대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 16 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 16, No. 4, 345-366. Nov 2006

문제해결력 신장을 위한 Cabri3D의 교육적 활용

김 남 희*

본 연구에서는 3차원 공간도형의 학습에 유용한 동적 기하 소프트웨어인 Cabri3D 프로그램을 논의의 대상으로 하여 이를 공학적도구의 교육적 활용이라는 관점에서 수학 문제해결지도에 바람직하게 사용하는 방안에 대하여 살펴보았다. 예비수학교사들을 대상으로 학교수학에의 Cabri3D프로그램 활용에 관한 탐구 수업을 진행한 후, 중등수학의 지도에서 문제해결력 신장을 위해 이 프로그램이 효과적으로 활용될 수 있는 구체적인 사례들을 수집하였다. 폴리아가 제시하는 문제해결의 각 단계에 Cabri3D가 보조도구로서 유용한 역할을 할 수 있는 문제 사례와 그 활용 방법을 예시하면서 현장의 수학교사들이 공학적 도구를 수학교육에 활용하는 방법에 대한 바람직한 관점을 갖게 하는데 도움을 주고자 하였다.

Ⅰ. 서 론

본 논문에서는 최근 중등 수학 교사 교육에서 활발히 소개되고 있는 Cabri3D 프로그램을 논의의 대상으로 하여 이를 수학 문제해결지도 과정에 유용한 보조도구로 활용하는 교육적 사례를 탐색해보고자 한다.

우정호(1998)에 의하면, 오늘날 학교수학 교육과정은 문제해결능력과 태도의 개발을 수학교육의 궁극목표로 제시하고 있다(우정호, 1998: 71). 문제해결력의 육성은 우리나라 수학과 교육과정에서 제시하는 학교수학의 목표 측면에서 뿐 만 아니라 미국 수학교사 협의회에서 제안하는 학교수학의 규준 측면에서 중요하게 강조되고 있음은 잘 알려진 사실이다(교육부, 1997; NCTM, 1992, 2000). 한편, 본 논문의 연구주제와 관련하여 계산기, 컴퓨터 등의 공학적 도구의 적극적인 활용도 우리나라 수학교육과정의 교수-학습 방법과 NCTM(2000)의 '공학적 도구의 원리'의 제안을 통해 명시적으로 강조되고 있다. 그러나 공학적 도구의 적극적 활용은 실제 교육의 현장에서 문제해결교육과 독립적으로 접근되는 방법보다는 문제해결교육의 관점과 통합된 방법으로 구현될 때 그 교육적 효과가 극대화 될 수 있다고 할 수 있다.

최근 수학교육연구논문발표대회나 각종 교사연수 자료 혹은 수학교육과 관련된 저널에는 Cabri3D 프로그램을 소개하고 그 사용법을 안내하는 자료나 활용방법에 대한 연구논문들이 자주 다루어지고 있다. Cabri3D 프로그램에 대한 교사교육과 이 프로그램을 수업에 활용하려는 움직임이 날로 활발해지고 있는 것에 비해, Cabri3D를 수학교육적으로 의미있게 활용하는 문제에 대해서는 아직 체계적이고도 충분한 논

* 전주대학교, nhkim@jj.ac.kr
1) 현장의 수학교사들에게 잘 알려져 있는 것은 GSP, Cabri2와 마찬가지로, Cabri3D는 동적기하 소프트웨어로서 3차원 공간을 표현할 수 있어 공간도형의 학습에 유용한 프로그램이다(http://cabri.com참고).

의가 이루어져 있지 않은 것이 사실이다. 이에 본 연구에서는 Cabri3D 프로그램을 학교수학의 중요한 목표인 문제해결력의 신장과 관련하여 의미있게 활용할 수 있는 문제 사례와 그 활용방법을 찾아보고자 하였다.

먼저 예비수학교사들을 대상으로 Cabri3D 프로그램의 활용에 관한 탐구 수업을 진행한 후, 중등수학의 내용과 관련하여 문제해결력 신장을 위해 Cabri3D 프로그램이 효과적으로 활용될 수 있는 구체적인 사례들을 수집하였다. 연구자의 수업실행과정에서 얻은 경험과 예비수학교사들의 의견을 반영하여 문제해결의 각 단계에 Cabri3D 프로그램을 보조도구로 활용할 수 있는 의미있는 방법들을 탐색하고 그에 적합한 문제 사례와 활용방법을 예시하였다.

II. 연구 과정

1. 최근 수학교육의 동향 탐색

학교수학수업에의 공학적 도구 활용은 일찍이 NCTM의 제안이나 우리나라 제7차 수학교육과정에서 수학교육의 방법론적 측면의 시도로 적극 권장되어 왔다(NCTM, 1992, 2000; 교육부, 1997).

NCTM(2000)에서는 현대 정보화 사회에서 수학적 소양의 중요성이 더욱 증대되었음을 지적하면서 문제해결 능력을 강조하고, 수학 문제를 탐구하는 과정에서 계산기와 컴퓨터를 적절히 활용하도록 제안하고 있다. 우리나라의 수학교육과정도 최신 수학교육의 동향을 반영하여 <표 II-1>과 같이 공학적 도구의 활용 내용을 강화하여 제시하고 있음을 확인할 수 있다(교육부, 1997).

<표 II-1> 제 7 차 수학과 국민공통기본교육과정에 제시된 교수-학습 방법

(1) 교수 학습의 전 과정을 통하여 **적절하고 다양한 교육 기자재를 활용하여 학습의 효과를 높이도록 한다.**
(2) 교수 학습 과정에서 계산 능력 배양이 목표인 영역을 제외하고는 **복잡한 계산이나 수학적 개념 ,원리, 법칙의 이해, <u>문제 해결력 향상</u>** 등을 **위하여 가능하면 계산기나 컴퓨터를 적극 활용하도록 한다.**

(교육부, 1997: 86)

우리나라 교육과정에서 공학적 도구의 활용에 대한 제안에서 특히 주목할 것은 '문제해결력 향상'을 위하여 가능하면 계산기나 컴퓨터를 적극 활용할 것을 권장하고 있다는 것이다. 그러나 실제로 교육 현장에 공학적 도구를 문제해결력 향상에 활용하는 지도 지침이나 실행 사례가 충분히 소개되어 있지 못한 것이 현실이다. 이에 본 연구에서는 Cabri3D 수학프로그램을 문제해결력 신장을 위한 과정에 적극적인 보조도구로서 활용하는 사례와 그 활용방법에 대해 연구하고자 한다.

2. 교사 교육 자료의 실제 분석

학교수학의 교육과정에서 계산기, 컴퓨터 및 구체적 조작물의 활용이 적극 권장되면서 현장의 수학교사들에게 수학프로그램을 소개하고 그 사용법을 안내하는 자료나 활용방법에 대한 연구논문들이 자주 소개되고 있다.

특히, 도형 영역의 학습지도와 관련하여 2차원을 표현하는 기하소프트웨어인 GSP4와 Cabri2는 이미 현장에 많이 소개되어 수업에 활용하는 수학교사가 비교적 많은 편이다. 하지만 초등, 중등 교과서의 공간도형에 필요한 3차원 기하 소프트웨어는 아직 그다지 알려져 있지 않은 것이 사실이다. 본 논문에서 논의의

대상으로 한 Cabri3D 프로그램은 공간도형의 학습내용을 구체화할 수 있는 3차원 기하 소프트웨어로서 최근 1-2년 사이에 이 프로그램에 대한 교사들의 연구논문 발표와 교사 연수가 활발히 진행되고 있다. <표 Ⅱ-2>는 Cabri3D 프로그램 연수가 수학교사들을 위한 워크샵이나 전문성개발강좌에서 실시되고 있음을 보여주고 있다.

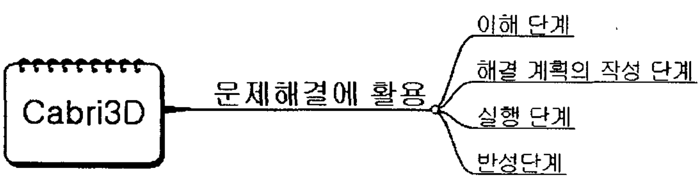
Cabri3D 프로그램을 배우는 현장의 수학교사들도 늘어나는 추세이고, 이를 수업에 활용하려는 움직임도 점차 활발해지고 있는 것에 비해, Cabri3D를 수학교육에 의미있게 활용하는 수학교육학적 관점에 대한 논의가 충분하지 못한 것이 사실이다. 따라서 학교수학의 중요한 목표인 문제해결력의 신장과 관련하여 Cabri3D를 수학교육에 효과적으로 활용하는 방법과 실행에 관한 논의는 현장 수학교육에 의미있는 기여를 할 수 있는 중요한 연구 내용이라 할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 사범대학 수학교육과의 예비수학교사들을 대상으로 한 강의 내용에서 Cabri3D를 중등수학에 활용하는 방법에 대해 논의하고, 중등학교 현장에서 다루는 학습내용을 토대로 수학 문제해결에 Cabri3D를 보조도구로서 활용할 수 있는 교수-학습 사례를 탐색해 보고자 하였다.

