대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 16 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 16, No. 4, 327-344. Nov 2006

초등학교 6학년 수학영재들의 기하 과제 증명 능력에 관한 사례 분석[1)]

송 상 헌* · 장 혜 원** · 정 영 옥***

본 연구는 경기도의 A, S시 교육청 과학영재교육원에서 교육을 받고 있는 초등학교 6학년 학생들이 기하 영역의 특정 과제를 해결하는 과정에서 보여주는 증명의 수준과 증명의 구성 요소에 대한 이해 정도를 확인하는 것이다. 이를 위해 동일한 시기에 선발되어 함께 교육프로그램에 참여하고 있는 20명 중 표현력이 우수한 3명의 학생을 담임교수로부터 추천 받아 질적 연구 방법을 통해 분석하였다. 각 학생들에게 Clairaut의 기하 과제 중 하나인 '두 직사각형의 넓이를 합한 것과 동일한 넓이를 갖는 하나의 직사각형을 작도하시오.'라는 과제를 제시하고, 그것을 해결하는 과정에서 나타나는 증명의 수준과 증명의 구성 요소에 대한 이해와 관련하여 초등 수학영재들이 보여주는 사고의 특징을 분석하였다. 자료 분석은 Waring(2000)이 제시한 증명 수준과 Galbraith(1981), Dreyfus & Hadas(1987), 서동엽(1999) 등이 제시한 증명의 구성 요소에 기초하여 이루어졌다. 그 결과, 4가지의 의미 있는 결과를 도출하였고 이를 바탕으로 수학영재교육에 주는 시사점을 논의하였다.

I. 서 론

증명은 수학적 사고에서 중요한 위상을 차지한다. 보통 연역적인 정당화 과정을 일컫는 전통적인 증명의 의미와 달리, 그 외의 역할에 주목함으로써 수학 학습에서 증명이라는 명칭하에 보다 폭넓은 활동을 포함시키는 것이 최근의 경향이라 할 수 있다. de Villiers(1990)는 증명이 명제가 참이라는 것을 보여주는 정당화의 역할에 한정되지 않고, 명제가 왜 참인가에 대한 통찰을 주는 설명적인 역할, 연역적인 체계화의 수단, 새로운 결과의 발견 또는 창조, 수학적인 의사소통과 같은 다양한 기능을 지닌다고 보았다. Hanna & Jahnke(1996) 또한 증명에 대한 서로 다른 관점이 긴 발전과 역사의 과정을 지닌 것임을 주목함으로써 학생들 역시 증명과 관련하여 오랜 기간에 걸친 과정을 경험할 것을 주장하였다. Anderson & Austin (1995)은 증명 관념을 확실성에 대한 내적 확신으로 보고 이러한 확신에 이르는 것이 수학 학습의 본질적인 부분임을 강조하였다. Waring (2000)은 수학자와 달리 학생들에게는 엄밀한 논증으로서의 증명의 의미보다 명제가 참이라는 필연성에 대한 적절한 설명으로서의 증명의 의미가 더 적합하다고 하였다.

이와 같이 증명의 개념 및 역할에 대한 관점의 변화 및 다양화는 증명을 수준에 따라 구분

* 경인교육대학교, shsong@ginue.ac.kr
** 진주교육대학교, hwchang@cue.ac.kr
*** 경인교육대학교, yochong@ginue.ac.kr

1) 이 논문은 2005년 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2005-079-BS0123)

하려는 의도로 구체화되었다. 기하 영역에서의 증명 수준을 생각할 때, 기하적 사고를 수준별로 특성화한 van Hiele(1986)의 이론을 적용하려는 시도는 자연스럽다. 그러나 van Hiele의 기하학적 사고 수준 이론은 학생들의 증명 수준을 파악하기에는 너무 거시적이다. 예컨대 초등 수학영재들의 증명과 관련한 사고 수준은 형식적인 연역적 사고가 가능한지 또는 불가능한지의 두 수준으로 구분될 수 있을 뿐이다. 제7차 교육과정에 따른 초등 수학에서는 4학년부터 van Hiele의 3수준에 해당되는 도형의 포함 관계를 다루고 증명과 관련해서는 비형식적인 연역적 추론만을 다루며 중학교에 가서야 연역적 증명을 도입하고 있다. 또한 Sriraman (2004) 역시 영재 학생들은 5학년 정도의 이른 시기에 증명의 전조라고 할 수 있는 추론 원리들에 숙달할 수 있다고 주장하면서 초등 수학에서 다루는 기하 수준을 제 3수준인 비형식적 연역의 수준으로 보고 있다. 이렇듯 기하 전 영역에 적용 가능한 광의의 수준 구분으로는 실제로 영재 학생들을 위한 증명 관련 프로그램 개발에 직접적인 도움을 받기 어렵다. 이러한 관점으로부터 본 연구에서는 우리나라의 현행 영재교육진흥법에 따라 교육을 받고 있는 수학영재 학생들의 기하학적 사고의 일부인 증명 관념에 대한 사고 수준 및 이해의 요소들을 분석함으로써 좀더 구체화할 수 있는 프로그램 개발을 위한 기초 자료를 제공하고자 한다.

