

코플러와 극단치이론을 이용한 위험척도의 추정 및 성과분석

여성철¹⁾

요약

금융위험의 측정 및 관리를 위한 도구로서 분포의 꼬리 부분과 관련한 위험척도로 VaR가 현재 널리 활용되고 있다. 특히 VaR의 정확한 추정을 위해 정규분포를 가정한 기존의 방법보다는 극단치이론을 이용한 방법이 최근 관심을 끌고 있다. 지금까지 극단치이론을 이용한 VaR의 추정에 관한 연구는 대부분 단변량의 경우에 대해 이루어졌다. 본 논문에서는 코플러를 극단치이론에 결부시켜 다변량 극단치분포를 모형화하여 포트폴리오 위험측정을 다루고 있다. 특히 본 연구에서는 포트폴리오 위험척도로 VaR와 더불어 ES에 대한 추정방법도 함께 논의하였다. 포트폴리오 위험측정을 위한 방법으로 본 논문에서 논의한 코플러-극단치이론에 의한 접근방법이 기존의 분산-공분산 방법보다 상대적으로 우수한지를 실증자료에 대한 사후검증을 통해 살펴보았다.

주요용어: 위험척도, Value at Risk, Expected Shortfall, 극단치이론, 코플러, 사후검증

1. 서론

금융기관들이 직면하는 위험의 정도를 파악하기 위해 고안된 VaR(Value at Risk)는 간결하면서도 종합적으로 위험을 평가한다는 면에서 최근 금융기관뿐만 아니라 일반기업에서도 널리 활용되고 있는 추세이다.

VaR란 금리, 주가, 환율 등 기초적 시장가격들에 대한 미래 확률분포를 예측하여, 향후 불리한 시장가격변동에 기인하여 일정기간 동안 보유한 자산포트폴리오에 대해서 주어진 신뢰수준 내에서 최대손실액을 의미한다. VaR의 큰 장점은 여러 금융자산으로 구성된 포트폴리오 전체의 위험을 최대손실액이라는 하나의 수치로 나타내므로 해당 금융자산의 위험의 크기를 한눈에 알아 볼 수가 있으며 또한 통일된 방법으로 위험을 측정하여 서로 다른 금융자산들 사이의 위험의 크기를 비교할 수가 있다는 것이다. 그런데 VaR는 통계적인 방법으로 측정되므로 자료, 가정, 방법론에 따라 동일한 금융자산에 대해서도 서로 다른 VaR가 산출될 수 있음에 유의할 필요가 있다. 따라서 보다 정확한 VaR를 측정하기 위해서는 해당 금융자산 수익률의 확률분포를 정확하게 파악하는 것이 중요한 과제가 된다.

일반적으로 VaR를 측정하기 위해 금융자산 수익률의 확률분포로 정규분포의 가정을 많이 사용하는데 이는 정규분포의 경우 평균과 분산만 알면 분포의 특성이 완전히 파악될 수 있으므로 주어진 신뢰수준 내에서 VaR를 쉽게 구할 수 있기 때문이다. 그러나 이

1) (143-701) 서울시 광진구 화양동 1번지, 건국대학교 상경대학 응용통계학과, 교수
E-mail: scyeo@konkuk.ac.kr

미 잘 알려진 바와 같이 금융자산의 수익률분포는 꼬리 부분이 정규분포에 비해 훨씬 두터운 형태를 띄고 있기 때문에 정규분포를 가정한 VaR의 측정은 실제의 VaR를 과소평가하는 경향이 있다. 특히 근래에 국내외적으로 발생한 여러 재앙적인 금융사건들 예컨대, SK증권의 다이아몬드 펀드(Diamond Fund)사건(1998년), 영국 베어링(Barings) 그룹의 파산사건(1995년), 일본 다이와(Daiwa)은행의 거액손실사건(1995년), 미국 LTCM(Long Term Capital Management) 파산위기 등에서 보듯이 정상적인 상황보다는 극단적인 상황에서 위험의 정도를 잘 파악하는 것이 매우 중요하다고 할 수 있다.

위에서 언급한 바와 같이 정규분포에 근거한 기존의 VaR 측정방법이 가지는 문제점들을 극복하고 극단적인 상황 하에서 적정한 VaR를 추정하기 위해서 최근 관심을 끌고 있는 방법이 소위 극단치 이론(extreme value theory: EVT)에 의한 방법이다. 이 이론은 원래 수자원이나 보험 분야 등에서 과극적인 상황에 대한 연구에 주로 이용되어 왔으나 최근 재무 분야에도 많이 활용되고 있다. 특히 VaR의 측정과 관련한 논문으로는 Danielsson and deVries(1997a, 1997b), Longin(1996, 2000), McNeil and Frey(2000) 등이 있다.

EVT에 의한 방법은 VaR를 측정하기 위해서 전체 수익률 데이터의 분포를 모호화한 결과로서 꼬리 부분의 확률을 얻는 것 대신에 분포의 꼬리 부분에 속하는 극단의 데이터들을 다른 영역의 데이터들과 분리하여 이들만의 접근적 분포형태를 제공하는 통계이론을 이용하는 것이다. 이 접근 방법의 장점은 꼬리 부분의 확률을 추정하는데 중심부의 자료가 미치는 영향을 줄일 수 있으며 또한 자산 수익률의 분포에 대한 아무런 가정 없이 VaR를 측정함으로써 특정분포를 가정할 경우 실제분포와의 차이에서 발생하는 오차를 줄일 수 있다. 그리고 자산 수익률분포의 비대칭성과 두터운 꼬리형태를 반영할 뿐만 아니라 실증분포의 꼬리를 부드럽게 만들어서 과거에 발생한 손실을 초과하는 극단적 상황의 발생가능성을 반영하도록 하여준다.

그런데 지금까지 EVT를 이용한 VaR의 측정은 자산 포트폴리오가 단지 한 개의 금융자산으로 구성되어 있다는 가정 하에서 단변량 EVT에 근거한 연구가 대부분이었다. 그러나 금융자산 포트폴리오는 두 개 이상의 자산으로 구성되는 경우가 일반적이므로 단변량 분포에 의한 VaR의 측정은 현실적으로 만족스럽지 못한 실정이다. 따라서 여러 개의 자산으로 구성된 포트폴리오의 VaR를 측정하기 위해서는 개별 금융자산 수익률들의 확률분포와 함께 이들 간의 의존성구조를 파악하는 것이 필요하다. 이를 위해서는 포트폴리오를 구성하는 금융자산 수익률들의 결합확률분포를 구하는 것이 바람직스러울 수 있다. 그러나 다변량의 경우 정규분포를 제외하고는 결합확률분포로부터 직접 확률변수들 간의 의존성의 구조를 도출하는 것은 매우 어려운 실정이다. 또한 확률변수들 간의 의존성의 척도로서 우리가 흔히 사용하는 상관계수는 결합확률분포가 다변량 정규분포나 다변량 t-분포와 같은 타원형 분포(elliptical distribution)일 경우에 한해 적합한 척도이다(Embrechts, McNeil and Straumann, 1999). 따라서 금융자산 수익률 분포의 두터운 꼬리 부분의 특징과 수익률들 간의 의존성구조를 반영하기 위해서는 다변량 EVT를 적용하는 것이 필요하다.

본 논문에서는 다변량 EVT를 적용하여 자산 수익률들의 결합확률분포와 이들 수익률들 간의 의존성구조에 대한 파악을 용이하게 하는 방법으로 소위 코플러(copula)함수를 이용하고자 한다. 즉, 코플러함수를 이용하여 각 수익률들의 주변 극단치분포함수와 이들 간

의 의존성구조를 분리하여 처리함으로써 주어진 데이터로부터 자산 수익률들의 다변량 극단치분포함수를 용이하게 추정할 수 있다. 그런데 어떤 코플러함수를 사용하느냐에 따라 의존성구조가 달라지므로 이에 따른 다변량 분포의 형태도 다르게 나타난다. 따라서 본 논문에서는 여러 형태의 코플러함수로부터 구현된 다변량 분포로부터 VaR값들을 구한 후에 사후검증을 통해 어떤 경우에 실제자료에 가장 적합한가를 살펴보고자 한다. 최근 재무분야에 코플러함수를 이용한 연구가 활발히 이루어지고 있는 추세인데 관련문헌으로 Cherubini et al.(2004), Bradley and Taqqu(2002), Bouye et al.(2000) 등이 있고 특히 위험관리에 대한 적용을 다룬 논문으로는 Embrechts et al.(2001)과 Embrechts et al.(2002) 등이 있다.

한편, 최근 들어 위험측정치로서 VaR의 한계에 대해 많이 지적되고 있다. 먼저 VaR는 단지 확률분포의 분위수로만 측정되므로 VaR를 초과하는 손실 즉, 꼬리위험을 무시한다는 점이다. 또한 Artzner et al.(1999)에 의하면 VaR는 일반적으로 하위가법성(subadditivity)을 만족하지 못하므로 일관성(coherency)을 가진 위험척도(risk measure)가 되지 못한다는 것이다. 이러한 VaR의 문제점들을 보완해주는 위험척도로서 ES(expected shortfall)가 종종 사용되고 있다. ES란 손실이 VaR를 초과한다는 조건하에서 손실의 조건부기대값을 의미한다. 즉, ES란 VaR를 초과하는 손실의 예상규모가 얼마나 되는지를 나타낸다. Yeo(2006)은 극단치이론을 바탕으로 VaR와 ES를 포함하는 위험척도의 성과분석에 관해 논의하였다.