3. 예비 수학교사 교육 실행

연구자가 재직하고 있는 사범대학 수학교육과 3학년 학생들을 대상으로 2006년 '수학교육과 컴퓨터' 강좌시간을 이용하여 Cabri3D 프로그램을 소개하고 문제해결력 신장을 위한 Cabri3D의 교육적 활용이라는 주제로 3주간의 수업(총 9시간)을 진행하였다. 15명의 수강학생들과 함께 Cabri3D를 문제해결의 보조 도구로 활용할 수 있는 중등수학의 학습 내용을 탐색

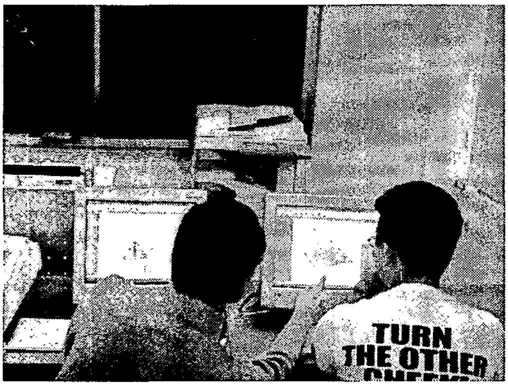
<표 Ⅱ-2> Cabri3D에 관한 연구논문 발표와 교사 연수 자료 현황

교사연수자료	사면체의 오심에 관하여(김현구, 2006)
	Cabri3D 워크샵(손대원 · 정선영, 2006b)
교사연구발표자료	Cabri3D를 이용한 3차원 공간작도(손대원 · 정선영, 2006a)
	Cabri3D를 이용한 공간도형 작도(윤삼열 외, 2005)
수학저널자료	2차원에서 3차원으로 확장한 기본 작도(윤삼열 외, 2006a)
	Cabri3D를 이용한 사면체의 오일러 직선(윤삼열 외, 2006b)
교사전문성개발강좌	3D기하 소프트웨어를 이용한 수학탐구(손대원 외, 2006)



[그림 Ⅱ-1] Cabri3D를 문제해결 지도에 어떻게 활용할 것인가?

하고, 수학 문제해결의 과정에서 Cabri3D를 문제해결의 어느 단계에서 어떤 방법으로 활용하는 것이 바람직한 지, 그 때에 유용한 교사의 발문은 어떤 것이 있을 수 있는지, 그 과정에서 제시될 수 있는 Cabri3D의 조작활동은 어떤 것인지 등에 대해 활발한 토론이 병행된 실습 위주의 수업을 진행하였다([그림 Ⅱ-2]~[그림 Ⅱ-3]참조).



[그림 Ⅱ-2] 예비수학교사들의 활동모습

[그림 Ⅱ-3] 3차원 도형의 작도에 대한 토론

예비수학교사들과 토론수업을 진행하면서 수학의 문제를 탐구하는 과정에 Cabri3D를 어떻게 활용하는 것이 바람직한 지에 대해 논의하고, 논의의 내용들을 폴리아가 제안하는 문제해결의 네 단계와 관련지어 생각해 보았다. 3주간의 수업 후에는 예비수학교사들에게 Cabri3D를 배우면서 자신에게 일어난 학습효과가 무엇이었는지, 그리고 문제해결의 각 단계에 이 프로그램이 어떤 긍정적인 역할을 할 수 있는 지에 대한 의견을 조사하였다. 연구자의 수업실행과정에서 얻은 경험과 예비수학교사들의 의견을 반영하여 문제해결의 각 단계에 Cabri3D 프로그램이 활용될 수 있는 구체적인 사례들을 수집하였다.

4. 공간 도형 학습의 교육적 효과

위의 수업을 실행하면서 예비수학교사들을 대상으로 학교수학의 도형학습에서 특히, 공간도형과 관련된 문제해결에서 겪었던 어려움이 무엇이었는지를 알아보았다. 간단한 질문지에 의견을 적게 하여, 그 결과를 분석한 결과 예비수학교사들은 자신의 경험을 토대로 학교수학의 도형학습에의 어려움을 다음과 같이 표현하고 있음을 확인하였다.

"지금까지 도형에 관한 수학내용을 학습할 때, 공간상의 도형을 배우는데 항상 교과서에 지면으로 나타난 그림이나 칠판에 평면적으로 그려진 그림에서만 학습을 주로 했기 때문에 내 머리 스스로 머리 속에 공간을 두고 입체도형과 도형들 사이의 관계를 상상해야 했다."

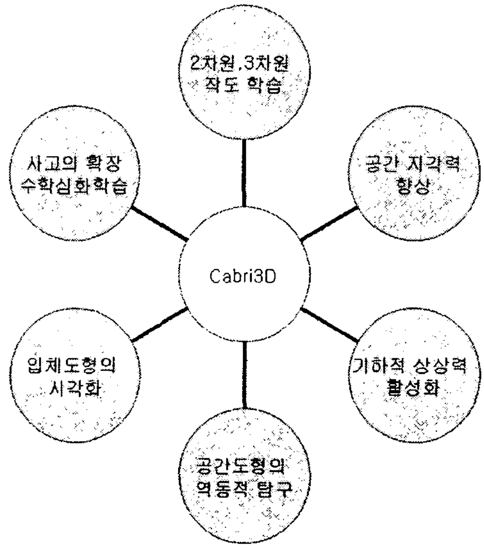
"이제까지 학교수학에서는 2차원의 도형문제는 그림을 통해 수월하게 다루어 온 반면, 3차원의 도형문제가 나오면 선생님께서 모형을 보여주지 않으시면 그것을 머리 속에서 이미지화해야 했다. 때론 평면에 그림 입체도형이 이해가 되지 않아 당황스럽고 머리 속이 혼란스러웠던 적이 많았다."

"과외를 하며 고등학생들을 오랫동안 가르쳐 보았는데, 학생들의 공간지각력이 많이 부족함을 항상 느껴왔다. 지면상에 그려진 그림을 입체로 이해하지 못하는 학생들도 많아서 힘들게

모형을 만들어서 지도하기도 했지만, 수학문제에 나오는 입체도형을 모두 모형으로 만들 수도 없는 일이라 어려운 점이 많았다".

"3차원의 공간세계에 우리가 살고 있기는 하지만, 수학문제에서 다루는 3차원의 문제는 2차원의 문제보다 늘 어려웠다."

위와 같은 의견을 제시했던 예비수학교사들은 3주간의 Cabri3D 탐구 수업을 통해 자신에게 일어난 학습효과, 새롭게 알게 된 점, 수학학습에 있어서의 개인적인 발전들을 이야기하였다. 연구자의 교수 경험과 예비수학교사들의 학습경험에 대한 의견을 토대로 Cabri3D 프로그램 활용이 학교수학의 공간도형학습에 주는 교육적 효과를 [그림 Ⅱ-4]과 같이 분석하였다.



[그림 Ⅱ-4] Cabri3D : 공간 도형 학습의 교육적 효과

<표 Ⅱ-3>은 예비수학교사들이 Cabri3D 탐구 활동을 한 후, 이 프로그램 활용이 학교수학의 공간도형 학습에 주는 교육적 효과에 대해 제시한 의견들 중 일부를 소개한 것이다.

<표 Ⅱ-3> Cabri3D를 도형 문제해결에 활용할 때 얻을 수 있는 교육적 효과

구분	이름(가명)	예비수학교사의 의견
1	박수경	2차원에서 3차원으로의 수학적 사고의 확장을 돕고, 수학하는 활동에 흥미를 불러일으켜 줄 수 있다. 3차원 문제해결에 기하프로그램을 활용하면서 공간지각능력이 많이 향상될 수 있다.
2	이성희	수학을 더 넓고 깊게 학습할 수 있는 기회가 제공될 수 있다. 또한 연역적인 증명의 결과에 대한 시각화로 증명내용에 대한 확신을 높여 오래 기억할 수 있도록 한다. 설명과 말로 글로만 보았던 증명이나 정리들을 직접 눈으로 확인하면서 학생들이 학습된 내용을 좀 더 오래 기억할 수 있도록 도움을 줄 수 있다.
3	정민훈	여러 가지 다른 방법으로의 다양한 시도를 빠르고 수월하게 할 수 있을 뿐 만 아니라 시각적인 이해도 높일 수 있다.
4	구병수	평면에서 배웠던 내용을 공간으로 확장하여 전개하는 경험 속에서 자그마한 수학적 발견의 기쁨을 줄 수 있다.
5	황숙현	우리가 생활하는 3차원 공간과 공간상의 도형에 대해 보다 의미있게 이해할 수 있다.

III. '문제해결'에의 Cabri3D활용

공간을 표현할 수 있는 동적 기하 프로그램인 Cabri3D는 2차원뿐만 아니라 3차원의 작도 학습을 용이하게 할 뿐만 아니라, 공간도형의 역동적 탐구를 통해 공간지각력과 기하적 상상력을 활성화시킬 수 있는 등 적지 않은 교육적 효과를 가지고 있다. 그러나 이것은 3차원을 탐구할 수 있게 하는 프로그램 자체의 특성에서 자연스럽게 나타날 수 있는 효과라고 볼 수도 있다. 따라서 연구자는 보다 더 넓은 관점에서, 의미있는 교육적 효과를 탐색하기 위해 학교 수학의 목표인 문제해결지도 관점에서 Cabri3D의 활용 가능성을 탐색하였다.

문제해결 교육의 핵심은 수학적 발견술의 습득이라고 할 수 있다. 발견술의 습득을 위해 폴리아(1957)는 문제해결의 이해, 해결 계획의 수립, 실행, 반성의 각 단계에서 교사가 사용할 수 있는 발문과 권고를 제시하고 있으므로 본 연구에서는 적절한 발문을 통해 기하적 사고력을 활성화시키고 이를 문제해결의 각 단계와 연결지어 지도해 볼 수 있는 내용을 찾아 [그림 III-1]과 같이 구체적인 사례로 분류하여 정리하였다.

현장의 수학교사들이 문제해결지도이론에 대한 이해와 더불어 Cabri3D를 수학 문제해결 지도에 유용한 보조도구로 적절히 활용할 수 있도록 하기 위해, 아래에서는 예비수학교사들과의 탐구활동 수업에서 다룬 수학 문제를 구체적으로 예시하여 문제해결의 각 단계에서 유용한 발문과 연결지어 그 전개 과정에 대한 설명을 제시하고자 한다.