학생들의 증명 수준에 대한 좀더 세분화된 연구로는 Bell(1976), Balacheff(1988), Miyasaki (2000), Waring(2000) 등이 있다. Bell(1976)은 증명 관련 과제에 대한 11세에서 17세까지 학생들의 반응을 분석함으로써 증명에 대한 의식의 부재로부터 추상적 증명의 의미 및 논증의 공리적 기초에 대한 이해에 이르기까지 5개의 증명 수준을 구분하였고, Balacheff(1988)는 관념의 본질, 형식, 타당성의 세 가지 축을 중심으로 증명 수준을 실용적 증명, 지적 증명, 연역적 증명으로 구분하였으며, Miyasaki(2000)는 내용과 표현의 두 가지 축과 Piaget의 증명의 기본 수준을 고려하여 형식적 조작기에는 A형(연역/언어), B형(연역/다른 표현), D형(귀납/언어), 구체적 조작기에는 C형(귀납/다른 표현), B형, D형의 6가지 수준으로 구분하였다. Waring (2000)은 앞의 연구들을 참조하여 6개의 증명 수준을 구분하였다.

한편 증명 능력이나 증명 학습에서 겪는 어려움을 분석하여 증명의 구성 요소를 제시한 연구로는 Galbraith(1981), Dreyfus & Hadas (1987), 서동엽(1999) 등이 대표적이다. Galbraith (1981)는 학생들의 증명 능력에 대한 임상적 면담 조사를 통해 검토의 다양성 및 완전성, 외부적인 원리의 확인과 적용, 추론의 연결 관계 · 고리의 확인 및 수용, 일반화와 그 정의역 인식 및 반례에 의한 반박, 자료의 정확한 해석, 명제의 정확한 평가 및 함의와 동치의 구분, 정의의 의미 이해, 증명의 구성 요소 분석과 평가 등의 요소를 밝혀내었다. Dreyfus & Hadas(1987)는 학생들이 증명 학습에서 겪는 어려움을 분석하면서 정리의 비예외성, 명백한 명제의 증명 필요성, 증명의 일반성, 반례의 충분함, 가정과 결론의 구분, 역의 참/거짓, 증명에서 도형 요소의 역할 등을 말하였다. 그리고 서동엽(1999)은 여러 연구자의 연구를 종합하여 증명의 구성 요소를 추론의 구성과 관련된 요소 및 증명의 의미와 관련된 요소의 두 종류로 추출하고 학생들이 증명의 구성 요소를 얼마나 파악하고 있는지 조사하였다.

Krutetskii(1976)가 분석한 영재들의 사고 특성 중에 증명과 관련하여 논리적 기호적 사고 능력, 연역의 일반화 능력, 사고 과정의 유연성, 사고의 단축, 사고 과정의 가역성, 증명의 골격에 대한 기억력 등을 꼽아볼 수 있다. 또한 수학 영재들의 증명 관념에 대해 연구한

Sriraman(2004)은 영재아들이 형식적인 증명을 배우기 이전에 이미 수학자들의 사고 과정과 유사한 직관적인 증명 관념을 가지고 있다고 주장하면서, 시각화 범주, 직관 범주, 경험 범주, 가역성 범주로 구분하였다.

그러나 초등 수학 영재의 증명 수준이나 증명의 구성 요소의 이해도를 구체화한 선행연구는 부족하므로 증명과 관련한 수학영재들을 위한 교육 프로그램의 활성화를 위해 이 연구의 필요성은 간과될 수 없을 것이다.

이 연구에서는 Waring(2000), Galbraith(1981), Dreyfus & Hadas(1987), 서동엽(1999)을 기초로 분석틀을 마련하고 특정한 기하 과제(두 직사각형의 넓이를 합친 넓이를 갖는 새로운 직사각형의 작도)에서 연구 대상자들이 보여주는 증명의 수준과 그들이 사용하는 증명의 구성 요소 및 접근 방법을 분석함으로써 초등 수학영재들의 사고 특성을 이해하고 이를 바탕으로 수학영재교육에 주는 시사점을 확인하고자 한다.

II. 증명 수준 및 증명 구성 요소에 대한 이해의 분석을 위한 이론적 틀

본 연구에서 사용할 과제의 특성과 문제해결 유형을 고려하여 증명의 수준(Level: L), 증명의 구성 요소(Constituent: C), 접근 방식(Approach: A)을 <표 II-1>과 같이 설정하였다.

증명의 수준에서 0수준(L0)은 학생들이 증명의 필요성을 알지 못하며 증명의 존재성조차도 알지 못하는 경우이다. 1수준(L1)은 증명 관념은 의식하지만 몇 가지의 특수한 경우를 점검하는 것으로 증명이 충분하다고 생각하는 경우이다. 2수준(L2)은 몇 가지의 특수한 경우를 점검하는 것이 증명과 같지 않다는 것을 알지만 좀더 다양하거나 임의로 선정한 예에 대한 점검이 증명이라고 생각하거나, 일반적 예를 사용하면 증명이 된다고 생각하는 경우이다. 3수준(L3)은 일반적인 증명의 필요성을 의식하고 비록 도움 없이 타당한 증명을 구성하기는 어렵지만, 적절한 난이도의 수준에서 증명하는 것을 이해할 수 있는 경우이다. 4수준(L4)은 학생들이 일반적인 증명의 필요성을 인식하고 증명의 구성을 이해하며 제한적이기는 하지만 친숙한 맥락에서는 증명을 할 수 있는 경우이다. 5수준(L5)은 학생들이 일반적 증명의 필요성을 의식하고, 몇몇 형식적 증명의 구성을 이해할 수 있고 친숙하지 않은 것을 포함한 다양한 맥락에서 증명을 구성할 수 있는 경우이다.