자산 수익률의 분포가 정규분포를 따른다면 꼬리위험은 그다지 심각하지 않을 수 있다. 그러나 위에서 언급하였듯이 실제의 분포는 대개 비대칭적이면서 두터운 꼬리형태를 보이므로 꼬리위험은 자칫 심각한 손실을 야기할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 분포의 비대칭성과 꼬리 부분의 두터움을 잘 반영할 수 있는 EVT-코플러 방법을 사용하여 VaR와 함께 ES를 측정하고 이들 측정치들에 대한 사후검증을 실시하기로 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같이 이루어진다. 먼저 1장의 서론에 이어 2장에서는 위험척도로서 VaR와 ES에 대해 간단히 논의한다. 3장에서는 극단치이론에 대해 논의하고 4장에서는 코플러함수의 개념과 중요한 성질에 대해 논의한다. 5장에서는 3장과 4장의 논의를 바탕으로 포트폴리오의 VaR와 ES에 대한 추정과 사후검증의 방법에 관해 논의한다. 그리고 6장에서는 실증분석을 위해 우리나라 전체 상장기업 종목과 등록기업 종목으로 이루어진 시장포트폴리오에 적용한 결과를 보인다. 끝으로 7장에서는 본 논문의 결론과 함께 향후 연구방향에 관해 언급한다.

2. 위험척도로서 VaR와 ES

본 절에서 다루는 내용은 Yeo(2006)에서 이미 논의하였으나 편의상 다시 간략히 언급하고자 한다. 어떤 기간동안 수익률의 하락에 따른 금융자산의 가치손실액을 X 라하고, 이 X 가 취할 수 있는 모든 가능한 손실액의 집합을 \mathcal{L} 이라고 할 때 $\rho: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{R}$ (실수집합)인 함수를 위험척도라고 말한다. Artzner et al.(1999)은 위험척도의 바람직한 성질로서 다음의 네 가지 조건들을 제시하고 위험척도 ρ 가 이 조건들을 모두 만족할 때 일관성 있는 위험척도(coherent risk measure)라고 불렀다.

- (i) 단조성(monotonicity): $X, Y \in \mathcal{L}, X \leq Y$ 이면 $\rho(X) \leq \rho(Y)$,
- (ii) 하위가법성(subadditivity): $X, Y, X + Y \in \mathcal{L}$ 이면 $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$,
- (iii) 양동질성(positive homogeneity): $X \in \mathcal{L}, h > 0, hX \in \mathcal{L}$ 이면 $\rho(hX) = h\rho(X)$
- (iv) 전이불변성(translation invariance): $X \in \mathcal{L}, a \in \mathcal{R}$ 이면 $\rho(X + a) = \rho(X) + a$.

이제 위험척도의 예로서 VaR와 ES를 구체적인 식으로 표현하기로 한다. 일정한 기간동안 발생한 금융자산의 손실액 X 의 분포함수를 F 라 하면 $100(1 - \alpha)\%$ 신뢰수준에서 VaR와 ES는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$VaR_\alpha(X) = F^{-1}(1 - \alpha), \quad (2.1)$$

$$ES_\alpha(X) = E(X | X > VaR_\alpha(X)) \quad (2.2)$$

여기서 $F^{-1}(1 - \alpha) = \inf\{x | F(x) \geq 1 - \alpha\}$ 이다. 즉, $VaR_\alpha(X)$ 는 손실액 X 의 분포에서 $(1 - \alpha)$ 번째 분위수(quantile)를 가리킨다. 예를 들어, 손실 X 의 분포가 평균이 μ 이고 분산이 σ^2 인 정규분포인 경우에 VaR와 ES는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$VaR_\alpha(X) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(1 - \alpha), \quad (2.3)$$

$$ES_\alpha(X) = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(1 - \alpha))}{\alpha} \quad (2.4)$$

여기서 Φ 는 표준정규분포함수, $\Phi^{-1}(1 - \alpha)$ 는 Φ 의 $(1 - \alpha)$ 번째 분위수, ϕ 는 표준정규분포의 확률밀도함수를 각각 나타낸다. 그리고 VaR와 ES는 다음의 관계가 성립한다.

$$ES_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + E(X - VaR_\alpha(X) | X > VaR_\alpha(X)). \quad (2.5)$$

3. 극단치 이론

극단치 이론은 극단적 사건에 대한 확률적 성질을 고찰하는 이론이다. 본 절의 EVT에 관한 내용은 Yeo(2006)에서 이미 논의하였으므로 여기서는 EVT에 대해 간략히 언급하고자 한다. 일반적으로 EVT의 결과로 얻어지는 확률분포의 모형에는 일반화 극단치 분포(generalized extreme value distribution: GEV)모형과 일반화 파레토분포(generalized Pareto distribution: GPD)모형의 두 가지 타입이 있다. 먼저 GEV모형에 관해 살펴보기로 한다.

확률변수들 X_1, X_2, \dots, X_n 이 독립이고 항등적(IID)이며 분포함수 F 를 가진다고 하자. 그리고 이 확률변수들 중 최대확률변수를 M_n , 즉 $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ 이라고 하자. Fisher-Tippett(1928)정리에 의하면 어떤 상수들 $a_n \in \mathcal{R}^+, b_n \in \mathcal{R}$ 에 의해 표준화된 최대확률변수 $\tilde{M}_n = \frac{M_n - b_n}{a_n}$ 은 $n \rightarrow \infty$ 일 때 비퇴화분포(non-degenerate distribution)로 수렴한다면 아래의 표준극단치분포들(standard extreme value distributions)이라고 부르는 세 가지 유형의 분포들 중 하나로 수렴한다.

$$\text{Fréchet} : \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp\{-(-x)^\alpha\}, & x > 0, \alpha > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\text{Weibull} : \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\}, & x \leq 0, \alpha > 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\text{Gumbell} : \Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), x \in \mathcal{R}. \quad (3.3)$$

한편, Jenkinson(1955)과 von Mises(1936)는 $n \rightarrow \infty$ 일 때 \tilde{M}_n 의 수렴분포로 위의 세 가지 유형의 표준극단치분포들로 나타내는 대신 일반화극단치분포(generalized extreme value distribution: GEV)라고 부르는 분포함수를 제시하였다. 즉

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H_\xi(x) \quad (3.4)$$

가 된다. 여기서 $H_\xi(x)$ 는 GEV분포함수로서 다음과 같이 주어진다.

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\{-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\}, & 1 + \xi x > 0, \xi \neq 0 \\ \exp(-e^{-x}), & x \in \mathcal{R}, \xi = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

여기서 ξ 는 GEV의 형태를 결정짓는 모수로서 형태모수(shape parameter) 또는 꼬리지수(tail index)라고 부르는데, $\xi = \alpha^{-1} > 0$, $\xi = -\alpha^{-1} > 0$, $\xi = 0$ 을 취할 때 H_ξ 는 각각 Fréchet 분포족, Weibull 분포족, Gumbell 분포족에 속하게 된다. 특히 $\xi = 0$ 인 경우는 $\xi \rightarrow \infty$ 일 때 M_n 의 위치모수(location parameter)와 척도모수(scale parameter)를 각각 μ 와 σ 라고 하면 n 이 충분히 클 때 M_n 의 분포함수는 근사적으로 다음과 같이 주어진다.

$$P(M_n \leq x) \approx H_\xi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = H_{\xi, \mu, \sigma}(x) \quad (3.6)$$

다음으로 GPD모형에 관해 살펴보기로 한다. 확률변수 X 의 분포함수를 F 라 하고 F 의 오른쪽 끝점을 x_F (즉, $x_F = \sup\{x \in \mathcal{R} : F(x) \leq 1\} \leq \infty$)라고 하자. 이 때 임의의 높은 임계치 u 에 대해서 임계치 초과분포함수(excess distribution over the threshold)를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} F_u(x) &= P(X - u \leq x | X > u) \\ &= \frac{F(u+x) - F(u)}{1 - F(u)}, 0 \leq x < x_F - u. \end{aligned} \quad (3.7)$$

즉, 임계치초과분포함수 F_u 는 확률변수 X 가 주어진 임계치 u 를 초과할 때 초과크기에 대한 조건부분포함수를 나타낸다. Balkema와 de Haan(1974)과 Pickands(1975)에 의하면 X 의 분포함수 F 가 GEV분포의 MDA에 속하는 경우(즉, $F \in MDA(H_\xi), \xi \in \mathcal{R}$)가 되면 $u \rightarrow \infty$ 일 때 $F_u(x)$ 는 일반화파레토분포(generalized Pareto distribution: GPD)함수 $G_{\xi, \sigma_u}(x)$ 로 수렴

한다고 알려져 있다. 여기서

$$G_{\xi, \sigma_u}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma_u}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & x \geq 0, 1 + \frac{\xi x}{\sigma_u} > 0, \quad \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\sigma_u}\right), & x \geq 0, \quad \xi = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

$\sigma_u = \sigma + \xi u$ 이다.