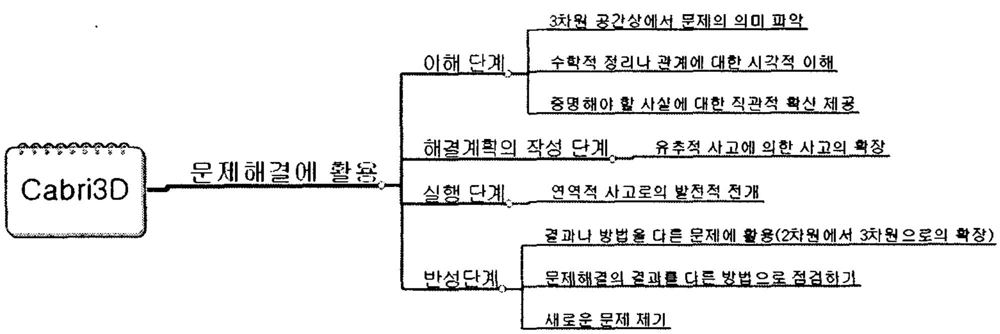
1. '문제의 이해' 단계

가. 3차원 공간상에서 문제 의미 파악

공간에 관련된 수학적 개념을 다루는 문제를 명확하게 이해하기 위한 보조도구로 Cabri3D를 효과적으로 활용하면 문제의 이해 단계가 지필 환경에서보다 훨씬 용이해 질 수 있다. 도형과 관련된 문제를 해결할 때, 폴리아가 제시하는

그림을 그려 보아라

라는 발문은 문제의 이해 단계에서 매우 유용하게 작용하는 발문이다. 그러나 이 발문은 그 동안 2차원의 평면도형과 관련된 문제에서는 적극적으로 사용되어 온 반면, 실제로 교실수업에서 공간에 관한 문제에는 그다지 활용되어 오지 못했던 것이 사실이다. 3차원의 문제 내용을 그림으로 표현하려면 원근법과 점선을 활용한 2차원적인 그림을 종이에 그리거나 아니면 직접 실물을 제작하여야 하는 어려움이 있다. 수학교실에서도 칠판이나 노트에 3차원의



[그림 III-1] Cabri3D를 문제해결 지도에 활용할 수 있는 사례

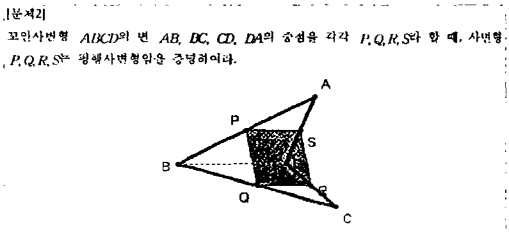
그림을 그려보게 하는 활동은 쉽게 이루어지기 어렵기 때문에 공간에 관한 문제는 그 동안 학생들 각자의 공간적 지각력과 상상력에 의존하는 경우가 대부분이었다고 할 수 있다.

공간에 관한 문제의 이해를 돕기 위해 Cabri3D가 활용가능한 문제 사례는 수학교과서에서 많이 찾아 볼 수 있다. 공간에 관한 대부분의 수학문제는 수학교사가 이 프로그램을 활용하여 그림을 보여줌으로써 문제의 뜻을 학생들이 시각적으로 확인할 수 있도록 해 줄 수 있다. 예를 들어, 중학교 수학에서 다루어지는

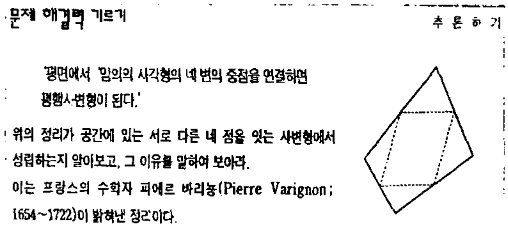
'평면에서 임의의 사각형의 네 변의 중점을 연결하면 평행사변형이 된다'

라는 문제를 고등학교 수학 II에서 공간으로 확장하여 제시한 다음의 문제를 생각해 볼 수 있다.

'공간에서 서로 다른 네 점을 잇는 사변형의 중점을 연결하면 평행사변형이 된다'


[문제2]
꼬인사변형 $ABCD$의 변 AB, BC, CD, DA의 중점을 각각 P, Q, R, S라 할 때, 사변형 P, Q, R, S는 평행사변형임을 증명하여라.

[그림 III-2] 공간에 관한 문제
(손대원 외, 2006: 676)


문제 해결력 기르기

추론하기

'평면에서 '임의의 사각형의 네 변의 중점을 연결하면 평행사변형이 된다.'

위의 정리가 공간에 있는 서로 다른 네 점을 잇는 사변형에서 성립하는지 알아보고, 그 이유를 말하여 보아라.

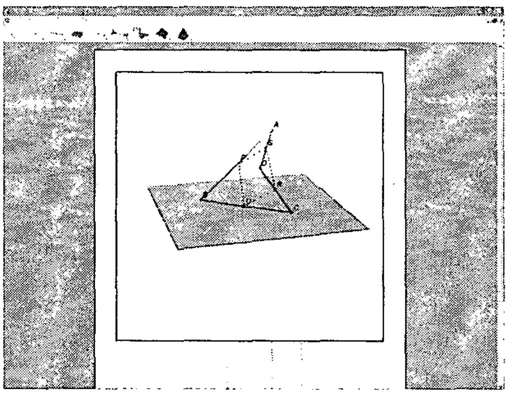
이는 프랑스의 수학자 피에르 바리뇽(Pierre Varignon; 1654~1722)이 밝혀낸 정리'이다.

[그림 III- 3] 수학 II 교과서 사례
(우정호 외, 2002: 241)

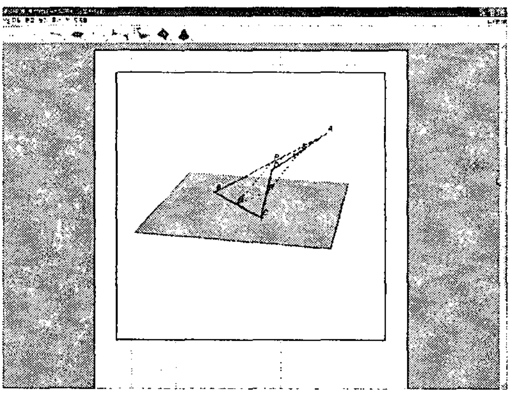
위 문제의 뜻을 이해시키는 단계에서 교사는

그림을 그려 보아라

라는 발문을 활용해 [그림 III-4], [그림 III-5]과 같이 Cabri3D를 활용한 조작 활동의 시각화 와 동적인 탐구활동을 제공하면 학생들에게 문제의 뜻을 시각적, 직관적으로 쉽게 파악할 수 있는 기회를 제공할 수 있다. 특히 [그림 III-5]는 문제의 내용을 역동적인 변화과정 속에서 탐구할 수 있게 해 주므로 지필환경에서보다 공간 위에서의 도형 개념을 보다 의미풍부하게 학습할 수 있도록 하는 경험을 제공한다.



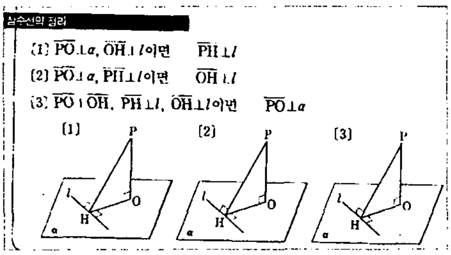
[그림 III-4] Cabri3D의 시각화



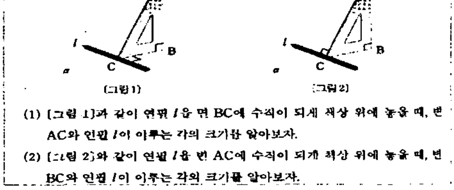
[그림 III-5] [그림 III-4]를 회전하며 관찰

나. 수학적 정리나 관계에 대한 시각적 이해

공간에 있는 두 직선의 위치 관계, 두 평면의 위치 관계 혹은 '삼수선의 정리'등을 이해하려면 그 동안 학생들은 [그림 Ⅲ-6]과 같이 교과서에 평면화하여 그려진 그림으로 이해하는데 만족해야 했다. 공간에서의 관계를 직관적으로 이해시키려면 수학 선생님들은 연필이나 막대를 이어서 문제의 그림과 유사한 구체적인 실체를 제공해야 하는 어려움을 항상 겪곤한다. 우리 생활의 주변은 모두 3차원 공간의 사물들로 둘러싸여 있지만, 수학교과서의 내용에 걸맞는 실제적 모델을 찾아 보여주기에는 교실 내부의 물리적 환경이 매우 단순하다. 교실에서 활용될 수 있는 물건들 예컨대, 삼각자나 연필을 활용하여 [그림 Ⅲ-7]과 같이 삼수선에 대한 탐구활동을 해보는 것도 가능하지만, 공간과 관련된 수많은 수학적 정리나 관계를 파악하기 위해선 보다 적극적인 보조도구가 필요한 것이 사실이다.



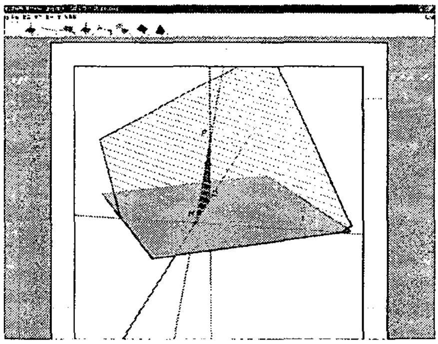
[그림 Ⅲ-6] 삼수선의 정리
(이강섭 외, 2002: 211)



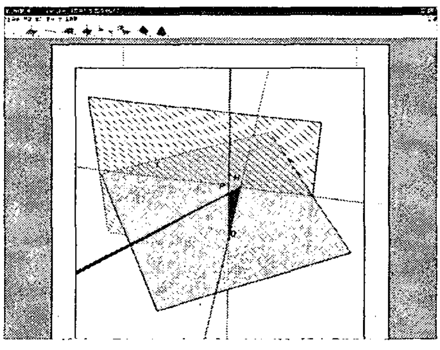
[그림 Ⅲ-7] 삼수선의 정리 탐구활동
(이강섭 외, 2002: 210)

현장의 수학교사들은 수학 수업에 보조가 되는 다양한 교수-학습 자료의 개발이 최근 활발히 진행되고 있지만, 공간도형의 자료에는 조금 부족한 면이 있음을 지적한다. 윤삼열 외(2005)는 공간에서 '삼수선의 정리'를 표현하기에는 칠판에 그림을 그리는 정도의 표현가지고는 지도하는데 많은 아쉬움이 있음을 이야기한다. 따라서 Cabri3D를 공간과 관련된 수학적 관계나 정리를 구체화하여 시각적으로 이해시키기 위한 보조도구로 활용하는 것은 교육적으로 매우 의미있는 접근방법이라고 할 수 있다.