증명의 구성 요소에서 추론 규칙(C1)은 알고 있는 조건에서 증명에 필요한 조건을 취하는 분리(disjunction)와 증명에서 밝혀야 할 조건들

<표 II-1> 증명의 수준, 구성 요소, 접근 방식에 대한 분석틀

증명의 수준	증명의 구성 요소	접근 방식
L0. 필요성 인식 못함 L1. 특수한 경우 점검 L2. 일반적 예의 제시 L3. 증명의 이해 L4. 친숙한 맥락의 증명 L5. 형식적 일반적 증명	C1. 추론 규칙 C2. 기호화 C3. 정의와 성질의 구분 C4. 적절한 그림의 이용 C5. 기본적인 원리의 이용 C6. 검토의 다양성 및 완전성 C7. 도형의 해석 및 증명에의 이용 C8. 가정과 결론의 구분 C9. 함의와 동치의 구분	AP. 잘라 붙이기 AN. 수치적 접근 AA. 대수적 접근 AG. 기하적 접근

을 모두 고려하는 연접(conjunction)을 의미한다. 기호화(C2)는 도형의 시각적 표현에서 대상을 기호를 써서 나타내거나 말로 기술된 문장을 수학적 기호를 사용한 문장으로 나타내는 것을 의미한다. 정의와 성질의 구분(C3)은 도형의 정의와 성질을 알고 그 차이점을 구분하는 것을 의미한다. 적절한 그림의 이용(C4)은 증명하는 과정에서 보조선 및 보조도형 등을 생각해 내고 이용하는 것을 의미한다. 기본적인 원리의 이용(C5)은 이미 알고 있는 사실이나 원리를 이용하여 필요한 성질이나 조건들을 이끌어 내는 것을 의미한다. 검토의 다양성 및 완전성(C6)은 특별한 경우의 선택의 다양성, 검토의 철저성 인식, 불충분한 근거에 기초한 추론을 기피하는 것을 의미한다. 도형의 해석 및 증명에의 이용(C7)은 과제에 사용되는 도형의 일반성과 대표성을 인식하고, 증명 과정에서 도형의 여러 요소들의 필수적인 역할을 이해하는 것을 의미한다. 가정과 결론의 구분(C8)은 명제에서 가정과 결론의 구분뿐만 아니라 증명 과정에서 알고 있는 사실과 밝혀야 할 사실의 구분을 의미한다. 함의와 동치의 구분(C9)은 두 명제 사이의 필요, 충분, 필요충분조건의 명확한 인식을 의미한다. 특히 C5의 기본적인 원리들 중 본 연구에서 사용한 과제와 관련되거나 연구 대상이 사용한 교육과정 관련 내용은 다음과 같이 코드화하였다.

C50: 비, 비례, 반비례,
C51: 수직과 평행 관계,
C52: 평행선의 성질 (엇각, 동위각, 평행선 사이의 길이 비),
C53: 도형의 정의와 성질(평행사변형, 직사각형, 정사각형, 삼각형),
C54: 도형의 넓이(직사각형, 정사각형, 평행사변형, 삼각형, 등적변형),
C55: 도형의 합동,
C56: 도형의 작도,
C57: 명제(가정과 결론, 역),
C58: 도형의 닮음(닮음비, 닮음의 성질, 닮음조건, 닮은 도형의 넓이 비),
C59: 피타고라스의 정리(피타고라스의 정리, 직사각형의 대각선의 길이)

접근 방식은 본 연구에서 사용하는 문제해결의 유형을 의미한다. 이는 연구자들의 풀이 방법에 대한 예상과 예비 실험에서 학생들의 문제해결 과정을 분석한 결과이다. 잘라 붙이기(AP)는 과제를 해결하는 과정에서 특별한 보조선을 이용하지 않고 도형을 여러 번 잘라 붙여 해결하는 방법, 수치적 접근(AN)은 과제에 제시된 도형에 특별한 수치를 적용하여 해결하는 방법, 대수적 접근(AA)은 구체적인 수치를 사용하는 것은 아니지만 과제에 제시된 도형을 대수적인 방법을 이용하여 해결하는 방법, 기하적 접근(AG)은 적절한 보조선과 도형과 관련된 기본적인 원리들을 이용하여 해결하는 방법을 의미한다.