따라서 실제 응용의 경우 n 이 충분히 클 때 최대확률변수 M_n 의 분포가 Fisher-Tippett 정리에 의해 근사적으로 일반화극단치분포함수 $H_{\xi, \mu, \sigma}$ 를 따르고 이 때 x_F 에 충분히 가까운 높은 임계치 u 를 택하면 임계치초과분포함수 F_u 는 근사적으로 일반화파레토분포함수에 접근한다.

GPD함수에 내포된 두 개의 모수 중 $\sigma_u (> 0)$ 는 임계치 u 에 따라 변하는 척도모수이며 ξ 는 임계치 u 와 무관한 모수로서 GEV분포에서 ξ 와 같이 GPD의 형태를 결정짓는 형태모수(shape parameter)또는 꼬리지수(tail index)라고 부른다. 그런데 $\xi > 0$ 이면 G_{ξ, σ_u} 는 파레토 타입분포가 되고, $\xi = 0$ 이면 G_{ξ, σ_u} 는 지수분포가 되며 $\xi < 0$ 인 경우에는 제 II 파레토 타입분포가 된다. 특히 $\xi > 0$ 일 때 GPD함수 G_{ξ, σ_u} 는 두터운 꼬리모양을 가지므로 금융시계열 데이터의 분석에 적합한 분포라고 할 수 있다.

일반적으로 GEV분포함수는 세 개의 모수 ξ, μ, σ 를 내포하는데 비해 GPD함수는 두 개의 모수 ξ, σ_u 를 가지므로 일반적으로 GPD함수를 이용한 VaR의 추정이 좀더 효율적이라고 볼 수 있다. 또한 대부분의 금융시계열 데이터는 GEV모형에 적합하듯이 극단치가 일정한 주기에 따라 발생하지 않는다. 따라서 본 논문에서는 극단치 분포모형의 두 가지 타입 중에서 GPD모형에 대해서만 VaR와 ES의 추정에 관해 논의하기로 한다.

어떤 기간동안 관찰된 n 개의 표본데이터 x_1, x_2, \dots, x_n 이 분포함수 F 를 따르고 F 의 오른쪽 끝점을 x_F 라고 하자. 그리고 x_F 에 충분히 가까운 임계치 u 가 주어졌을 때 n 개의 표본데이터 중 임계치 u 를 초과하는 관측치들을 x'_1, x'_2, \dots, x'_n ($n_u = \sum_{i=1}^n I_{\{x_i > u\}}$)라 하고 임계치초과값들(threshold excesses)을 $y_i = x'_i - u, i = 1, \dots, n_u$ 라고 표기하자. 이때 임계치 u 가 x_F 에 충분히 가까운 값이면 Balkema-de Haan-Pickands 정리에 의해 임계치초과데이터 y_1, y_2, \dots, y_n 는 근사적으로 GPD모형을 따르는 데이터라고 볼 수 있다.

일반적으로 GEV모형이나 GPD모형에 내포된 모수들을 추정하는 방법으로는 최우추정법, 확률가중추정법(method of probability weighted moments) 그리고 비모수적 추정법 등이 있다. Hosking과 Wallis(1987)에 의하면 꼬리지수가 $\xi > -0.5$ 이면 최우추정법에 의해 구한 모수들의 추정량은 점근적으로 정규분포를 따른다. 따라서 분포가 두터운 꼬리모양을 가질 경우에 모수들에 대해 최우추정법으로 구한 추정치들이 다른 방법으로 구한 추정치들보다 효율적이라고 볼 수 있다. 따라서 본 논문에서는 GPD함수에 내포된 모수들의 추정을 위해 최우추정법을 사용하기로 한다.

GPD함수에 내포된 모수 ξ 와 σ_u 에 대한 우도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$L(\xi, \sigma_u) = \prod_{j=1}^{n_u} g_{\xi} \left(\frac{x}{\sigma_u} \right), \quad (3.9)$$

여기서

$$g_{\xi}(x) = \begin{cases} (1 + \xi x)^{-\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)}, & \xi \neq 0 \\ e^{-x}, & \xi = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

이다. 단, $\xi > 0$ 일 때 $x \geq 0$, $\xi < 0$ 일 때 $0 \leq x < -\frac{1}{\xi}$ 이다. 따라서 모수 ξ, σ_u 에 대한 로그우도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$l(\xi, \sigma_u) = \begin{cases} -n_u \log \sigma_u - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^{n_u} \log \left(1 + \xi \frac{y_i}{\sigma_u}\right), & \xi \neq 0 \\ -n_u \log \sigma_u - \frac{1}{\sigma_u} \sum_{i=1}^{n_u} y_i, & \xi = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

단, $\xi > 0$ 일 때 $y_i > 0$, $\xi < 0$ 일 때 $0 \leq y_i < -\frac{\sigma_u}{\xi}$, $i = 1, \dots, k$ 이다. 따라서 식 (3.12)에서 주어진 로그우도함수로부터 모수 ξ, σ_u 에 대한 최우추정치들을 구할 수 있다.

한편, 식 (3.11)에서 보는 것처럼 모수 ξ, σ_u 에 대한 최우추정치들은 임계치 u 를 어디서 잡느냐에 따라 분산과 편의의 상반관계가 나타날 수 있다. 즉, 임계치를 너무 낮게 잡으면 극단치 데이터의 수가 많아져서 추정치의 분산은 작아지지만 분포의 점근성이 떨어져서 편의가 커지게 되고 반면에 임계치를 너무 높게 잡으면 그 반대의 현상이 나타날 수 있다.

일반적으로 임계치를 잡는 방법에는 여러 가지 방법들이 있으나 본 논문에서는 Yeo(2006)에서 논의한 바와 같이 ME플롯(mean excess plot) 방식과 Hill플롯 방식을 사용하기로 한다. 먼저 ME플롯 방식은 평균초과함수(mean excess function)의 그래프를 이용하는 방법이다. 평균초과함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} e_X(u) &= E(X - u | X > u) \\ &= \int_0^{x_F - u} x dF_u(x), \quad u < x_F \end{aligned} \quad (3.12)$$

그런데 $F_u(x)$ 가 GPD함수 $G_{\xi, \sigma_u}(x)$ 이면 평균초과함수는 $\xi < 1$ 일 때 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} e_X(u) &= \frac{\sigma_u}{1 - \xi} \\ &= \frac{\sigma + \xi u}{1 - \xi}, \quad \sigma + \xi u > 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

위의 식 (3.13)으로부터 평균초과함수의 그래프는 u 에 관해서 선형임을 알 수 있다. 따라서 ME플롯 방식은 $\{(u, \hat{e}_X(u)) : x_{1:n} \leq u \leq x_{n:n}\}$ 으로 이루어진 플롯에서 u 의 값을 변화 시킴에 따라 양의 기울기를 가진 직선형태의 영역이 시작되는 점을 임계값으로 정한다. 여기서 $\hat{e}_X(u)$ 는 평균초과함수의 표본추정치로서 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{e}_X(u) = \frac{1}{n_u} \sum_{i=1}^{n_u} y_i. \quad (3.14)$$

다음으로 Hill플롯 방식은 $\{(k, H_{k,n}) : k = 2, \dots, n\}$ 으로 이루어진 플롯에서 k 의 값에 따라 변화시켜갈 때 $H_{k,n}$ 가 안정되기 시작하는 값을 임계치 u 로 선택한다. 여기서 $H_{k,n}$ 은 Hill(1975)에 의해 제시된 형태모수 ξ 에 대한 추정치로서 다음과 같이 주어진다.

$$H_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln X_{i,n} - \ln X_{k,n}, \quad (3.15)$$

여기서 $X_{i,n}$ 은 n 개의 관찰치들을 크기에 따라 내림차순으로 배열하였을 때 i 번째에 위치한 관찰치를 의미한다. 즉, $X_{1,n} \geq X_{2,n} \geq \dots \geq X_{n,n}$ 이다.

이제 GPD와 추정된 모수들을 이용하여 자산수익률의 VaR와 ES를 구해보자. Balkema-de Haan-Pickands 정리로부터 임계치 u 가 x_F 에 충분히 가까우면 $F_u \approx G_{\xi, \sigma_u}(y)$ 가 된다. 이 결과를 식 (3.7)에 대입하고 $x = u + y$ 라 두면 $x > u$ 일 때 자산수익률분포의 꼬리 부분은 근사적으로 다음과 같이 주어진다.

$$F(x) \approx (1 - F(u)) G_{\xi, \sigma_u}(y) + F(u) \quad (3.16)$$

여기서 GPD함수에 내포된 모수 ξ, σ_u 에 대해 최우추정치 $\hat{\xi}, \hat{\sigma}_u$ 를 대입하고 $F(u)$ 의 추정치로 경험적분포함수 $\hat{F}(u) = 1 - \frac{n_u}{n}$ 를 적용하면 식 (3.16)에서 주어진 $F(x)$ 는 다음과 같이 추정된다.