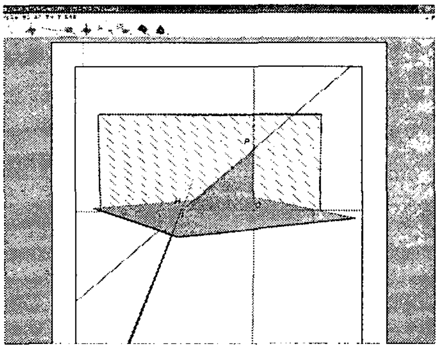
다음의 예는 삼수선의 정리를 Cabri3D를 이용하여 공간상에 표현해 보고 역동적인 탐색을 통해 [그림 Ⅲ-6]에 제시된 세 가지 경우의 예를 직관적, 시각적으로 이해하는 활동과정이라고 할 수 있다.



[그림 Ⅲ-8] [그림 Ⅲ-6]의 (1) 시각화

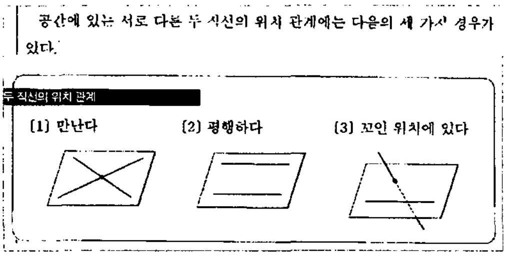


[그림 Ⅲ-9] [그림 Ⅲ-6]의 (2) 시각화

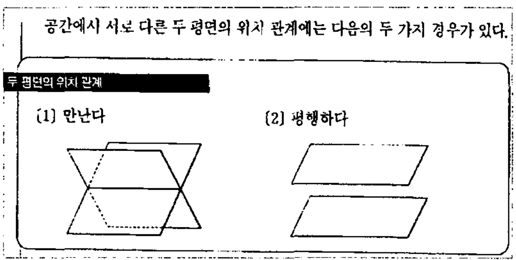


[그림 Ⅲ-10] [그림 Ⅲ-6]의 (3) 시각화

고등학교 수학에서 학습하는 공간에서 직선의 위치관계나 평면의 위치관계도 위와 마찬가지로 3차원 공간상에서의 역동적인 탐색이 가능하다.

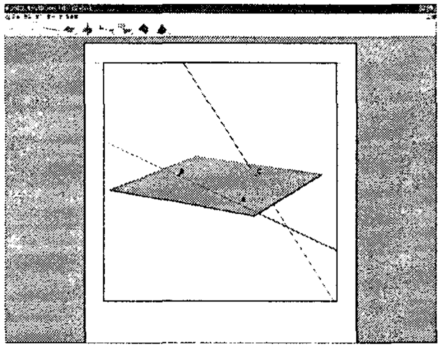


[그림 Ⅲ-11] 공간에서 두 직선의 위치관계
(이강섭 외, 2002: 202)

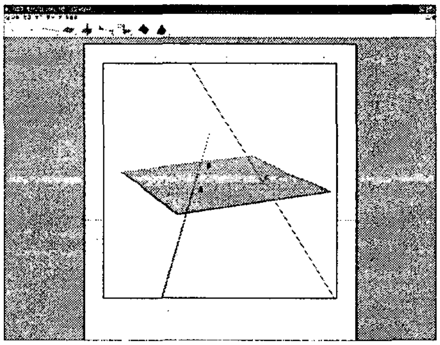


[그림 Ⅲ-12] 공간에서 두 평면의 위치관계
(이강섭 외, 2002: 204)

아래의 예는 Cabri3D를 활용하여 꼬인 위치의 개념을 시각화하고 공간에서 꼬인 위치에 있는 두 직선은 서로 만나지 않음을 입체적으로 관찰해 볼 수 있는 기회를 제공한다.



[그림 Ⅲ-13] 꼬인 위치의 시각화



[그림 Ⅲ-14] 회전에 의한 관찰

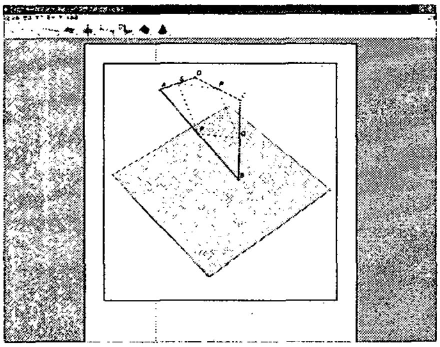
다. 증명해야 할 사실에 대한 직관적 확신 제공

증명문제의 경우에 증명해야 할 사실에 대한 직관적 확신은 연역적인 증명과정에 생명력을 불어넣을 수 있다. [그림 Ⅲ-2], [그림 Ⅲ-3]과 관련된 문제가 다음과 같은 증명문제로 제시되었을 경우를 생각해 보자.

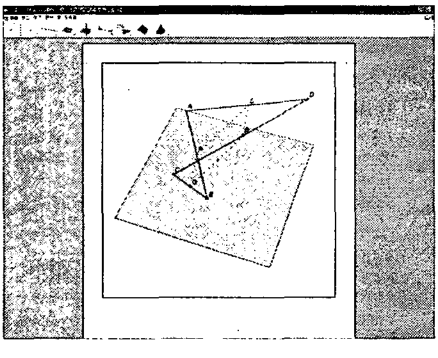
'공간에서 서로 다른 네 점을 잇는 사변형의 중점을 연결하면 평행사변형이 됨을 증명하여라'

위 문제에 대한 연역적 증명은 삼각형의 중점연결정리를 이용하여 완성된다. 그러나 증명해야 할 사실이 참임을 직관적으로 확신하게

되면 연역적 증명의 결과를 받아들이고 이를 입증하는 과정에 활력을 불어넣을 수 있게 된다. [그림 Ⅲ-15], [그림 Ⅲ-16]과 같이 Cabri3D를 활용하여 공간에서 임의의 서로 다른 네 점을 잇는 사변형에 대한 탐색을 시행하게 되면 학생들은 문제에 제시된 결론이 참임을 시각적으로 확신하게 되고, 이 때 교사는 학생들의 시각적 확신을 수학의 연역적 증명과정으로 자연스럽게 안내하는 기회를 잘 포착해 낼 수 있다.



[그림 Ⅲ-15] 제시 문제의 시각화



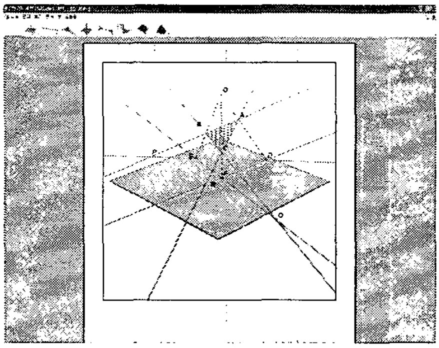
[그림 Ⅲ-16] 회전하여 입체적으로 관찰

위와 같이 역동적인 시각화에 의한 직관적 활동을 경험하는 것은 증명해야 할 사실의 이해 단계에서 매우 효과적이다. 그러나 수학교사들이 명심해야 할 것은, 이러한 과정은 '문제의 이해' 단계에서 효과적이지만 그 과정이 곧 '문제해결의 실행' 을 의미하는 것은 아니라는 사실이다. 문제해결의 실행은 삼각형의 중점연결정리를 통해 완성된다. 교사들이 Cabri3D를 증명학습에 활용할 때 주의해야 할 것은 '동적인 시각적 경험' 만을 제공하는데 그치지 않고 '증명의 필요성 인식' 나아가 '증명과정의 완성'으로까지 수업을 끌고 나아가는 것이다. 그렇지 않고 정교하게 만들어진 Cabri3D파일로 증명해야 할 사실만을 보여주는데 그치면 학생들은 컴퓨터 화면에서 시각적으로 확인하였기 때문에 증명이 불필요하다고 생각하게 되기 쉽다. 기하의 증명은 오직 연역적 사고에 의해서 가능할 뿐이다. 기하 탐구학습 환경에서 시각적으로 보고 직관적으로 이해한 사실은 사고에 의한 연역적 증명에 의해 정당화되는 것이다. 따라서 연역적 기하에서 필요한 '증명의 필요성' 인식의 문제를 수학교사가 주의깊게 다룰 수 있다는 전제하에, 위와 같이 Cabri3D로 증명 이전의 직관적 확신을 구하는 활동은 학생들의 이해를 보다 풍부하게 해줄 수 있다. 다음은 손대원 외 (2006)가 고등학교 수학 Ⅱ의 내용에서 다루어 질 수 있는 증명문제로서 문제의 이해를 위해 3차원적인 시각화가 필요함을 언급한 문제이다.

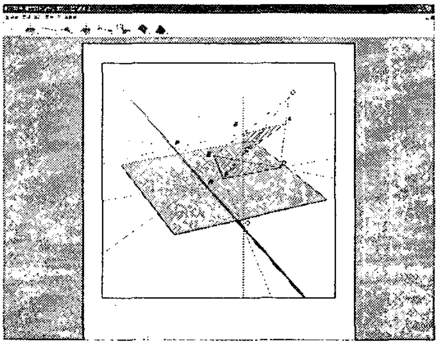
같은 평면 위에 있지 않은 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$에 있어서 꼭지점 A와 D, B와 E, C와 F를 연결하는 세 직선이 한 점 O에서 만난다. 이 때 변 AB와 DE, BC와 EF, AC와 DF가 각각 점 P,Q,R에서 만나면 P,Q,R은 한 직선 위에 있음을 증명하여라.

[그림 Ⅲ-17] 공간도형 관련 증명문제 (손대원 외, 2006: .676)

[그림 Ⅲ-18], [그림 Ⅲ-19]는 Cabri3D로 위 문제의 가정에서 주어진 모든 조건들을 시각화하고, 증명해야 할 결론을 시각화한 활동으로써 증명해야 할 사실에 대한 직관적 확신을 제공하는 과정에 유용하게 활용될 수 있다.