III. 연구 방법

1. 연구의 대상

본 연구의 대상은 경기도의 A시와 S시의 두 지역 교육청 과학영재교육원에서 6개월 이상 교육을 받고 있는 6학년(11-12세) 학생들 중 20명의 자원자를 별도로 선발하여 실시한 캠프에 참가한 학생들로서, 자신의 생각을 좀 더 명료하게 표현할 수 있다고 지도교사로부터 추천을 받은 3명의 남학생 T, S, J이다. 이들은 지역

교육청 과학영재교육원 입학을 위해 전년도에 각 시도교육청과 한국교육개발원이 공동으로 개발한 검사 도구에 의해 선발되었다. 이 검사 기준에 따라 교육받고 있는 학생들은 해당 학년에서 수학 분야의 상위 1%이내의 수준에 속한다. 연구대상자들의 수학적 지식 수준을 상담한 결과 그들은 각각 제7차 수학과 교육과정상의 6단계, 8단계, 9단계 내용을 약간 알고 있는 정도였으나 본 과제의 문제를 다루어 본 적은 없었다고 말했다. 연구에 사용된 과제와 관련된 내용은 제7차 수학과 교육과정상 5단계와 8단계에서 다루어진다.

2. 실험 과제

본 연구에서 사용된 기하 과제는 Clairaut의 <기하학 원론(Elèments de gèomètrie, 2005: 60-62)>에 제시된 내용으로, 두 직사각형의 넓이의 합을 그 넓이로 하는 새로운 직사각형을 구하는 방법을 찾고 정당화하는 것이다([그림 Ⅲ-1]).

이 과제를 해결하기 위해 4개의 보조문제를 준비하였다. 이는 학생이 스스로 문제를 해결하지 못하고 어려워하는 반응이 15분 이상 지속되면 관찰자가 학생에게 보조문제 제공의 필요성을 물은 후에 학생이 원할 때에 제공해 주기 위한 것이다. 보조문제 1은 두 직사각형에서 한 직사각형의 높이를 다른 직사각형의 높이와 같게 그릴 수 있다면 어떤 도움이 되는지 알아보게 한다. 보조문제 2는 보조문제 1의 연장선상에서 높이가 특수한 비를 갖는 경우에 높이가 같은 직사각형을 그렸다고 가정했을 때 어떤 점을 찾는 것이 문제해결에 핵심이 되는가를 알아보게 하는 것이다. 보조문제 3과 보조문제 4는 각각 다른 방법이 적용되었음을 암시하는 작도 결과가 제시되어 있는 문제로, 둘을 동시에 제공하고 학생들이 지금까지 생각해온 방법에 도움이 된다고 판단하는 것을 선택하여 원래의 과제를 해결하는 데 적용하고 정당화할 수 있는가를 알아보기 위한 것이다. 주어진 과제와 4가지의 보조문제는 [그림 Ⅲ-1]과 같다.

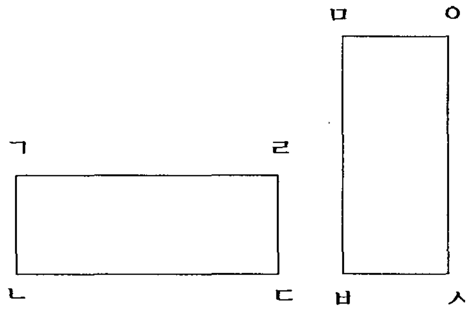
3. 예비 실험

이 과제의 투입을 위해 일반 초등학교 6학년생 4명, 대학부설 과학영재교육원에 다니는 초등학교 6학년생 4명, 과학영재교육을 받은 경험이 있는 중학교 1학년생 2명, 과학고등학교 2학년생 4명, 교육대학교 3학년생 5명을 대상으로 5차례의 예비 실험을 실시하여 관련 문제의 풀이 경험과 문제에 대한 이해의 어려움, 그리고 다양한 방법으로의 접근 가능성을 탐색하였다. 그 결과, 대학부설 과학영재교육원에 다니는 초등학교 6학년생 1명과 초등학교 때 대학부설 과학영재교육원에서 교육을 받은 적이 있는 중학교 1학년생 1명, 그리고 과학고등학교 2학년생 2명은 아무런 도움이 없이 이 문제를 해결하였고 다른 학생들은 약간의 힌트를 받아가면서 문제를 해결하였다.

이상의 예비실험 결과로부터 본 연구에서 사용한 과제의 적절성을 확인하였다. 즉, 연구 대상들은 예비 실험에서 과제를 해결한 학생들보다는 수준이 낮고 일반 초등학생보다는 수준이 높다고 가정되므로 예비 실험 결과로부터 본 실험 과제는 연구 대상인 영재아의 사고 특성을 관찰하기에 적절한 과제임을 확인하였다. 또한 예비 실험에서 연구 대상이 보여준 과제의 접근방식을 통해, 이 과제는 특별한 도형의 시각적 정보에 기초한 잘못된 추론의 위험이나 그 점을 극복하고 일반적인 진술의 가능성 여부를 타진할 수 있는 시각적 표현이 포함된 기

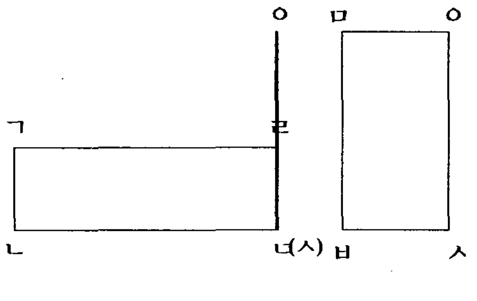
■ 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 이용한다고 생각하면서 다음 문제를 해결하시오.

