roberts, J. B. and Spanos, P. D., "Random Vibration and Statistical Linearization," Dover Publications, Inc., 1999.
2. Chen, J. B. and Li, J., "Dynamic Response and Reliability Analysis of Non-linear Stochastic Structure," Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 20, pp. 33-44, 2005.
3. Deodatis, G. and Shinozuka, M., "Stochastic FEM analysis of non-linear dynamic problems," Stochastic Mechanics III, Princeton University, pp. 152-155, 1988.
4. Yun, S. H., "Formulations of Linear and Nonlinear Finite Element for Dynamic Flexible Beam," J. of the KSPE, Vol. 23, No. 2, pp. 113-121, 2006.
5. Cho, D. S., "Nonlinear Vibration Responses of a Spring-Pendulum System under Random Base Excitation," J. of the KSPE, Vol. 18, No. 3, pp. 175-181, 2001.
6. To, C. H. S., "Nonlinear Random Vibration: Analytical Techniques and Applications," Swets & Zeitlinger B. V., Lisse, 2000.
7. Lin, Y. K. and Cai, G. Q., "Probabilistic Structural Dynamics: Advanced Theory and Applications," McGraw-Hill, 2004.
8. Klosner, J. M. and Haber, S. F., "Response of Non-linear Systems with Parameter Uncertainties," Int. J. of Non-Linear Mechanics, Vol. 27, No. 4, pp. 547-563, 1992.
9. Liu, W. K., Besterfield, G. and Belytschko, T., "Transient probabilistic systems," Computing Methods on Applied Mechanics and Engineering, Vol. 67, No. 1, pp. 27-54, 1988.
10. Iwan, W. D. and Huang, C. T., "On the Dynamic Response of Non-linear Systems with Parameter Uncertainty," Int. J. of Non-Linear Mechanics, Vol. 31, No. 5, pp. 631-645, 1996.
11. Bernard, P., "Stochastic Linearization: What Is Available and What Is Not," Computers and Structures, Vol. 67, pp. 9-18, 1988.
12. Marek, P., Brozzetti, J. and Gustar, M., "Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation," Institute of Theoretical and Applied Mechanics, 2001.
13. Landau, D. P. and Binder, K., "A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics," Cambridge University Press, 2000.
14. Spanos, P. D. and Zeldin, B. A., "Monte Carlo Treatment of Random Fields: a Broad Perspective," Applied Mechanics Review, Vol. 51, No. 3, pp. 219-237, 1998.
15. Yoo, H. K., Kang, D. K., Lee, S. W. and Gweon, D. G., "Error Analysis and Alignment Tolerancing for Confocal Scanning Microscope using Monte Carlo Method," J. of the KSPE, Vol. 21, No. 2, pp. 92-99, 2004.
16. Meirovitch, L., "Introduction to Dynamics and Control," John Wiley & Sons, 1985.
17. Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. and Vetterling, W. T., "Numerical Recipes in C," Cambridge University Press, 1988.