[그림 Ⅲ-18] 증명문제: '가정'의 시각화



[그림 Ⅲ-19] 증명문제: '결론'의 시각화

<표 Ⅲ-1>은 예비수학교사들이 Cabri3D 탐구활동을 한 후, 문제의 이해 단계에 Cabri3D를 활용했을 때 얻을 수 있는 교육적 효과에 대해 제시한 의견 들 중 일부를 소개한 것이다.

2. '해결계획의 작성' 단계

가. 유추에 의한 사고의 확장

유추(Analogy)란 유비추리(類比推理) 곧, 부분적인 유사성을 바탕으로 어떤 대상에 대하여 성립하는 성질이나 어떤 관계체계로부터 그와 유사한 대상의 성질이나 관계체계를 추측하게 하며, 부분적인 닮음을 근거로 하여 어떤 상황에 대한 개념적 지식이 다른 유사한 상황으로 전이되어 관련된 개념적 지식을 형성하게 하는 형태의 개연적 추리이다. 유추는 우리의 일상적인 사고나 대화에서는 물론, 수학과 과학 및 예술에서의 문제해결과 창의적 사고에 충만해 있다.

유추는 수학적 발견과 문제해결을 위한 강력

<표 Ⅲ-1> Cabri3D를 문제의 '이해' 단계에 활용할 때의 교육적 효과

구분	이름 (가명)	예비수학교사의 의견
1	강성빈	중학교 7-나 단계에서 입체도형을 배우기 시작할 때, 3차원으로 그린 그림을 시각적으로 보여주면 문제에 대한 이해속도가 빠를 거라는 생각이 들었습니다.
2	구병수	학습 내용에 대한 흥미유발 및 학습내용의 암시를 위해 배울 내용의 일부를 미리 제작하여 제시해주면 도움이 될 것이다
3	김성욱	학생들이 입체도형의 문제를 접했을 때에 학생들은 그 입체도형 자체를 머릿속에 떠올리지 못하고 그렇기 때문에 무엇을 구해야 하는지도 파악하지 못하는 경우가 많습니다. 이러한 경우 Cabri3D를 이용해서 문제의 입체도형을 그려서 보여주고 다양한 각도에서 그 입체도형을 관찰하게 하여 '평면(종이)에 그려놓은 입체도형'이 아닌 '사실적인 입체도형'을 경험시켜 줄 수 있습니다.
4	박수경	전통적인 방법으로 칠판에 그림을 그리는 것보다 프로그램을 활용하여 보다 사실적으로 표현해 주므로 문제에 대한 직관적인 이해도를 높여줄 수 있을 것입니다.
5	설연미	공간상의 문제 내용을 쉽게 이미지화 하는데 도움을 줄 수 있습니다.
6	김정이	입체와 관련된 도형의 내용은 그냥 교과서에 그림만 주고 이해해야 하는 경우가 많은데 교사가 입체적으로 시각화한 사례를 들어 '여기서 의미하는 내용은 바로 이런 것이다'라고 설명을 해 준다면 학생들이 내용을 이해하는 데 더 도움이 될 듯 하다.
7	설연미	공간에 대한 내용은 보는 방향이나 각도에 따라 다르게 보일 수 있는데, 프로그램을 활용하면 교과서에 고정된 그림으로 나타난 것을 다양한 방향에서 탐색해 볼 수 있게 한다.

한 사고전략이다. 폴리아는 문제해결 계획을 세우고자 할 때, 다음과 같은 발문과 권고를 구사할 것을 요구한다.

> 만일, 제기된 문제를 풀 수 없다면 먼저 어느 정도 그와 관련된 문제를 풀어 보아라.
> 보다 접근하기 쉬운 관련된 문제를 생각해 낼 수 있는가?
> 이와 유사한 문제를 생각해 볼 수 있는가?

유추는 문제해결에서 제시된 문제를 해결할 때 보다 단순한 유사한 문제의 풀이 방법이나 그 결과를 이용하여 원래의 문제를 해결할 수 있게 하는 도움을 제공한다. 이를테면 평면에서 성립하는 성질로부터 유추에 의해 공간에서 성립하는 성질을 추측할 수 있다. 학교수학에서 다루는 수학의 내용들 중에는 유추에 의한 발견을 통해 문제해결의 실마리를 얻을 수 있는 경우의 예를 쉽게 찾아볼 수 있다. 폴리아(1957)가 그의 문제해결론에서 유추적 사고와관련된 3차원 공간도형의 문제로서 예시하고 있는 아래의 문제를 생각해 보자.

> 사면체의 무게중심 알아보기[2]

유추적 사고에 익숙한 교사라면 학생들이 사면체의 무게중심의 위치를 금방 정확하게 판단하기 어렵다는 것을 알고 자연스럽게

> 주어진 문제보다 단순하면서 유사한 문제를 알고 있는가?

라는 발문을 던질 수 있다. 이 때

> 사면체는 삼각형과 유사하다.

라는 생각에 주목하면서 학생들과 삼각형의 무게중심을 통해 사면체의 무게중심을 찾아보는 과정을 실행해 볼 수 있다.

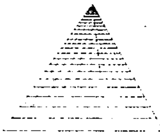
[그림 Ⅲ-20] 선분의 무게중심

[그림 Ⅲ-21] 삼각형의 무게중심 탐색

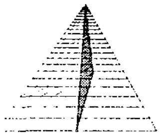
선분의 무게중심은 선분의 중점이다([그림 Ⅲ-20] 참조). 삼각형을 한 변과 나란하게 무한히 얇게 썰었다고 생각하면 각각의 조각의 무게중심은 그 선분조각의 중점이므로 삼각형의 무게중심은 중선 위에 있게 된다([그림 Ⅲ-21] 참조). 따라서 삼각형의 무게중심은

> 세 중선의 교점이 되지 않을 수 없다.

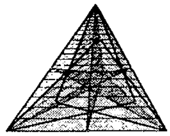
라는 결론을 얻게 된다. 마찬가지로 생각하여, 사면체를 한 면에 평행하게 무한히 얇게 썰었다고 가정하자([그림 Ⅲ-22] 참조).



[그림 Ⅲ-22]



[그림 Ⅲ-23]



[그림 Ⅲ-24]

거기서 생기는 모든 삼각형의 무게중심은 한

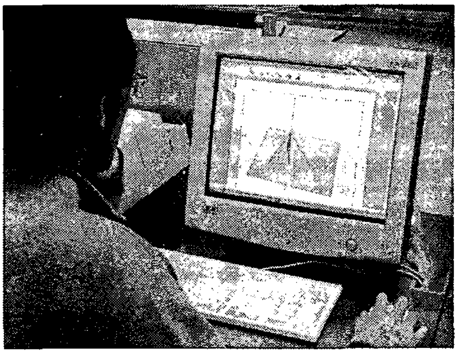
---

2) 평면도형에서 일어나는 삼각형의 성질들이 사면체에서도 나타나는지를 알아보는 것은 아주 흥미로운 일이다. 특히 우리나라 교육과정에서 언급하고 있는 삼각형의 오심은 좋은 과제가 된다. 이러한 사면체의 오심 탐구는 더욱 다양한 삼각형의 중심으로 발전할 수 있고 새로운 수학적 사실을 확인할 수 있는 주제이다(김현구, 2006: 94).

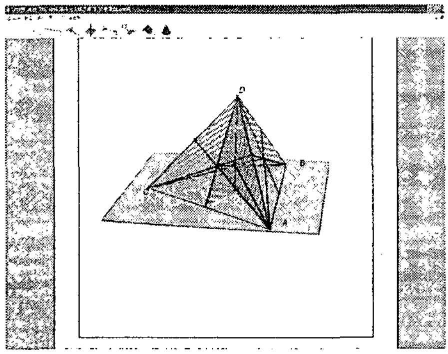
모서리의 중점과 그와 마주보는 모서리로 이루어진 삼각형의 면 위에 있다([그림 Ⅲ-23] 참조). 사면체에서 그러한 삼각형의 면은 여섯 개 있으며 그 각각은 모두 사면체의 무게중심을 포함한다([그림 Ⅲ-24] 참조). 따라서 사면체의 무게중심은

> 그러한 여섯 개의 삼각형 면의 교점이 되지 않을 수 없다

는 추측을 할 수 있게 되는 것이다. Cabri3D는 1차원, 2차원으로부터 유추한 추측에 대한 시각화를 가능하게 해 줄 수 있다. 특히, 위에서 내린 결론 즉, '한 모서리의 중점과 그와 마주보는 모서리로 이루어진 삼각형 6개는 모두 한 점에서 만난다'라는 추측에 대한 확신의 정도를 높여줄 수 있다. [그림 Ⅲ-24]는 공간도형을 점선과 원근법을 활용해 2차원에 그린 것으로 고정된 한 면 만을 보게 해 주는 반면, [그림 Ⅲ-26]과 같이 Cabri3D를 이용한 탐구활동은 사면체를 다양한 방향과 각도에서 관찰하면서, 한 모서리의 중점과 그와 마주보는 모서리로 이루어진 삼각형과 이들 6개의 삼각형의 교점에 대한 시각적 이해를 꾀할 수 있는 장점이 있다.



[그림 Ⅲ-25] 사면체의 무게중심: 예비수학교사의 실습활동 모습



[그림 Ⅲ-26] 사면체의 무게중심 시각화 (사면체를 회전시켜가며 탐색 가능)

<표 Ⅲ-2>는 예비수학교사들이 Cabri3D 탐구활동을 한 후, 문제해결 계획의 작성단계에서

<표 Ⅲ-2> Cabri3D를 문제해결 '계획의 작성' 단계에 활용할 때의 교육적 효과

구분	이름 (가명)	예비수학교사의 의견
1	박민수	학생의 상상에서만 애매하게 활동이 일어나는 것이 아니라 시각적으로 확인하게 해줌으로써 학생의 수학 문제해결 작업이 보다 현실적이고 실질적인 의미 속에서 진행될 수 있다.
2	김민지	도형과 관련된 문제를 해결하기 쉽지 않을 때 도형을 그려보면서 문제해결의 아이디어(실마리)를 찾아낼 수 있다.
3	설연미	3차원 도형의 관계를 시각화하는 과정 속에서 자신이 머릿속으로 생각하고 있는 아이디어가 맞는지 또는 자신이 미처 생각하지 못했던 도형의 특성이 또 무엇이 있는지를 파악해 낼 수 있다.
4	이리라	시각화된 자료를 탐색하게 함으로써 학생들에게 문제해결의 방법을 미리 알려주지 않고도 학생 스스로가 올바른 방법을 찾아갈 수 있도록 하는 기회를 제공해 줄 수 있다.
5	최홍석	문제해결의 방법을 구상한 후, 자신의 예상과 추측을 즉시 시각적으로 확인해 볼 수 있다.