(과제) 다음 두 직사각형 ㄱㄴㄷㄹ과 ㅁㅂㅅㅇ의 넓이의 합과 같은 넓이를 가지는 직사각형을 그리고 어떻게 그렸는지 설명하시오. 여러분이 그린 방법이 옳은 것인지도 설명하시오.

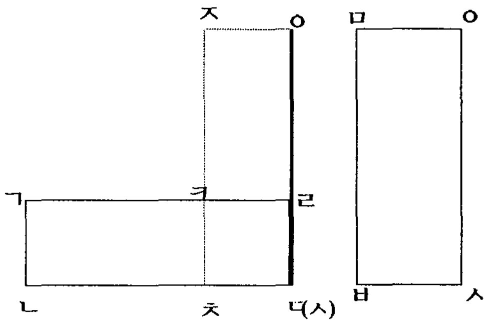


(보조문제1) (1) 직사각형 ㄱㄴㄷㄹ을 넓이는 그대로 두고 높이가 직사각형 ㅁㅂㅅㅇ의 높이 ㅅㅇ(=ㄷㅇ)과 같은 다른 직사각형으로 바꾼다면 두 직사각형의 넓이의 합을 넓이로 가지는 직사각형을 쉽게 그릴 수 있을까요? 여러분의 생각을 설명하시오.

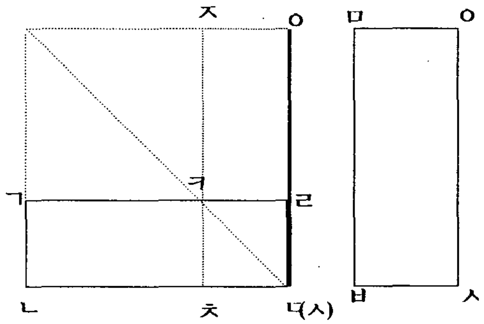
(2) 직사각형 ㄱㄴㄷㄹ을 넓이는 그대로 두고 높이가 ㅅㅇ(=ㄷㅇ)인 직사각형으로 바꾸려면 밑변의 길이를 어떻게 알아낼 수 있을까요? 여러분의 생각이 옳은 이유를 설명하시오.



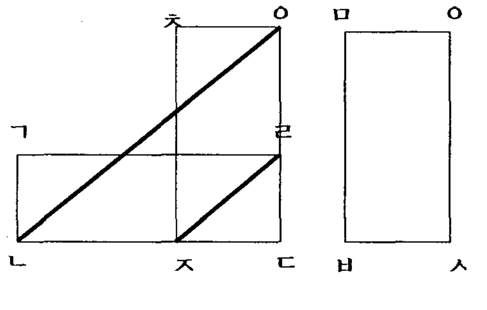
(보조문제 2) 다음은 직사각형 ㄱㄴㄷㄹ과 넓이가 같고, 높이가 ㄷㅇ인 직사각형 ㄷㅇㅈㅊ을 그린 것입니다. 필요하면 적절한 선을 그려서 점 ㅊ 또는 점 ㅋ을 찾은 방법을 설명하시오.



(보조문제 3) 다음은 직사각형 ㄱㄴㄷㄹ과 넓이가 같고, 높이가 ㄷㅇ인 직사각형 ㄷㅇㅈㅊ을 그린 것입니다. 어떻게 그렸는지 설명하고, 어떤 사실들을 알 수 있는지 적어 보시오.



(보조문제 4) 다음 그림은 직사각형 ㄱㄴㄷㄹ을 넓이는 같고 높이가 ㅅㅇ과 같은 직사각형 ㅊㅈㄷㅇ으로 바꾼 것입니다. 어떻게 그렸는지 설명하고, 왜 옳은지 이유를 설명하시오.



[그림 Ⅲ-1] 연구에 사용한 기하 과제

하 문제임을 확인하였다. 그리고 Mesquita(1989)가 기하에서 연역을 시작하기에 적합한 과제의 조건으로 제시한 도형의 지각적 재구조화를 포함하는 과제라는 것도 확인하였다. 따라서 아직 본격적인 증명을 배우지 않은 본 연구의 대상자들의 경험과 수준을 고려할 때 본 연구에서 사용한 과제는 그들에게 적당히 도전적이고 의미 있는 과제라 할 수 있다.

4. 자료 수집과 자료 분석

본 연구의 자료 수집을 위해 이들이 캠프의 다른 동료 학생들과 함께 참여한 2005년 10월의 넷째 주 토요일 오후 3시간의 교육과정을 모두 녹화하였고 이후 1시간 정도 추가 면담을 실시하였다. 분석한 자료는 3명의 학생들의 문제해결 과정에 대한 비디오 녹화 자료, 관찰자료, 면담 자료, 학생들의 활동지이다.

학생 1명당 비디오 녹화자와 관찰자를 각각 1명씩 배정하였고, 1명의 연구자가 전체적인 과제에 대한 안내를 하면서 각 피실험자의 과제수행 상황을 점검하였다. 각각의 관찰자는 해당 학생의 문제해결 과정을 관찰하다가 필요할 때마다 그 학생이 문제를 어떻게 이해하고 어떻게 접근하려는 생각을 하였는지 알아보기 위한 질문을 던졌고, 문제해결의 진척이 없을 때에는 과제에 대한 힌트가 필요한지에 대한 질문을 통해 학생의 의견에 따라 해당하는 보조문제를 제시하였다.