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{n_u}{n} \left(1 + \hat{\xi} \frac{(x - u)}{\hat{\sigma}_u} \right). \quad (3.17)$$

따라서 유의수준 α 에서 자산수익률의 VaR는 수익률 분포함수 $F(x)$ 의 α 번째 분위수를 나타내므로 다음과 같이 추정된다.

$$\begin{aligned} \widehat{VaR}_\alpha &= \hat{F}^{-1}(\alpha) \\ &= u + \frac{\hat{\sigma}_u}{\hat{\xi}} \left\{ \left(\frac{n}{n_u} (1 - \alpha) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

한편, 식 (2.2)와 식 (3.12)로부터 ES는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$ES_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + e_X (VaR_\alpha(X)). \quad (3.19)$$

그런데 임계치초과분포함수 $F_u(x)$ 가 근사적으로 GPD함수 $G_{\xi, \sigma_u}(x)$ 이면 식 (3.13)과 식 (3.18)로부터 ES는 다음과 같이 추정된다.

$$\begin{aligned} \widehat{ES}_\alpha &= \widehat{VaR}_\alpha + \frac{\hat{\sigma} + \hat{\xi}(\widehat{VaR}_\alpha - u)}{1 - \hat{\xi}} \\ &= \frac{\widehat{VaR}_\alpha}{1 - \hat{\xi}} + \frac{\hat{\sigma} - \hat{\xi}u}{1 - \hat{\xi}} \\ &= u + \frac{\hat{\sigma}}{1 - \hat{\xi}} \left[1 + \frac{1}{\hat{\xi}} \left\{ \left(\frac{n}{n_u} (1 - \alpha) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right\} \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

4. 코플러

4.1. 코플러의 개념

코플러란 여러 확률변수들 사이의 복잡한 의존성구조를 파악하기 위한 방안으로서 Sklar(1959)에 의해 제시되었다. 흔히 확률변수들 간의 의존성을 나타내기 위해 상관계수

를 사용하는데 이는 결합확률분포가 타원형의 분포일 때만 적합하다. 그런데 Embrechts 등(1999)에서 언급한 바와 같이 재무자료의 경우 분포의 형태가 대개 비대칭적이면서 꼬리 부분이 두터운 모습을 가지며 또한 극단치일수록 동일한 방향을 나타내는 경향이 강한 것으로 알려져 있다. 따라서 이러한 분포의 꼬리 부분을 다루는 VaR의 경우에 상관계수에 의해 의존성구조를 반영하기보다는 코플러를 사용하여 그 의존성구조를 파악하는 것이 타당하다고 볼 수 있다.

코플러란 균등분포를 따르는 확률변수들의 결합분포함수를 의미한다. 즉, 확률변수들 U_1, \dots, U_n 이 구간 $[0, 1]$ 에서 균등분포를 따른다면 코플러함수 C 는 다음과 같이 정의되는 다변량분포함수이다.

$$C(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n). \quad (4.1)$$

Sklar정리(1959)에 의하면 확률변수들의 결합분포함수와 주변분포함수를 연결시키는 코플러함수가 존재하고 또한 코플러함수는 결합분포함수와 주변분포함수의 역함수들에 의해 나타낼 수 있다. 즉, 확률변수들 X_1, \dots, X_n 의 결합분포함수를 $F(x_1, \dots, x_n)$ 이라 하고, 주변분포함수를 각각 $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$ 이라 하면 다음의 관계를 만족하는 코플러함수 C 가 존재한다.

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (4.2)$$

특히, F_1, \dots, F_n 이 연속인 경우에는 코플러함수 C 는 유일하게 존재한다. 또한 코플러함수 C 는 다음과 같이 주어진다.

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)), \quad (4.3)$$

여기서 $u_i \in [0, 1]$ 이고 $F_i^{-1} (i = 1, \dots, n)$ 은 F_i 의 역함수이다.

Sklar정리로부터 확률변수들의 결합분포함수는 주변분포함수와 코플러함수로 분리하여 나타낼 수 있고, 코플러함수의 형태에 따라 다양한 결합분포함수가 얻어질 수 있음을 알 수 있다. 이처럼 코플러함수를 사용하여 결합확률분포를 주변확률분포와 이들 간의 의존성 구조로 분리하여 다루는 것은 금융자산 수익률들의 결합확률분포를 직접 모형화하는데 비해 훨씬 쉽고 편리하게 다변량 확률분포를 구현할 수 있는 장점이 된다. 또한 코플러함수는 상관계수와 달리 주변확률분포들의 엄격한 증가변환(strictly increasing transformation)하에서 불변성을 유지하는 좋은 성질을 가지고 있다.

한편, 식 (4.2)와 식 (4.3)에서 양변을 x_1, \dots, x_n 에 관해 편미분하면 확률변수들의 결합 확률밀도함수 $f(x_1, \dots, x_n)$ 와 코플러 밀도함수 $c(u_1, \dots, u_n)$ 는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i), \quad (4.4)$$

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))}{\prod_{i=1}^n f_i(F_1^{-1}(u_i))}. \quad (4.5)$$

따라서 식 (4.4)로부터 확률변수들의 다변량 확률밀도함수는 개별 단변량 확률밀도함수와 코플러함수를 알면 쉽게 구할 수 있음을 알 수 있다. 또한 식 (4.5)로부터 코플러함수가 결합확률밀도함수의 개별 확률밀도함수들의 곱에 대한 비가 됨을 알 수 있다. 따라서 확률변수들 X_1, \dots, X_n 이 독립일 경우에 결합확률밀도함수는 개별 확률밀도함수들의 곱이 되므로 코플러밀도함수가 언제나 1이 됨을 알 수 있다. 이 결과는 식 (4.4)로부터도 쉽게 확인할 수 있다.

4.2. 코플러의 종류

일반적으로 코플러의 종류에는 크게 타원형 코플러(elliptical copulas), 아르키메디안 코플러(Archimedean copulas) 그리고 극단치 코플러(extreme value copulas) 등이 있다. 여기서는 본 논문의 실증분석과 관련한 코플러의 예를 들어보기로 한다. (1) 정규코플러(normal copula)

정규코플러는 대표적인 타원형 코플러로서 결합확률분포가 정규분포를 따르는 코플러이다. 일반적으로 n 변량 정규 코플러는 아래와 같이 정의된다.

$$C(u_1, \dots, u_n) = \Phi_{\Delta}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)), \quad (4.6)$$

여기서 Φ^{-1} 는 일변량 표준정규분포함수의 역함수이며 Φ_{Δ} 는 상관행렬 Δ 를 가진 n 변량 표준정규분포함수로서 다음과 같이 정의된다.

$$\Phi_{\Delta}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} \phi_{\Delta}(y_1, \dots, y_n) dy_1 \cdots dy_n, \quad (4.7)$$

여기서 $\phi_{\Delta}(x_1, \dots, x_n)$ 는 n 변량 표준정규밀도함수로서 다음과 같이 주어진다.

$$\phi_{\Delta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Delta|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^t \Delta^{-1} \mathbf{x}\right), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t \quad (4.8)$$

식 (4.6)에서 $u_1 = \Phi_1(x_1), \dots, u_n = \Phi(x_n)$ 라고 두면 다음의 결과를 얻는다.

$$C(\Phi_1(x_1), \dots, \Phi_n(x_n)) = \Phi_{\Delta}(x_1, \dots, x_n)$$

따라서 $C(\Phi_1(x_1), \dots, \Phi_n(x_n); \rho)$ 는 n 변량 표준정규분포함수이다. 그리고 식 (4.5)로부터 n 변량 정규코플러 밀도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{|\Delta|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}^t (\Delta^{-1} - I) \mathbf{y}\right), \quad (4.9)$$

여기서 $\mathbf{y} = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))^t$ 이다. 특히, 이변량 정규코플러함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \Phi_{\delta}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \phi_{\delta}(x, y) dx dy, \end{aligned} \quad (4.10)$$

여기서 $\phi_\delta(x, y)$ 는 상관계수 δ 를 가진 이변량 표준정규밀도함수로서 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_\delta(x, y) = \frac{1}{2\pi(1-\delta^2)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\delta^2)}(x^2 + y^2 - 2\delta xy) \right\} \quad (4.11)$$

이변량 정규코플러함수에서 $\delta \rightarrow 0$ 이면 $C(u, v) = uv$ 가 되어 두 확률변수 U 와 V 는 서로 독립이 되고 $\delta \rightarrow -1$ 이면 $C(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$, $\delta \rightarrow 1$ 이면 $C(u, v) = \min(u, v)$ 가 되어 두 확률변수 U, V 는 완전한 의존성이 존재한다. 그리고 이변량 정규 코플러밀도함수는 식 (4.9)로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$c(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \exp \left\{ \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{x^2 + y^2 - 2\delta xy}{2(1-\delta^2)} \right\}, \quad (4.12)$$

여기서 $x = \Phi^{-1}(u)$, $y = \Phi^{-1}(v)$ 이다.

(2) 극단치 코플러

극단치 코플러는 다음의 조건을 만족하는 코플러이다.

$$C(u_1^t, \dots, u_n^t) = C^t(u_1, \dots, u_n), t > 0. \quad (4.13)$$

극단치 코플러는 다변량 극단치분포를 구현하는데 특히 유용한 코플러로 알려져 있다. 편의상 이변량의 경우 극단치 코플러함수의 예를 들면 표 4.1과 같다.