Cabri3D를 활용했을 때 얻을 수 있는 교육적 효과에 대해 제시한 의견들 중 일부를 소개한 것이다.

3. '실행' 단계

앞에서 다루어졌듯이 Cabri3D는 문제의 이해 단계나, 해결 계획의 작성 단계에서 실행을 위한 풍부한 아이디어를 제공하고, 시각화에 의한 수학적 사실의 확신을 제공한다. 사실, 문제해결의 실행 단계는 사고에 의한 연역적인 과정으로 이루어지기 때문에 Cabri3D는 문제해결의 실행 단계에서 중추적인 역할을 하지는 않는다고 볼 수 있다. 앞에서 다룬 사면체의 무게중심에 관한 추측도 Cabri3D를 통해 사면체의 무게중심의 존재성에 대한 확신을 제공받을 수 있지만, 무게중심의 위치를 수학적으로 구하는 것은 실행단계에서 별도로 행해져야 하는 대수적 조작이다. 실제로, 김현구(2006)는 사면체의 무게중심을 해석기하적으로 접근하여 좌표로 구하는 과정을 실행하였다. 이것은 Cabri3D에서의 무게중심의 존재성을 시각적으로 확인하는 것과는 별도로 행해지는 수학적 처리 과정이라고 할 수 있다. 다시 말하면, Cabri3D는 문제해결의 '실행'단계에 이르기까지의 과정에서 보조적인 역할로서 훌륭한 도구이지만 그 자체의 조작 활동이 수학 문제해결의 실행으로 대치될 수는 없다는 것이다. [그림 III-26]의 사례도 역동적 시각화에 의한 직관적 활동의 경험일 뿐, 이것이 곧 문제해결의 '실행' 을 의미하는 것은 아님이 명백하다. 중요한 것은 수학교사들이 Cabri3D에서의 시각화나 조작활동을 문제해결의 실행단계로 발전적으로 연결시켜 나갈 수 있어야 한다는 것이다.

4. '반성' 단계

폴리아(1957)는 어떤 문제라도 문제가 해결된 후에는 반드시 다루어야 할 무엇이 남아있기 마련이라고 했다. 그는 반성단계의 중요성에 대해 특히 강조를 하였는데, 반성단계에서의 충분한 연구와 통찰을 통해 풀이를 개선할 수도 있으며, 결과나 논증과정을 검토하면서 풀이에 대한 이해를 증진시킬 수도 있다고 하였다. 또한 문제해결의 결과를 다른 방법으로 구해보거나, 문제해결의 결과를 보다 넓은 범위나 차원으로 확장, 일반화하는 것도 가능함을 강조하였다. 여기서는 문제해결의 '반성'단계에서 결과나 방법을 다른 문제에 활용하거나, 문제해결의 결과를 다른 방법으로 점검할 때, 새로운 문제를 제기할 때 Cabri3D를 적절하게 활용할 수 있는 사례를 제시해 보고자 한다.

가. 결과나 방법을 다른 문제에 활용 (2차원에서 3차원으로의 확장)

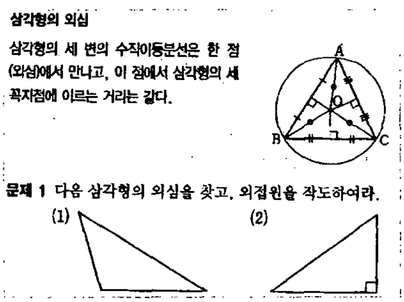
우리나라 교육과정에서 2차원의 작도 내용은 중학교 수학에서 교과서에 명시적으로 지도되고 있지만 3차원의 작도는 사실상 다루고 있지 않다. 우리가 살아 숨쉬는 세계는 3차원의 공간세계이므로 실세계에 대한 공간적 지각력과 공간적 상상력의 신장을 위해 3차원의 작도를 생각해 보는 것은 교육적으로 의미있는 일이다. 특히 우리나라 수학교육과정에서 강조하고 있는 '문제해결력'의 육성을 생각해 볼 때, 문제해결의 반성단계에서 적절한 발문을 제시하면 학생들은 2차원의 작도과정을 3차원의 작도과정으로 자연스럽게 연결지어 생각할 수 있는 기회를 제공받을 수 있다. 이를 위해 수학교사는 폴리아가 문제해결의 반성단계에서 자주 사용하길 권장하는 아래의 발문을 유용하게 활용 할 수 있다.

문제의 결과나 방법을 다른 문제에 활용할 수는 없을까?

3차원의 작도와 관련하여 2차원의 작도내용

을 3차원으로 확장해서 생각하는 것은 너무나 자연스러운 일이다. 손대원 · 정선영(2006)이 말하였듯이, 중학교 교육과정의 삼각형의 오심문제를 사면체로 확장하여 생각하고 3차원으로 확장한 사면체에서도 오심을 다루는 문제들을 살펴볼 수 있다면 학생들이 좀 더 수학을 흥미롭게 생각하게 될 뿐 만 아니라, 수학 내용상의 연계성 강화 및 실생활에 유용한 공간에 대한 지각력 향상에도 큰 도움이 될 것이다.

예를 들면 우리나라 중학교 8-나 단계 수학에서 지도되는 삼각형의 외심을 작도하는 문제는 이 후의 수학학습에서 공간도형을 배우게 될 때 사면체의 외심을 구하는 문제로 확장될 수 있다.



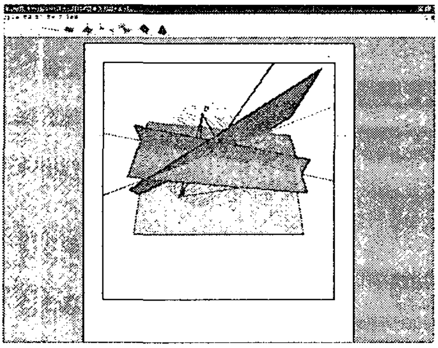
[그림 Ⅲ-27] 삼각형의 외심
(강옥기 외 2인, 2001: 55)

사면체의 외심에 관한 문제의 해결 계획을 작성하는 과정에서는 2차원에서의 삼각형의 외심을 구하는 과정을 토대로 한 유추적 사고가 유용하게 작용하게 된다. Cabri3D는 유추적 사고에 의한 사면체의 외심에 관한 아이디어를 3차원 공간상에 시각화해주기 때문에 기존의 지필환경에서 기하적 상상력에 의존하였던 것을 구체적으로 조작하고 직관적으로 이해할 수 있는 학습의 장을 제공한다. [그림 Ⅲ-28]은 Cabri3D에서 각 모서리의 수직이등분면의 교점을 찾아 외심을 시각화한 것이다. 6개의 모서리의 수직이등분면을 모두 작도하여도 무방하지만 교점을 생성하기 위한 최소한의 개수로 수직이등분면 3개를 작도하여 외심을 찾은 화면이다. 특히 Cabri3D에서 사면체의 외심을 작도하면 [그림 Ⅲ-29], [그림 Ⅲ-30]처럼 사면체의 크기와 모양을 바꿔볼 수 있으므로 외심이 사면체의 내부, 외부에 있을 조건을 탐색하기 적합하다. 이는 삼각형에서 외심이 삼각형의 내부, 외부, 삼각형 위에 있을 조건에 대한 학습내용을 그대로 3차원에서 적용한 것으로서, [그림 Ⅲ-29], [그림 Ⅲ-30]의 예는 개념의 비본질적인 요소를 변화시켜가면서 수학적 개념이 갖는 불변의 성질을 분석해 보는 학습 원리인

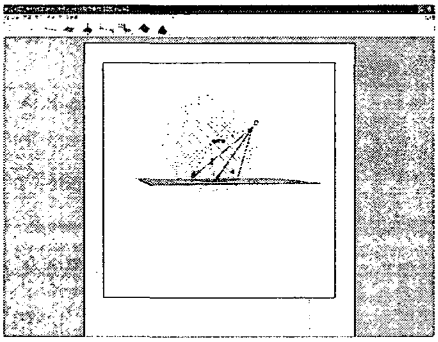
<표 Ⅲ-3> 2차원에서 3차원으로의 확장

	2차원 (평면)	3차원 (공간)
주어진 도형	삼각형	사면체
접하는 도형	외접원	외접구
외심	세 변의 수직이등분선의 교점	6개의 모서리의 수직이등분면의 교점
외심의 성질	외심에서 삼각형의 세 꼭지점에 이르는 거리는 같다.	외심에서 사면체의 네 꼭지점에 이르는 거리는 같다.

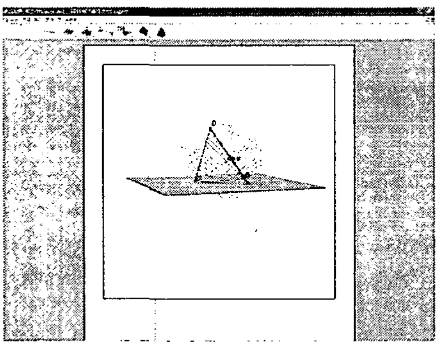
Dienes의 수학적 다양성의 원리가 잘 적용된 예로 해석할 수도 있다(황혜정 외 5인, 2001: 175).



[그림 Ⅲ-28] 사면체의 외심 작도



[그림 Ⅲ-29] 외심: 사면체의 외부에 존재



[그림 Ⅲ-30] 외심: 사면체의 내부에 존재

사면체의 내심, 무게중심, 수심, 방심에 대한 작도도 위에서 다룬 방법과 마찬가지로 2차원에서 다루었던 삼각형의 오심의 내용을 토대로 유추적 사고에 의한 확장을 통해 해결가능하다.