문제해결 중간에 면담을 실시한 것에 대해서는 해결자의 사고를 중단시킬지 모른다는 우려도 있었다. 그러나 여러 차례에 걸친 예비 실험의 결과 학생들이 여러 가지 시도를 하면서 문제를 해결하다 보면 순간순간의 사고 과정을 다 기억하지 못했기 때문에 본 실험에서는 무엇인가 진척이 되는 순간에 면담을 함으로써 해결자의 사고를 명료화하는 것이 나을 것이라 판단하였다.

문제해결이 종료된 후에는 이러한 문제를 해결하면서 어떤 점이 어려웠는지, 어떤 점이 도움이 되었는지 등에 대해 질문하였다. 문제해결 과정, 관찰과 심층면담의 과정에 대한 비디오 녹화 자료는 모두 전사하였고, 이 전사본에 기초하여 코드화를 실시하였다.

5. 자료의 코드화

자료의 코드화는 학생들의 풀이 유형의 범주가 어떻게 나타나는지를 알아보기 위한 것으로, 다음과 같은 절차에 의해 실시되었다. 우선 예비 실험 자료 및 과제 자체의 분석으로부터 얻은 다양한 문제해결 유형을 고려하여 기본적인 틀을 작성하였다. 이후, 본 실험 자료를 바탕으로 수정하여 본 연구에서 사용할 분석틀을 마련하였다. 이 분석틀에 기초하여 실험에 직접 참여하였던 연구자들이 전사본을 보면서 코드화한 후에 논의를 거쳐 최종 수정하였다.

IV. 연구 결과 및 논의

1. 각 학생들의 증명 과정 및 수준

실험대상자인 지역교육청의 과학영재교육원에 다니는 초등학교 6학년 3명의 학생들(T, S, J)은 처음 20분간은 본 과제를 스스로 해결해내지 못하였다. 해결 과정 초기에 나타난 이러한 사실은 3명의 연구 대상이 주어진 과제와 관련한 증명 수준에 있어 제 3수준을 넘지 못할 것임을 암시한다. 그러나 그들은 모두 자신이 필요하다고 느낄 때 준비된 보조문제를 제공받아 주어진 문제를 해결하였다. 이 과정에

서 그들이 보여준 문제해결 방법과 수준은 다름을 확인하였다. 이제 그들의 풀이 과정에 대한 접근방식, 증명 구성의 요소에 대한 이해도, 증명 수준을 살펴보고자 한다. 증명의 구성요소(C)의 코드화에서 -Cj라는 의미는 Cj와 관련된 행동을 보이지만 어려움을 겪는 것을 나타낸 것이다.

가. 학생 T의 풀이 과정

학생 T는 본 과제와 보조문제 1에서는 잘라 붙이기 접근과 아울러 적절한 것은 아니지만 기하적 접근을 시도하고 보조문제 2에서는 특수비를 이용한 수치적 접근을 시도하였다. 관찰자의 일반화 요구가 있었음에도 불구하고 적절한 해법을 찾지 못하다가 번호 순서대로 두 가지를 모두 풀겠다고 한 보조문제 3과 4가 주어졌을 때 비약적인 발전을 보이면서 기하적 접근으로 전환하였다.

관찰자: (보조문제 4를 제시하며) 그 다음, 이 문제를 풀어보자. 이 보조선은 이런 식으로 그려진 거지. 이건 어떻게 해서 설명할 수 있을까?
학생 T: 일단 봤을 때 여기와 여기(겹치는 부분의 두 삼각형)는 같게 되잖아요. 직사각형을 반으로 나눈 거잖아요.
관찰자: 그러기 위해서 이 ㅈ 점을 알아야 되는 거잖아. ㅈ 점을 찾기 위해서 보조선을 그은 거거든.
학생 T: 다른 방법이 있는데, 여기서 이걸 긋고요...

이어 ㄱㅌ과 평행한 같은 길이의 ㅊㅇ을 그음으로써 교사의 제안과 다른 방법인 ㄴㅌㅇ의 위쪽에 위치한 두 삼각형의 합동을 이용한 새로운 방법을 찾아내고 설명한다.

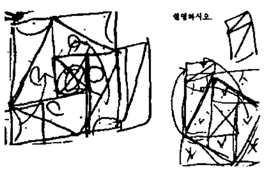
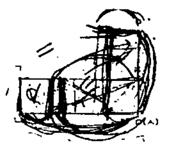
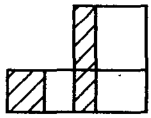
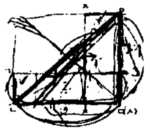
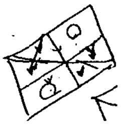
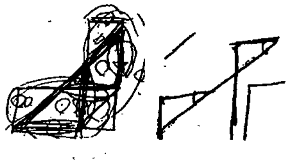
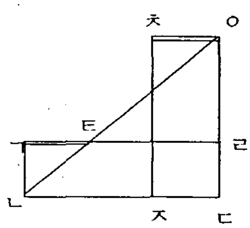
증명 구성의 요소에서는 보조문제 2까지는 C1, C2, C4, C6, C7, C8 등에 대해서 어려움을 나타내었다. 본 과제와 보조문제 1을 다룰 때 불충분한 근거에 의존하거나 문제에 있지 않은 조건을 이용하는 등 추론에 오류를 드러내며, 기호화는 거의 엿볼 수 없고, 적절한 보조선을 스스로 알아내기 어려워하였다. 시각적 표현에서 보이는 대로의 특성에 의존하는 오류도 보여주었다. 보조문제 2에서는 부적절한 보조선을 이용하거나 길이의 비에 착안하여 수치적 접근을 시도하였다. 그러나 도움을 주기 위한 보조문제 3과 4에서는 적절한 기본 원리를 이용하여 증명을 발견하였다(<표 Ⅳ-1>).