표 4.1에서 주어진 극단치 코플러의 경우 두 확률변수 U 와 V 사이의 의존정도는 모수 δ 에 의해 좌우된다. 즉, 위의 코플러함수들은 $\delta \rightarrow 1$ 이면 $C(u, v) = uv$ 가 되어 두 확률변수 U 와 V 는 서로 독립이 되고, $\delta \rightarrow \infty$ 이면 $C(u, v) = \min(u, v)$ 가 되어 두 확률변수사이에 완전한 의존성이 존재한다.

표 4.1: 극단치 코플러의 예

Gumber(1960)

$$C(u, v) = \exp \left[- \left\{ (-\ln u)^\delta + (-\ln v)^\delta \right\}^{\frac{1}{\delta}} \right], \delta \in [1, \infty)$$

Galambos(1975)

$$C(u, v) = uv \exp \left[\left\{ (-\ln u)^{-\delta} + (-\ln v)^{-\delta} \right\}^{-\frac{1}{\delta}} \right], \delta \in [0, \infty)$$

Hüsler and Reiss(1989)

$$C(u, v) = \exp \left[-\tilde{u}\Phi \left\{ \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}} \right) \right\} - \tilde{v}\Phi \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \delta \ln \left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{u}} \right) \right) \right], \delta \in [0, \infty),$$

여기서 $\tilde{u} = -\ln u$, $\tilde{v} = -\ln v$

참조: Joe(1997), p.142.

4.3. 코플러의 추정

일반적으로 코플러함수의 모수를 추정하는 방법으로는 모수적 추정법과 비모수적 추정법이 있는데 본 논문에서는 모수적 추정법에 관해서만 논의하기로 한다. 모수적 추정법은

최우추정법으로 모수를 추정하는 방법으로 세 가지 방법이 있다. 첫 번째 방법은 EML(exact maximum likelihood)방법이라고 하는데 코플러함수의 모수를 주변확률분포의 모수와 함께 추정한다. 두 번째 방법은 IFM(inference functions for margins)방법이라고 하는데 주변확률분포의 모수와 코플러함수의 모수를 분리하여 두 단계에 걸쳐서 추정하는 방법이다. 세 번째 방법은 CML(canonical maximum likelihood)방법이라고 하는데 이 방법은 IFM방법과 같은 두 단계 추정법이나 IFM방법과 다른 점은 개별 주변확률분포함수에 대해 모수적 분포함수를 가정하지 않고 경험적 분포함수로 추정한 후에 코플러의 모수벡터를 추정한다. 따라서 이 방법은 개별 주변확률분포의 형태를 모를 경우에 유용한 방법이 될 수 있다.

일반적으로 추정해야 할 모수들의 갯수가 많아질수록 추정을 위해 많은 계산시간이 소요되는 EML방법에 비해서 IFM방법이나 CML방법과 같은 두 단계 추정법이 좀 더 간편한 방법이라고 할 수 있다. 특히 Joe와 Xu(1996)에 의하면 IFM방법이 다른 방법들에 비해서 훨씬 효율적인 방법이라고 주장한다. 따라서 본 논문의 실증분석에서는 IFM방법에 의해 코플러함수의 모수를 추정하고자 한다. IFM방법을 구체적으로 논의하면 다음과 같다.

식 (4.4)에서 코플러함수의 모수벡터를 θ , 개별 주변확률분포의 모수벡터를 ψ_i 그리고 전체모수벡터를 $\omega = (\psi_1, \dots, \psi_n, \theta)$ 라고 하고 전체 데이터행렬을 $\mathbf{X} = \{x_{it}\}_{n \times T}$ 라고 하면 로그우도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$l(\omega) = \sum_{i=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}; \psi_1), \dots, F_n(x_{nt}; \psi_n); \theta) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_{it}; \psi_i). \quad (4.14)$$

IFM방법은 식 (4.14)에서 보는 바와 같이 로그우도함수의 전체모수벡터를 개별 주변확률분포의 모수벡터와 코플러함수의 모수벡터로 분리할 수 있다는 점에 근거하여 다음과 같이 두개의 단계로 나누어 추정한다.

단계 1: 개별 주변확률분포의 모수벡터 ψ_i 를 최우추정법으로 추정한다.

$$\hat{\psi}_i = \operatorname{argmax} l^i(\psi_i) = \sum_{t=1}^T \ln f_i(x; \psi_i) \quad (4.15)$$

단계 2: 단계 1에서 추정한 $\hat{\psi}_i$ 하에서 코플러의 모수벡터 θ 를 최우추정법으로 추정한다.

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \operatorname{argmax} l^c(\theta) \\ &= \operatorname{argmax} \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}; \hat{\psi}_1), \dots, F_n(x_{nt}; \hat{\psi}_n); \theta). \end{aligned} \quad (4.16)$$

5. 코플러를 이용한 포트폴리오 VaR와 ES의 추정 및 사후검증

5.1. 코플러를 이용한 포트폴리오 VaR와 ES의 추정

두 개의 금융자산 A, B 로 구성된 포트폴리오를 고려하기로 한다. 이 포트폴리오의 초

기가치를 P_0 , 투자기간 말의 가치를 P_1 이라고 하면 다음의 관계가 성립한다.

$$P_1 = P_0(w_1e^X + w_2e^Y), \quad (5.1)$$

여기서 w_1, w_2 는 금융자산 A, B 의 각 투자비중을 나타내고 X, Y 는 금융자산 A, B 의 투자기간 동안의 각 수익률을 나타낸다. 따라서 투자기간 동안의 포트폴리오의 수익률은 다음과 같이 주어진다.

$$R_p = \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = \ln(w_1e^X + w_2e^Y). \quad (5.2)$$

식 (2.1)의 손실분포함수에서 정의된 신뢰수준 $100(1 - \alpha)\%$ 에서 VaR를 포트폴리오 수익률분포함수의 경우로 표현하면 다음과 같이 주어진다.

$$VaR_\alpha = P_0 \cdot r_\alpha, \quad (5.3)$$

여기서 $\alpha = P(R_p \leq -r_\alpha)$, 즉 $r_\alpha = -F_{R_p}^{-1}(\alpha)$ 이다.

식 (5.3)에서 주어진 VaR_α 를 구하기 위해서는 포트폴리오 수익률의 분포함수에서 α 번째 분위수를 계산하는 것이 필요하다. 그런데 이것은 금융자산 A, B 의 각 수익률 X, Y 의 결합확률밀도함수 $f(x, y)$ 를 코플러함수를 이용하여 나타낸 식 (4.4)를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha &= P(R_p \leq -r_\alpha) \\ &= P(\ln(w_1 e^X + w_2 e^Y) \leq -r_\alpha) \\ &= \iint_{\{(x,y):w_1e^X+w_2e^Y \leq -r_\alpha\}} f(x,y)dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{-r_\alpha - \ln w_1} dx \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{e^{-r_\alpha}}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} e^{-r_\alpha}\right)} c(F_X(x), F_Y(y))f_X(x)f_Y(y)dy \\ &= \int_0^{F_X(-r_\alpha - \ln w_1)} du \int_0^{F_Y(\ln\left(\frac{e^{-r_\alpha}}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} e^{F_X^{-1}(u)}\right))} c(u, v)dv \\ &= \int_0^{F_X(-r_\alpha - \ln w_1)} du \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \Big|_{v=F_Y(\ln\left(\frac{e^{-r_\alpha}}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} e^{F_X^{-1}(u)}\right))}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

여기서 $u = F_X(x)$, $v = F_Y(y)$ 이고 $F_X(x), F_Y(y)$ 는 수익률 X, Y 의 주변분포함수를 각각 나타낸다.

한편, 식 (2.2)의 손실분포함수에서 정의된 ES를 포트폴리오의 수익률분포함수를 사용

하여 위의 식 (5.4)를 얻는 과정과 같은 방식으로 계산하면 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 ES_\alpha &= E(-R_p | -R_p > VaR_\alpha) \\
 &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{-VaR_\alpha} -r F_{R_p}(r) dr \\
 &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{-r_\alpha - \ln w_1} f_X(x) dx \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\ln(\frac{e^{-r_\alpha}}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} e^{r_\alpha})} \ln(w_1 e^X + w_2 e^Y) c(F_X(x), F_Y(y)) f_Y(y) dy \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

5.2. 포트폴리오 VaR와 ES의 사후검증

본 논문에서 포트폴리오 VaR의 사후검증은 Berkowitz와 O'Brien(2002)에서 제시한 방법을 사용하기로 한다. 이 방법은 초과빈도, 초과규모, 평균초과규모 등을 통해 상호 비교한다. 여기서 초과빈도란 검증기간동안 실제 금융자산의 손실액이 VaR 추정값을 초과하는 회수를 말한다. 그리고 초과규모는 검증기간동안 발생한 실제 손실액과 VaR 추정값 간의 차이를 말하고 평균초과규모는 초과규모를 초과빈도로 나눈 값을 의미한다. 즉, 유의수준 α 에서 초과빈도, 초과규모 그리고 평균초과규모는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\text{초과빈도 : } V_\alpha^{freq} = \sum I_{\{X_{t+1} > \widehat{VaR}_{\alpha,t}\}}, \quad (5.6)$$

$$\text{초과규모 : } V_\alpha^{size} = \sum (X_{t+1} - \widehat{VaR}_{\alpha,t}) I_{\{X_{t+1} > \widehat{VaR}_{\alpha,t}\}}, \quad (5.7)$$

$$\text{평균초과규모 : } V_\alpha^{mean} = \frac{V_\alpha^{size}}{V_\alpha^{freq}}, \quad (5.8)$$

여기서 $I_{\{\cdot\}}$ 는 지표함수, X_{t+1} 은 $t+1$ 시점의 실제 손실액, 그리고 $\widehat{VaR}_{\alpha,t}$ 는 t 시점에서 예측한 $t+1$ 시점의 유의수준 α 에서 VaR 추정값을 나타낸다. 만일 VaR의 추정값이 금융자산의 실제 손실위험에 잘 적합된다면 초과빈도는 목표실패율에 근접하게 발생할 것이고, 평균초과규모는 그다지 크지 않을 것으로 기대된다.