나. 문제해결의 결과를 다른 방법으로 점검하기

문제해결에서 만족스러운 풀이를 찾았다하더라도 다른 풀이를 탐색해 보는 것은 흥미로운 일이다. 이에 대해 폴리아는 다음과 같이 말한다.

> 우리는 물체를 두 가지 감각을 통해 지각하기를 원하듯이 어떤 이론적 결과의 타당성을 서로 다른 두 가지 방법으로 유도하여 확신하기를 원한다. 물건을 보고 난 후에 만져보고 싶듯이, 한 가지 방법을 알고 나면 또 다른 방법을 찾아보고 싶게 마련이다(Polya, 2002: 93)

따라서 폴리아는 문제해결의 반성단계에서 '결과를 다른 방법으로 점검하기'를 중요한 사고전략으로 강조하고 있는데, 이와 관련하여 교사가 유용하게 사용할 수 있는 발문은 아래의 두 가지이다.

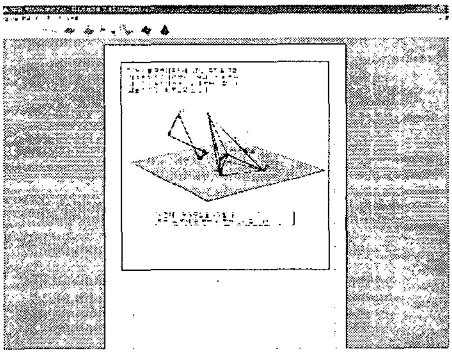
> 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가?
> 그것을 한 눈에 알 수 있는가?

Cabri3D를 활용하면 공간도형과 관련된 문제의 해결을 시각화된 또 다른 방법으로 확인해 볼 수 있는 훌륭한 기회를 제공한다. 예를 들면, 앞에서 다룬 사면체의 무게중심에 관한 문제에서 Cabri3D를 이용해 무게중심의 존재성을 시각적으로 확인하고 무게중심의 좌표를 해석기하적으로 구하는 과정을 실행한 후에도, 무게중심을 또 다른 방법으로 해석하여 확인해 보는 활동이 가능한 것이다.

문제 3 $\triangle ABC$에서 무게중심을 G라 할 때, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$임을 보여라.

[그림 Ⅲ-31] 삼각형의 무게중심의 성질: 벡터 개념 활용 (우정호 외 5인, 2002: 275)

고등학교 수학 Ⅱ에서 학습하는 벡터 개념을 활용하여 무게중심이 갖는 성질을 학습한 후에, 동일한 문제해결과정을 사면체의 무게중심에 관한 문제에 적용해 보는 것이 가능하다. 물론 기존의 수업환경에서도 사면체에서도 벡터의 합이 0이 됨을 대수적 조작에 의해 증명할 수 있지만, 아래의 [그림 Ⅲ-32]와 같이 Cabri 3D에서 시각적으로 벡터를 합하여 네 벡터의 합이 0 이 됨을 직관적으로 이해할 수 있도록 설명할 수 있다면 문제의 결과에 대한 학생들의 확신이 보다 증가될 것이다.



[그림 Ⅲ-32] 벡터 합에 의한 무게중심 확인

3차원의 도형과 관련된 문제의 해결에서

결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가?
그것을 한 눈에 알 수 있는가?

라는 발문을 던졌을 때, Cabri3D에서의 활동이 기존의 지필환경에서 다루기 어려웠던 시각적이고 직관적인 방법을 제공해 준다는 점에서 그 교육적 활용이 긍정적으로 평가된다.

다. 새로운 문제 제기

문제를 해결하고 나면 현재 문제해결의 결과를 통해 새로운 문제를 제기해 볼 수 있다. 새로운 수학적 발견은 이전에 해결한 문제로부터 새로운 문제를 제기하면서 비롯되었다는 사실을 수학의 역사에서 많이 찾아볼 수 있다. Cabri3D를 통해 공간도형의 시각화가 가능하므로 학생들은 공간도형에서 성립되는 새로운 사실들을 추측하고 확인해 볼 수 있는 기회를 가질 수 있다. 예를 들어, 삼각형의 오심과 관련된 수학적 사실을 가지고 사면체의 오심과 관련된 수학적 사실들을 찾아보는 것이다.

삼각형의 오심과 관련하여 중학교 수학수준에서 학습될 수 있는 수학적 사실 중의 하나로 오일러의 직선에 관한 수학적 성질을 생각해 볼 수 있는데 그 내용은 다음과 같다.

삼각형의 외심, 무게중심, 수심은 일직선상에 있고(그 직선을 오일러 직선이라 한다), 무게중심은 외심과 수심을 잇는 선분을 1:2로 내분한다.

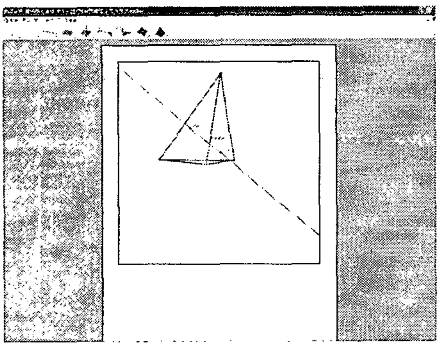
앞에서 삼각형의 오심의 작도과정을 사면체의 오심의 작도로 확장하여 생각한 것과 마찬가지로, 삼각형의 오일러 직선에 관한 수학적 사실을 토대로 하여 교사가 학생들에게 다음과 같은 공간상의 새로운 문제를 제기해보는 것은 자연스럽다.

사면체의 외심, 무게중심, 수심은 일직선상에 있는가?

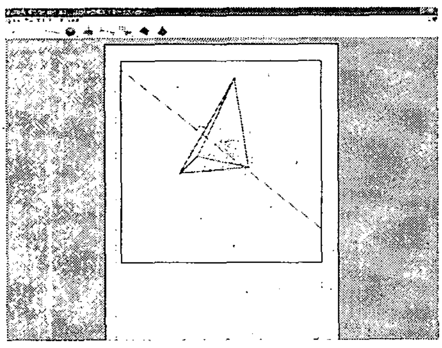
사면체의 무게중심은 사면체의 외심과 수심을 잇는 선분을 1:2로 내분하는가?

사실, 지필환경에서는 2차원 도형인 삼각형에서의 수학적 사실들로부터 유추하여 3차원으로 확장한 새로운 추측을 제기하여도 이를 수학적으로 엄밀히 증명하기 이전에 새로운 추측에 대한 확신을 구할 방법을 찾기는 매우 어려웠다. 그러나 Cabri3D를 활용하면 위와 같은 새로운 문제제기에 의한 추측을 시각화하여 추측한 사실이 참이 될 수 있는지에 대한 직관적 확신을 제공해 줄 수 있다. [그림 Ⅲ-34]는 삼각형의 외심, 무게중심, 수심의 작도방법을 활

용하여 사면체의 외심, 무게중심, 수심을 작도하고 세 점을 직선으로 연결한 그림으로서 사면체에서도 삼각형에서와 마찬가지로 외심, 무게중심, 수심이 일직선상에 있음을 시각적으로 확인해 본 활동이다. 또한 [그림 Ⅲ-35]는 평면에서 컴파스로 원을 그리는 것과 마찬가지로 공간에서 무게중심을 중심으로 하고 수심을 지나는 구(수심과 무게중심까지의 거리가 반지름의 크기)를 작도하면 외심이 작도한 구 위에 있음을 확인하여 사면체의 무게중심이 외심과 수심을 잇는 선분을 1:1로 내분함을 시각적으로 확인하는 활동이다. 이 활동에서 학생들은 3차원 공간에서는 2차원 평면에서 성립되었던 결과들이 그대로 유지되지 않는 경우도 있음을 발견할 수 있게 된다.



[그림 Ⅲ-34] 사면체에서 외심, 무게중심, 수심이 일직선상을 지남을 확인



[그림 Ⅲ-35] 무게중심: 외심과 수심을 잇는 선분을 1:1로 내분함을 확인

수학교사나 학생들은 위와 같은 시각적 확인 활동을 통해 앞에서 제기한 새로운 추측은 즉,

사면체의 외심, 무게중심, 수심은 일직선상에 있는가?

사면체의 무게중심은 사면체의 외심과 수심을 잇는 선분을 1:2로 내분하는가?

를 다음과 같이 보다 수정된 새로운 문제로 개선하여 제시할 수 있게 된다.

사면체의 외심, 무게중심, 수심은 일직선상에 있음을 증명하여라.

사면체의 무게중심은 사면체의 외심과 수심을 잇는 선분을 1:1로 내분함을 보여라.

Cabri3D를 활용해 공간상에서 사면체를 관찰하여 증명해야 할 사실에 대한 직관적인 확신을 가지고 연역적 증명과정을 실행하게 되면, 공간도형에 관한 수학적 사실을 발견하고 증명하는 과정이 자연스럽게 완성될 수 있게 된다. 위의 사례와 같이 Cabri3D가 문제해결의 반성단계에서 적절히 활용하게 되면 새로운 추측에 대한 직관적 확신을 시켜주는 도구로서 훌륭한 보조역할을 수행할 수 있다. 수학학습자는 이러한 도구를 통해 새로운 수학적 사실을 능동적으로 발견해 나가고 연역적으로 증명해 나가는 과정을 보다 용이하게 수행할 수 있게 될 뿐 만 아니라 시각화에 의한 직관적 확신을 토대로 하여 수학하는 즐거움, 발견하는 즐거움을 충분히 느끼게 될 것이다.