이러한 행동 특성과 전체적인 관찰 결과를 고려할 때, 학생 T는 증명의 필요성은 인식하지만 본 과제와 보조문제 1, 2에서는 적절한 증명을 제시하지 못하며, 특별한 수치의 길이에 대해 임의로 선정한 예에 대한 점검이 증명이라고 생각한다는 점에서는 수준 2에 해당하는 것으로 볼 수 있다. 그러나 보조문제 3과 4가 주어질 때 매우 생산적인 기하적 증명을 창출할 수 있었으므로 이 보조문제에 국한시켜 본다면 수준 4의 특성을 보여준다. 따라서 학생 T는 수준 2의 특성과 함께 부분적으로 수준 4의 특성을 보여주는 것으로 볼 때 수준 2를 지나 수준 3(또는 그 이상의 수준 4)으로의 이행기에 있다고 판단된다.

나. 학생 S의 풀이 과정

학생 S는 본 과제에서 잘라 붙이기를 시도하였지만 그 이후 대부분 기하적 접근을 보였다. 증명의 구성 요소와 관련해서는 C2, C5에는 대체로 큰 어려움이 없었으나 보조문제 1에서 특별한 도형의 경우에 대한 생각을 일반화하지 못하였다. 그러나 '비가 예를 들어 2배라고 치면요.'라는 가정을 명확히 하고 사고를 전개함으로써 그것을 특수한 한 가지 사례로 인식하고 있음을 보여준다. 보조문제 2에서는 '세

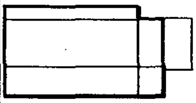
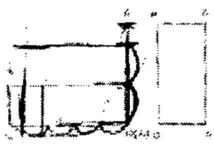
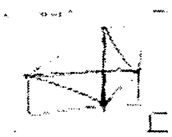
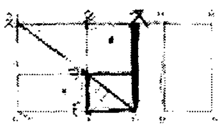
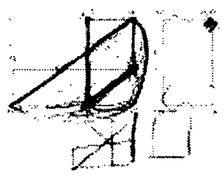
<표 Ⅳ-1> 학생 T의 풀이 과정

과제 번호	학생 활동	코드화		설명 및 분석
		접근 방식	증명 요소	
본 과제		AP AG	-C2,C3 -C53, -C55, -C6	두 삼각형을 붙이고 자르는 등 여러 각도에서 시도하지만 해결책을 찾지 못하고 난감해한다. 삼각형과 사각형을 잘라서 그 조각들을 이어보려고 한다. 그러한 시도 가운데 직사각형 2개씩을 이어 사각형을 만드는데 그것이 모두 합동이라는 잘못된 가정을 한다. 잘 안되자 별도로 삼각형과 사각형을 그린 후 그 조각들을 이어보려 한다.
보조 문제1		AP AG	C50,C54 -C6,-C7 -C8	밑변의 길이에 대한 고려 없이 그냥 주어진 높이를 갖는 임의로 그린 사각형을 그린 것을 해결한 것으로 잘못 생각한다. 무엇을 구해야 하는지와 관련하여 문제 이해가 미흡하다. 문제 이해를 돕기 위한 관찰자의 개입 후 밑변에서 높이(ㄷㅇ)만큼 잘라낸 나머지 부분 을 한 변으로 하는 빗금 친 직사각형 부분을 주어진 높이의 직사각형으로 변형시켜 붙이는 것으로 설명한다. 
보조 문제2		AN AG	-C1,-C4 C50,C58 -C7	비에 대한 생각에 기초하여 삼등분이라는 특수비의 경우로 접근한다. 그러나 교사의 일반화 요구에 대처하지 못한다.
보조 문제3		AG	C1,C4 C54,C55	큰 직사각형을 그림으로써 넓이에 대한 직관적인 파악으로 증명을 완성한다.
보조 문제4		AG	C1,C4 C51,C52 C53,C54 C55,C6 C8	보조선 ㄴㅇ을 긋고 그것이 ㄱㄹ과 만난 점을 ㅌ이라 할 때 ㄱㅌ과 평행한 같은 길이의 ㅊㅇ을 잡아 ㅇㄴㄷ 밖으로 나온 두 삼각형이 합동이라는 사실에 착안함으로써 도형의 넓이 및 삼각형의 합동에 기초하여 연구자가 의도하지 않은 새로운 증명 방법을 찾아낸다. 