한편, 본 논문에서 ES의 사후검증은 Embrechts 등(2005)에서 제시된 방법을 사용하기로 한다. 이 방법은 유의수준 α 에서 ES의 추정치 \widehat{ES}_α 에 대한 사후검증을 위해 다음과 같은 척도를 이용한다.

$$V_\alpha^{ES} = \frac{1}{n(K_\alpha)} \sum_{t \in K_\alpha} (X_{t+1} - \widehat{ES}_\alpha), \quad (5.9)$$

여기서 K_α 는 유의수준 α 에서 실제 손실액 X_{t+1} 이 VaR의 추정값 $\widehat{VaR}_{\alpha,t}$ 보다 큰 경우에 해당하는 시점들의 집합을 의미하고, $n(K_\alpha)$ 는 집합 K_α 에 속하는 시점들의 개수를 나타낸다.

6. 실증분석

본 논문의 실증분석을 위해 사용한 포트폴리오는 전체 상장기업 종목과 등록기업 종목으로 이루어진 시장포트폴리오이다. 이 때 보유기관의 위험자산 투자수익률은 상장기업

및 등록기업의 투자수익률을 대표하는 KOSPI지수 및 KOSDAQ지수를 로그차분하여 구하였고, 포트폴리오 투자수익률은 각각의 투자비중을 50%, 초기 포트폴리오 포지션 금액은 100억원으로 가정하였다.

어떤 금융기관이 상기와 같은 포트폴리오를 보유하고 있을 때 IMF 외환위기와 같은 극단적 상황에서 금융위험을 효율적으로 잘 관리하기 위해서는 어떠한 포트폴리오 VaR 및 ES의 방법이 적합한지를 분석하는 것이 필요하다. 이를 위해 1996년 7월 1일부터 1997년 6월 30일까지의 표본기간에 대해 전방일단계 예측방법(one-step ahead forecast method)으로 개별 주변분포함수 및 코플러함수의 모수를 추정하고, 이렇게 추정한 모수를 바탕으로 IMF 외환위기와 같은 금융위기에 의해 영향을 받기 시작한 1997년 7월 1일부터 1998년 2월 28일까지의 포트폴리오 VaR와 ES를 산출하고자 한다. 예측기간을 이와 같이 정한 것은 해당 기간의 포트폴리오 수익률의 변동성이 높아 금융위기 상황 하에서 EVT-코플러 방법의 유용성을 밝히기에 적합하다고 판단되기 때문이다.

6.1. 실증자료의 특성

그림 6.1은 KOSPI 주가지수와 KOSDAQ 주가지수의 일별수익률을 나타내고 있다. 이 그림에서 보듯이 각 주가지수의 일별수익률은 1997년 7월 1일부터 변동성이 서서히 커지고 있음을 알 수 있다. 이러한 현상이 발생할 경우 두 위험자산으로 투자 포트폴리오를 구성한 많은 기관 투자가 및 금융기관은 큰 손실을 입을 가능성이 높다. 특히, 전통적인 시장 위험관리 모형인 분산-공분산 모형은 실제위험량을 과소평가할 가능성이 높다.

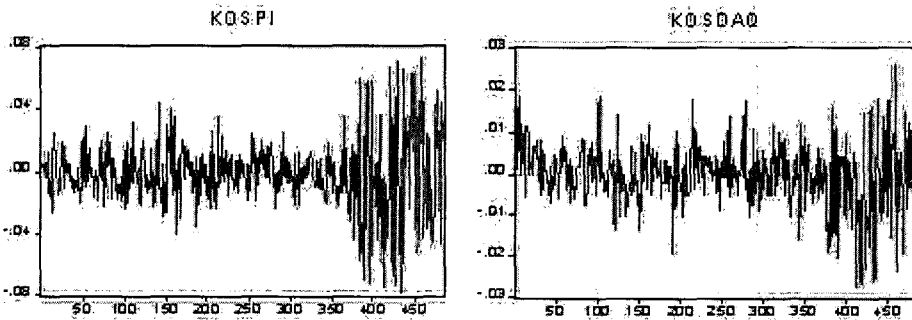


그림 6.1: 실증자료의 일별수익률

표 6.1은 KOSPI와 KOSDAQ 주가지수의 일별수익률들의 기초통계량을 보여준다. 먼저 평균과 표준편차를 살펴보면 외환위기 동안 두 위험자산 일별수익률의 평균은 감소하고 표준편차는 증가됨을 알 수 있다. 이는 외환위기 동안 평균 투자수익률은 감소하고 투자위험은 더욱 증가되었음을 의미한다. 다음으로 왜도와 첨도를 살펴보면 전체기간의 경우 두 위험자산의 일별수익률은 음 또는 양의 왜도와 3이상의 첨도를 가지고 있어 정규분포에 비해 꼬리 부분이 두터우며 왼쪽 또는 오른쪽으로 긴 꼬리를 가진 비대칭적 분포를 하고 있음을

알 수 있다. 이는 투자자들이 극단적 사건에 노출될 확률이 높아지고 있음을 의미한다.

표 6.1: 실증자료의 기초통계량

조사기간	전체기간		추정기간		예측기간	
	1996/7/1 - 1998/2/28		1996/7/1 - 1997/6/30		1997/7/1 - 1998/2/28	
위험자산수익률	KOSPI	KOSDAQ	KOSPI	KOSDAQ	KOSPI	KOSDAQ
	주가지수수익률	주가지수수익률	주가지수수익률	주가지수수익률	주가지수수익률	주가지수수익률
평균	0.082%	0.0006%	0.098%	-0.038%	-0.149%	-0.131%
표준편차	0.021	0.007	0.005	0.013	0.028	0.009
왜도	0.023	-0.459	0.131	0.292	0.041	-0.344
침도	5.558	4.712	3.867	3.656	3.453	3.583
Jarque-Berra	132.026 (0.000)*	76.104 (0.000)*	9.951 (0.006)*	9.372 (0.009)*	1.701 (0.427)	6.546 (0.037)

* 괄호 안의 수치는 p -값을 나타냄.

그림 6.1과 표 6.1에서 살펴본 바와 같이 KOSPI지수와 KOSDAQ주가지수의 일별수익률은 정규분포를 따르지 않고 있다. 이는 그림 6.2의 두 위험자산의 일별수익률에 대한 QQ 플롯을 통해서도 확인할 수 있다. 따라서 이 경우에 정규분포를 가정한 기존의 분산-공분산 방법에 의한 포트폴리오 VaR측정은 실제 포트폴리오위험을 과소평가할 것으로 우려된다.

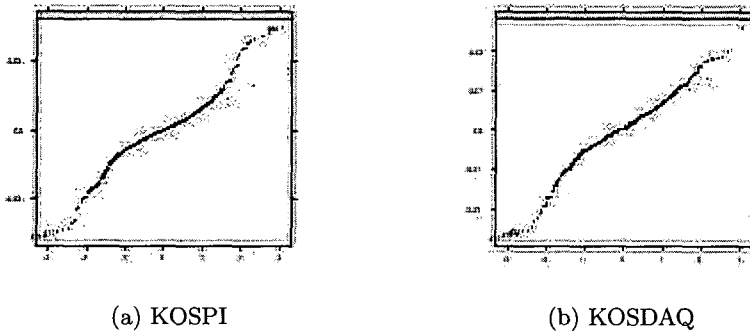


그림 6.2: 실증자료의 Q-Q 플롯

6.2. 주변분포함수와 코플러의 모수추정 결과

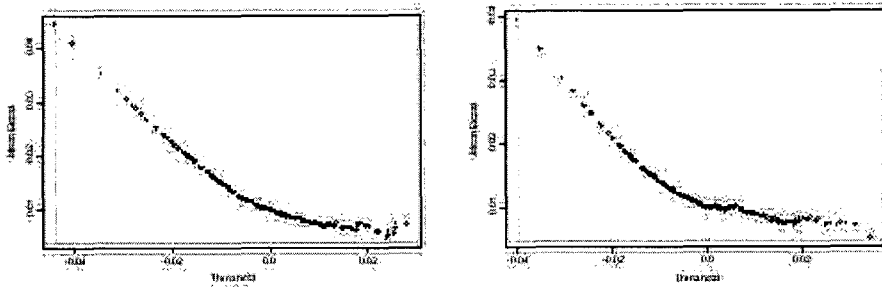
본 논문의 실증분석에서는 코플러의 모수를 추정하기 위해 IFM방법을 사용하기로 한다. 여기서 개별 주변분포함수로 GPD함수를 가정하고 코플러함수로는 Normal, Gumbel, Galambos 코플러 등을 적용하기로 한다.