반성단계에서 새로운 문제제기는 귀납적 사고와 유추적 사고가 중요한 역할을 한다. 귀납적 사고와 유추적 사고는 항상 참이 보장되지는 않는 개연적인 추리로서 연역추리의 보충을 필요로 하지만 지식의 창조와 개발 및 다양한

문제해결이 이를 통해 이루어지기 때문에 그 중요성에 대하여는 수학교육적으로 이미 많은 강조가 되어 왔다(우정호, 2000: 337-354). Cabri3D는 귀납적 사고나 유추적 사고에 의한 공간(3차원)에 관한 새로운 추측들을 시각적이고 직관적인 방법으로 검토해 볼 수 있게 하는 기회를 제공할 수 있다. 따라서 교사는 공간도형에 관한 수학적 사실을 지도할 때, 연역적 사고에 의한 증명을 도입하기 이전에 추측된 사실에 대한 수정, 보완 나아가 추측된 사실에 대한 직관적 확신의 기회를 제공하는 교육적 수단으로 Cabri3D를 잘 활용한다면 학생들의 문제해결 지도에 적지않은 교육적 효과를 얻을 수 있을 것이다.

<표 Ⅲ-4>는 예비수학교사들이 Cabri3D 탐구활동을 한 후, 문제해결의 반성단계에서 Cabri3D를 활용했을 때 얻을 수 있는 교육적 효과에 대해 제시한 의견 들 중 일부를 소개한 것이다.

Ⅳ. 결 론

본 연구에서는 수학프로그램의 교육적 활용에 초점을 두고 최근 중등수학교사교육에서 활발히 소개되고 있는 Cabri3D 프로그램을 논의의 대상으로 하여 이를 수학 문제해결지도 과정에 유용한 보조도구로 바람직하게 활용하는 방안에 대하여 살펴보았다.

Cabri3D는 그동안 학교수학에서 쉽게 표현할 수 없었던 3차원 공간의 표현과 작도를 용이하게 할 뿐 만 아니라, 공간도형의 역동적 탐구를 통해 공간지각력과 기하적 상상력을 활성화시키고 3차원 공간도형의 문제를 심화하여 다룰 수 있게 하는 교육적 효과를 가지고 있다. 그러나 이러한 교육적 효과는 3차원을 탐구할 수 있게 하는 프로그램 자체의 특성에서 자연스럽게 나타날 수 있는 것이라고 볼 수도

<표 Ⅲ-4> Cabri3D를 문제해결의 '반성'단계에 활용할 때의 교육적 효과

구분	이름 (가명)	예비수학교사의 의견
1	강성빈	우선 수학문제의 결과에 대한 점검을 시각적으로 해 줄 수 있고, 다른 방법으로 접근해 볼 수 는 없을까 라는 발문으로 새로운 작도 순서나 과정을 생각해 보게 하는데 도움을 줄 수 있다. 학생들의 사고가 2차원에 머무르는 것이 아니라 3차원까지 확장하여 활성화될 수 있다.
2	구병수	평면에서의 작도를 응용하여 공간에서는 어떻게 적용될 지 확장하여 생각해 볼 수 있게 한다.
3	김지민	3차원 도형의 작도를 가능하게 하므로 자신의 풀이 결과가 정말로 맞는 것인지 직접 프로그램의 조작활동을 통해 확인해 봄으로써 즉각적인 피드백에 의한 수정과 보완이 가능하다. 또한 문제에서 주어진 조건을 변형하였을 때에는 결과가 어떻게 달라지는지를 역동적인 시각화에 의해 관찰해 볼 수도 있다.
4	김성욱	현재의 문제해결 방법을 유사한 다른 도형 문제에 적용해 보거나, 3차원 도형에 관한 새로운 문제를 제기하고 그 결과를 탐색해 보는 과정이 수월하다.
5	박수민	2차원 도형에서 3차원 도형으로의 확장을 직접 경험해 봄으로써 나아가 n차원 도형으로까지의 문제확장에 대해 사고하는 과정에 도움을 줄 수 있다.
6	주설희	대수적으로 구한 결과, 이론적으로 증명한 결과가 옳은지 프로그램상에서 시각적으로 확인해 볼 수 있다.
7	최홍석	3차원 공간에서는 2차원 평면에서 성립되었던 결과들이 그대로 유지되지 않는 경우도 있음을 발견하게 한다(예, 사면체의 오일러 직선의 내분)

있다. 따라서 연구자는 보다 더 넓은 관점에서, 의미있는 교육적 효과를 탐색하기 위해 학교 수학의 목표인 문제해결지도 관점에서 Cabri3D의 활용 가능성을 탐색하였다.

먼저, 예비수학교사들을 대상으로 Cabri3D 프로그램 탐구활동 수업을 진행하면서, 수학문제를 해결하는 과정에 Cabri3D를 어떻게 활용하는 것이 바람직한 지에 대해 논의하고, 논의의 내용들을 폴리아가 제안하는 문제해결의 네 단계와 관련지어 분석해 보았다. 연구자의 수업실행과정에서 얻은 경험과 예비수학교사들의 의견을 반영하여 문제해결의 각 단계에 Cabri3D 프로그램이 활용될 수 있는 구체적인 사례들을 수집하였다. 그리고 폴리아가 제시하는 문제해결의 네 단계를 토대로 수집된 사례들을 구분하였다.

본 논문에서는 문제해결의 각 단계에서 Cabri3D가 중등수학에 의미있게 활용될 수 있는 문제 사례를 제시하였다. 또한 문제해결적 사고를 활성화시키는 적절한 발문을 연결하여 현장의 수학교사들이 Cabri3D를 문제해결지도 관점에서 유용하게 활용할 수 있게 하는 예시자료를 제공하고자 노력하였다. 그 결과, 문제의 이해 단계에서는 3차원 공간상에서 문제의 의미 파악, 수학적 정리나 관계에 대한 시각적 이해, 증명해야 할 사실에 대한 직관적 확신의 과정에 Cabri3D프로그램에 의한 활동파일을 학습의 보조자료로 유용하게 활용할 수 있음을 확인하였다. 또한 문제해결계획의 작성단계에서는 유추적 사고에 의한 사고의 확장과정에, 문제해결의 실행 단계에서는 아이디어의 발전적 전개에, 문제해결의 반성단계에서는 결과나 방법을 다른 문제에 활용하거나 문제해결의 결과를 다른 방법으로 점검하고 나아가 새로운 문제를 제기하는 과정에 Cabri3D가 훌륭한 보조도구로서 효과적으로 활용될 수 있음을 예시하였다.

본 논문에서 Cabri3D를 문제해결 각 단계에 활용한 사례들이 이 프로그램을 문제해결 교육에 활용한 모든 경우를 포괄하고 있다고 할 수는 없다. 그러나 본 논문에서 제시된 내용은 현장의 수학교사들이 공학적 도구를 수학수업에 활용할 때, 학생들의 문제해결력 신장을 염두에 두고 구체적인 지도방법을 탐색해 나갈 수 있는 바람직한 관점을 갖게 하는데 큰 도움을 줄 것이다. 나아가 수학교사들이 자신의 수업 연구에서 공학적 도구를 의미있게 활용하는 교수-학습 방법을 찾고 그와 관련된 구체적인 교수-학습 자료를 개발하는데 참고가 되는 예시자료로서 적지 않은 도움을 줄 것으로 기대한다.

참고문헌

강옥기 · 정순영 · 이환철(2001). **중학교 수학 8-나**. 서울: (주)두산.

교육부(1997). **수학과 교육과정**. 서울: 교육부.

김현구(2006). 사면체의 오심에 관하여. **Math Frontier 2006 자료집**, Math Frontier 수학교육연구회, 94-105.

손대원 · 정선영(2006a). Cabri3D를 이용한 3차원 공간작도. **제 8회 Math Festival 제 8집 제 2권**, 84-99.

손대원 · 정선영(2006b). Cabri3D 워크샵. **Math Frontier 2006 자료집**, Math Frontier 수학교육연구회, 135-155.

손대원 · 정선영 · 조현재 · 한송이(2006). 3D 기하 소프트웨어를 이용한 수학탐구. **수학교육학논총, 29**, 675-707.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교출판부.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교출판부.

우정호 외 5인(2002). **고등학교 수학Ⅱ**. 서울: 대한교과서(주).

윤삼열 · 김현구 · 정재훈 · 이성현 · 손대원 (2005). Cabri 3D를 이용한 공간도형 작도. **수학교육학논총, 27**, 663-677.

윤삼열 · 김현구 · 정재훈 · 이성현 · 손대원 · 정선영(2006a). 2차원에서 3차원으로 확장한 기본 작도. **수학사랑 저널, 55**, 84-91.

______(2006b). Cabri3D를 이용한 사면체의 오일러 직선. **수학사랑 저널, 56,** 109-117.

이강섭 외 6인(2002). **고등학교 수학Ⅱ**. 서울: (주) 지학사.

황혜정 외 5인(2001). **수학교육학신론**. 서울: 문음사.

Polya, G. (2002). **어떻게 문제를 풀 것인가**. (우정호 역). 서울: 교우사. (영어 원작은 1957년 출판).

NCTM (1992). **수학교육과정과 평가의 새로운 방향** (구광조 외 2인 역, 1992). 서울: 경문사. (영어 원작은 1989년 출판).

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Using the Cabri3D Program for Enhancing Problem Solving Ability

Kim, Nam Hee (Jeonju University)

In this study, we investigated the methods of using the Cabri3D program for education of problem solving in school mathematics. Cabri3D is the program that can represent 3-dimensional figures and explore these in dynamic method. By using this program, we can see mathematical relations in space or mathematical properties in 3-dimensional figures vidually.

We conducted classroom activity exploring Cabri3D with 15 pre-service teachers in 2006. In this process, we collected practical examples that can assist four stages of problem solving. Through the analysis of these examples, we concluded that Cabri3D is useful instrument to enhance problem solving ability and suggested it's educational usage as follows.

In the stage of understanding the problem, it can be used to serve visual understanding and intuitive belief on the meaning of the problem, mathematical relations or properties in 3-dimensional figures. In the stage of devising a plan, it can be used to extend students's 2-dimensional thinking to 3-dimensional thinking by analogy. In the stage of carrying out the plan, it can be used to help the process to lead deductive thinking. In the stage of looking back at the work, it can be used to assist the process applying present work's result or method to another problem, checking the work, new problem posing.

* **Key words** : problem solving(문제해결), Cabri3D program(Cabri3D 프로그램), 3-dimensional figure(3차원 공간도형), visual understanding(시각적 이해), intuitive belief(직관적 확신), analogy(유추)

논문접수 : 2006. 10. 3
심사완료 : 2006. 11. 10