그런데 GPD함수의 모수를 추정하기 위해서는 먼저 임계값을 선정해야 한다. 임계값을 선정하는 기준으로 흔히 사용하는 방법은 앞에서 언급한 바와 같이 ME플롯방식과 Hill 플

롯방식 등이 있는데 본 논문에서는 ME 플롯방식과 Hill 플롯방식을 병행하여 사용하기로 한다.

ME 플롯방식을 KOSPI와 KOSDAQ에 대해 1996년 7월 1일부터 1997년 6월 30일까지의 추정기간에 적용한 결과가 그림 6.3과 그림 6.4에 각각 나와 있다. KOSPI의 경우 그림 6.3에서 보는 바와 같이 왼쪽 꼬리(down tail) 부분과 오른쪽 꼬리(upper tail) 부분에서 양의 기울기가 시작되는 점이 각각 -0.0207 , 0.02151 이므로 이 값들을 왼쪽과 오른쪽 꼬리 부분의 임계값으로 각각 정하였다. KOSDAQ의 경우에는 오른쪽과 왼쪽 꼬리 부분에서 ME플롯방식으로 임계값의 설정이 다소 모호하여 Hill플롯방식을 함께 적용한 결과가 그림 6.5에 나와 있다. 그림 6.5에서 꼬리의 왼쪽과 오른쪽부분이 임계값으로 -0.0075 , 0.0075 를 각각 정할 때 꼬리지수가 안정적이 됨을 보게 된다.

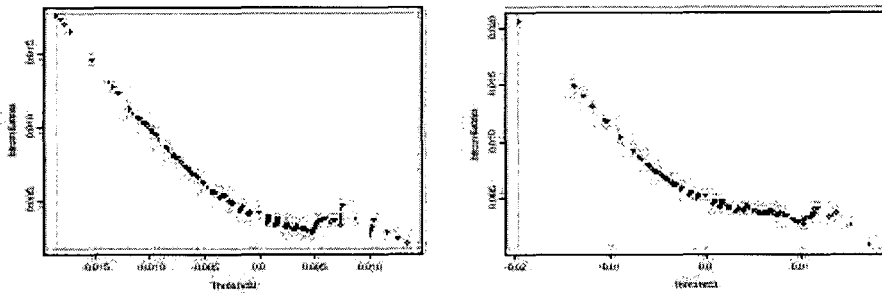
위에서 정한 임계값을 바탕으로 IFM방법에 의해 GPD함수의 모수들과 코플러함수들의 모수를 추정한 결과가 표 6.2와 표 6.3에 각각 나와 있다.



(a) 왼쪽 꼬리

(b) 오른쪽 꼬리

그림 6.3: ME 플롯방식(KOSPI)



(a) 왼쪽 꼬리

(b) 오른쪽 꼬리

그림 6.4: ME 플롯방식(KOSDAQ)

6.3. 포트폴리오 VaR의 추정 및 사후검증

표 6.4는 기존의 분산-공분산 방법과 EVT-코플러 방법을 이용하여 포트폴리오 VaR의 추정값과 Berkowitz와 O'Brien(2002)의 방법에 의한 포트폴리오 VaR의 성과를 비교분석한 결과를 보여주고 있다.

표 6.4에서 보듯이 목표 실패율이 1%일 경우 분산-공분산 방법에 의한 평균 포트폴리오 VaR값은 왼쪽 꼬리의 경우 2.467로 EVT-코플러 방법에 의한 평균 포트폴리오 VaR값인 4.557 ~ 4.945보다 낮으며 그 결과 실제 포트폴리오 손실금액이 포트폴리오 VaR를 초과하는 값의 평균인 초과정도는 26.887로 EVT-코플러 방법의 0.258 ~ 0.474보다 약 78배 만큼 높다.

또한 왼쪽 꼬리의 경우 분산-공분산 방법에 의한 실패율은 9.326%로 EVT-코플러 방법의 1.036% ~ 1.554%보다 높고, 오른쪽 꼬리인 경우도 실패율이 6.735%로 0% ~ 0.518%의 EVT-코플러 방법보다 높다.

이와 같이 분산-공분산 방법이 상대적으로 실패율이 높은 이유는 실제분포의 비대칭성과 꼬리 부분의 두터움, 그리고 꼬리분포 상호간의 의존성을 감안하지 못해 EVT-코플러 방법보다 실제 포트폴리오의 위험을 낮게 평가할 가능성이 높기 때문이다. 이러한 현상은 오른쪽 꼬리의 경우에서도 마찬가지로 나타난다.

표 6.4: 포트폴리오 VaR의 추정 및 사후검증

포트폴리오 VaR모형	왼쪽 꼬리				오른쪽 꼬리			
	평균포트폴리오 VaR	초과 빈도 (Vfreq)	평균 초과규모 (Vmean)	실패율	평균포트폴리오 VaR	빈도 (Vfreq)	평균 초과규모 (Vmean)	실패율
목표실패율=0.01, $w_1 = 0.5, w_2 = 0.5$								
분산-공분산 방법	2.467	18	26.887	9.326%	2.467	13	40.510	6.735%
GPD-Normal Copula	4.945	2	0.258	1.036%	5.403	0	0	0%
GPD-Gumbel Copula	4.648	3	0.364	1.554%	5.035	1	0.037	0.518%
GPD-Galambos Copula	4.656	2	0.424	1.036%	5.013	0	0	0
GPD-Hüsler/Reiss Copula	4.557	3	0.474	1.554%	4.959	0	0	0
목표실패율=0.05, $w_1 = 0.5, w_2 = 0.5$								
분산-공분산 방법	1.758	35	11.018	18.134%	1.758	20	20.802	10.362%
GPD-Normal Copula	3.017	13	0.885	6.735%	3.147	13	0.659	6.735%
GPD-Gumbel Copula	2.929	15	0.872	7.777%	3.011	14	0.790	7.253%
GPD-Galambos Copula	2.930	13	1.037	6.735%	3.037	14	0.732	7.253%
GPD-Hüsler/Reiss Copula	2.897	17	0.792	8.809%	2.947	14	0.839	7.253%

6.4. 포트폴리오 ES의 추정 및 사후검증

앞에서도 언급한 바와 같이, 일반적으로 VaR는 하위가법성을 만족시키지 못하므로 일관적이지 못하며 꼬리 부분의 위험을 과소평가하는 경향이 있다. 이러한 VaR의 약점을 보완해 주는 위험척도로서 ES를 추정하고 또한 ES의 성과를 Embrechts(2005)에 의한 방법을 통해 살펴보기로 한다.

표 6.4와 표 6.5에서 VaR와 ES의 추정값을 살펴보면 왼쪽 꼬리의 경우 목표실패율이 1%일 때 분산-공분산 방법의 경우 VaR값은 2.467인데 ES값은 2.784로 약 1.13배 정도의 차이를 보이고, EVT-코플러 방법의 경우 VaR값은 4.557 ~ 4.945인데 ES값은 5.633 ~ 6.088로 약 1.15 ~ 1.33배 정도의 차이를 보이고 있다. 이처럼 VaR값이 ES값에 비해서 낮은 현상은 목표실패율이 5%일 때 및 오른쪽 꼬리의 경우에도 마찬가지로 나타난다.

표 6.5: 포트폴리오 ES의 추정 및 사후검증

포트폴리오 VaR모형	왼쪽 꼬리		오른쪽 꼬리	
	평균 ES	V^{ES}	평균 ES	V^{ES}
목표실패율=0.01, $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$				
분산-공분산 방법	2.784	0.926	2.784	-1.783
GPD-Normal Copula	6.088	0	6.941	0
GPD-Gumbel Copula	5.633	0.884	6.284	-0.970
GPD-Galampos Copula	5.734	0.727	6.246	0
GPD-Hüsler/Reiss Copula	5.655	0.254	6.241	-0.545
목표실패율=0.05, $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$				
분산-공분산 방법	2.130	-0.638	2.130	0.816
GPD-Normal Copula	4.260	0.357	4.630	-0.765
GPD-Gumbel Copula	4.102	0.253	4.281	-0.427
GPD-Galampos Copula	4.002	0.164	4.281	-0.492
GPD-Hüsler/Reiss Copula	3.948	0.195	4.195	0.399

그러면 VaR가 실제 포트폴리오 위험을 ES보다 과소평가하고 있고, 또한 EVT-코플러 방법이 분산-공분산 방법에 비해 우수한지를 ES의 사후검증 결과를 통해 살펴보기로 한다.

표 6.5에서 V^{ES} 를 살펴보면 왼쪽 꼬리의 경우 목표실패율이 1%일 때 EVT-코플러 방법의 V^{ES} 의 절대값은 0 ~ 0.884로 분산-공분산 방법의 절대값 0.926보다 낮다. 이는 실제 관찰치가 VaR값을 초과할 때 ES값과 실제 손실금액과의 차이의 평균값이 상대적으로 적어 VaR가 ES에 비해 꼬리위험을 과소평가할 가능성이 있음을 의미한다. 또한 오른쪽 꼬리의 경우에도 EVT-코플러 방법의 V^{ES} 의 절대값은 0 ~ 0.970으로 분산-공분산 방법의 절대값 1.783보다 낮다. 이러한 현상은 목표실패율이 5%일 경우에도 마찬가지로 나타난다.

위의 논의를 바탕으로 다음과 같은 결과를 유추할 수 있다. 먼저 VaR가 ES에 비해 꼬리 위험을 과소평가하는 면이 있으므로 신뢰수준을 벗어난 극단적 손실 영역까지를 고려하는 ES도 함께 포함시켜 포트폴리오 위험을 관리하는 것이 바람직하다고 본다. 다음으로 포트

폴리오 ES를 추정할 경우 EVT-코플러 방법이 분산-공분산 방법에 비해 우수한 것으로 판단된다.

7. 결론

본 논문에서는 IMF 구제금융과 같은 금융위기 상황에서 분포의 비대칭성과 꼬리 부분의 두터움을 잘 반영할 수 있는 EVT-코플러 방법에 의해 산출한 포트폴리오의 VaR와 ES 값이 전통적인 방식인 분산-공분산 방법에 의해 산출한 VaR와 ES값보다 실제 포트폴리오 위험을 얼마나 잘 측정하는지를 사후검증을 통해 살펴보았다. 본 논문의 주요한 연구결과를 정리하면 다음과 같다.

첫 번째, KOSPI 및 KOSDAQ주가지수 일별수익률은 정규분포를 따르지 않으며 분포가 비대칭적이고 꼬리 부분이 두터운 형태로서 낮은 양의 꼬리의존성을 보여 기존의 방식인 분산-공분산 방법은 실제 포트폴리오 위험을 과소평가할 우려가 있다. 따라서 이러한 문제점을 해결할 수 있는 방안으로 EVT-코플러 방법이 요구된다.

두 번째, Berkowitz와 O'Brien(2002)의 방법에 의해 VaR의 성과를 비교분석한 결과 분산-공분산 방법이 EVT-코플러 방법에 비해 실패율이 상대적으로 높아 실제 포트폴리오 위험을 저평가할 가능성이 존재하였다. 따라서 분포가 비대칭적이고 꼬리 부분이 두터운 형태를 띠며 꼬리의존성이 존재할 경우 EVT-코플러 방법이 분산-공분산 방법에 비해 포트폴리오 위험관리에 보다 적합할 것으로 판단된다.

세 번째, VaR는 위험척도로서 하위가능성을 만족시키지 못하므로 일관적이지 못하고 또한 꼬리위험을 과소평가하는 경향이 있다. 이러한 VaR의 단점을 보완해 주는 ES의 성과를 Embrechts 등(2005)에 의한 방법을 통해 살펴보았다. 그 결과 EVT-코플러 방법에 의한 V^{ES} 의 절대값이 분산-공분산 방법의 절대값보다 작아 상대적으로 꼬리위험을 과소평가할 가능성이 있음을 알 수 있다.

이상의 논의 결과를 요약하면 포트폴리오위험을 관리하기 위한 위험척도로서 VaR와 ES를 함께 고려하는 것이 바람직하며 또한 VaR와 ES의 측정을 위해서 EVT-코플러 방법을 사용하는 것이 기존의 방식인 분산-공분산 방법보다 우월한 것으로 판단된다.

본 논문과 관련하여 향후 연구방향은 다음과 같다. 첫째, 본 연구는 꼬리의 결합분포에 초점을 두고 포트폴리오 VaR와 ES를 산출하였다. 그러나 보다 의미 있는 포트폴리오 위험척도를 산출하기 위해서는 주변분포의 꼬리 부분은 극단치분포를 가정하고, 가운데 부분은 정규분포를 가정한 후 코플러를 활용하여 VaR 및 ES를 산출할 필요가 있다. 둘째, 본 연구는 이변량 코플러함수를 활용하여 포트폴리오 위험량을 산출하였으나 다양한 금융자산·부채를 보유한 투자자 또는 금융기관에게 보다 의미 있는 시사점을 제공하기 위해 다변량 코플러함수를 활용한 연구가 필요하다고 본다

감사의 글

본 연구는 저자가 미국 North Texas 대학교에서 연구년을 지내는 동안에 이루어졌으며, 본 논문의 심사와 편집을 위해 애써주신 심사위원들과 편집위원께 감사드립니다. 아울러

본 논문의 실증분석을 위해 도움을 준 경상대학교 수산경영학과 문성주 교수에게도 고마움을 전합니다.

참고문헌

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M. and Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance*, **9**, 203-228.
- Balkema, A. A. and de Haan, L. (1974). Residual lifetime at great age. *Annals of Probability*, **2**, 792-804.
- Berkowitz, J. and O'Brien, J. (2002). How accurate are Value-at-Risk models at commercial banks? *Journal of Finance*, **57**, 1093-1112.
- Boyue, E., Durrleman, V., Nickeghbail, A., Riboulet, G. and Roncalli, T. (2000). *Copula for Finance - A Reading Guide and Some Application*, Working Paper.
- Bradley, B. O. and Taqqu, M. S. (2001). *Financial Risk and Heavy Tails*, Working Paper.
- Cherubini, U., Luciano, E. and Vecchiato, W. (2004). *Copula Methods in Finance*, Wiley.
- Danielsson, J. and de Vries, C. G. (1997a). Tail index and quantile estimation with very high frequency data, *Journal of Empirical Finance*, **4**, 241-257.
- Danielsson, J. and de Vries, C. G. (1997b). Value at Risk and extreme returns. In *Extremes and Integrated Risk Management* (ed. Embrechts, P.), 85-106, Risk Waters Group, London.
- Embrechts, P., McNeil, A. J. and Straumann, D. (1999). Correlation : Pitfalls and Alternatives, *Risk*, **5**, 69-71.
- Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls, *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, ed. M.A.H. Dempster, Cambridge University Press, Cambridge, 176-223.
- Embrechts, P., Lindskog, F., McNeil, A. (2003). Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, ed. S. Rachev, Elsevier, Chapter 8, 329-384.
- Embrechts, P., Kaufmann, R. and Patie, P. (2005). Strategic long-term financial risks: single risk factors, *Computational Optimization and Applications* **32**, 61-90.
- Fisher, R. A. and Tippett, L. H. C. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **24**, 180-190.
- Hill, B. M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution, *Annals of Statistics*, **3**, 1163-1173.
- Hosking, J. R. M. and Wallis, J. R. (1987). Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution. *Technometrics*, **29**, 339-349.
- Jenkinson, A. F. (1955). The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological events. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **81**, 158-172.
- Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman and Hall.
- Joe, H. and Xu, J. J. (1996). *The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models*, Dept. of Statistics, University of British Columbia, Tech. Rept. **166**.

- Longin, F. M. (1996). The asymptotic distribution of extreme stock market returns. *Journal of Business*, **69**, 383-408.
- Longin, F. M. (2000). From Value at Risk to stress testing: The extreme value approach. *The Journal of Banking and Finance*, **24**, 1097-1130.
- McNeil, A. J. and Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, **7**, 271-300.
- Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *Annals of Statistics*, **3**, 119-131.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **8**, 229-231.
- von Mises, R. (1936). La distribution de la plus grande de n valeurs. *Rev. Math. Union Interbalcanique*, **1**, 141-160. Reproduced in Selected Papers of Richard von Mises. *American Mathematical Society*(1964), **2**, 271-294.
- Yeo, S. C. (2006). Performance Analysis of VaR and ES based on Extreme Value Theory, *The Korean Communications in Statistics*, **13**, 389-407.

[2006년 6월 접수, 2006년 7월 채택]

Estimation and Performance Analysis of Risk Measures using Copula and Extreme Value Theory

Sung Chil Yeo¹⁾

ABSTRACT

VaR, a tail-related risk measure is now widely used as a tool for a measurement and a management of financial risks. For more accurate measurement of VaR, recently we are particularly concerned about the approach based on extreme value theory rather than the traditional method based on the assumption of normal distribution. However, many studies about the approaches using extreme value theory was done only for the univariate case. In this paper, we discuss portfolio risk measurements with modelling multivariate extreme value distributions by combining copulas and extreme value theory. We also discuss the estimation of ES together with VaR as portfolio risk measures. Finally, we investigate the relative superiority of EVT-copula approach than variance-covariance method through the back-testing of an empirical data.

Keywords: Risk Measure, Value at Risk, Expected Shortfall, Extreme Value Theory, Copulas, Back-testing

1) Professor, Department of Applied Statistics, Konkuk University, Seoul 143-701, Korea
E-mail: scyeo@konkuk.ac.kr