로가 증가하고 가로가 감소한다.'와 '넓이가 같다.'는 두 명제 사이의 부정확한 함의 관계에 의존하려는 경향을 보였다. 또한 학생 S 역시 보조문제 3과 4를 모두 선택하였는데, 여기서는 알고 있는 사실과 밝혀야 할 사실에 대한 혼동이 지속되었으며 그러한 현상은 그림에 표시된 구해야 할 점을 주어진 것으로 착각하는 것과 같은 맥락에 있다. 두 문제 모두 주어진 것과 구해야 할 것을 혼동하는 어려움 때문에 증명에 방해가 되었고 관찰자의 도움이 있고 나서야 증명을 완성할 수 있었다(<표 Ⅳ-2>).

구체적으로, Ⅳ장 2절의 '나'항에 인용한 전사자료에서 보듯이 보조문제 3을 제시한 후 작도 방법을 설명하고 정당화하는 과정에서 해결자의 혼동 후 관찰자가 "그걸 우리가 지금 보이고 싶은 거잖아. 주장해야 돼. 넓이가 같다라

<표 Ⅳ-2> 학생 S의 풀이 과정

과제 번호	학생 활동	코드화		설명 및 분석
		접근 방식	증명 요소	
본 과제		AP	-C4 C53 C54	두 직사각형을 겹쳐놓고 겹치지 않은 나머지 부분을 제거하기 위한 여러 가지 방법을 시도한다. 분할하여 재조합한다는 생각이다.
보조 문제1		AG	C3,-C4 C50,C54 C56,-C6 -C7	도형의 등적 변형, 등적의 경우 직사각형의 두 변의 반비례 관계, 넓이의 공통 척도 등에 대한 아이디어를 갖고 있지만, 통약불가능성에 대해 알지 못하기 때문에 가로와 세로의 공통 단위를 취할 수 있다는 가정 하에 여러 방법으로 시도한다. 한편 도형의 변형에 대한 생각은 있지만 부적절한 보조선을 그어 특별한 경우에 대해 확인하는 데 그치고 일반화하지는 못한다.
보조 문제2		AG	-C1,-C4 C50,C54 C58,-C9	세로 및 가로의 변화와 넓이의 보존 간에 함의 관계를 얻으려 한다. 변형시킨 직사각형으로부터 얻은 '넓이가 같을 수 있다'는 개연적 결론에 대해 증명의 필요성을 인식한다. 직사각형의 등적 변형에서 변 사이의 반비례 개념이 있어도 닮은 삼각형에서 변 사이의 관계를 파악하지 못하므로 문제해결에 도움이 될만한 보조선을 그리고도 구하지 못한다.
보조 문제3		AG	C2,C4 C50,C53 C56, -C7,-C8	구해야 할 것을 찾은 것으로 간주하여 증명에 이용하는 오류가 지속된다. 그림에 표시된 것을 주어진 것으로 해석하기도 한다. 설명을 위해 그림에 새롭게 기호를 매겨서 이용한다.
보조 문제4		AG	-C1,C2 C50,C51 C52,C53 C56,C58 -C7,-C8	그림에 표시된 구해야할 것을 주어진 것으로 생각한다. 선분의 평행에 주목하지 못하고 그림에서 길이가 같다는 특수한 성질에 주목한다. 연접이 일어나지 않아 모든 조건을 고려하지 않은 채 다른 결과의 가능성을 언급한다.

고!"하고 구해야 할 것을 명확히 해주자 학생 S는 실마리를 찾고 자신감을 얻는 듯하였다.

학생 S: 이게([그림 2]에서 자신이 매긴 문자에 따라 ㄱㅋㄹㅊ) 넓이에서, 아! 이것을 반으로 나누었을 때(ㄷㅊ을 그으며) 이 직각삼각형(ㄷㅈㅊ)과 이 직각삼각형(ㄷㄴㅊ)이 같잖아요. 이 직각삼각형(ㄱㅋㅊ과 ㄹㅋㅊ)이 서로 같고 이것도(공통 사각형) 공통된 부분이므로 이것과 이것도(나머지인 두 사각형을 점을 찍으며) 같다고요, 말이 되죠?

사실상 교사의 도움이 없었다면 가정과 결론의 혼동은 지속되었을 것으로 보이므로 증명 수행이 어려웠을 것으로 판단된다.

결과적으로 학생 S는 추측한 사실이나 구한 도형에 대해 증명의 필요성을 인식했지만 혼자서 증명을 구성하는 데는 한계가 있었으므로, 증명 수준은 제 3수준으로 볼 수 있다. 특히 보조문제 3과 4에서는 적절한 보조선을 그었음에도 불구하고 증명에 필요한 기본 원리인 평행선 사이의 길이 관계를 알지 못했기 때문에 장애가 되었고 학생 S는 보조문제 4를 해결하는 과정에서 그 원리를 발견하는 경험을 하였다.

다. 학생 J의 풀이 과정

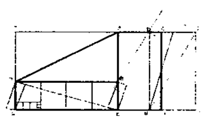
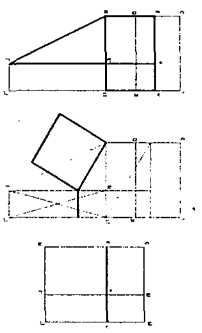
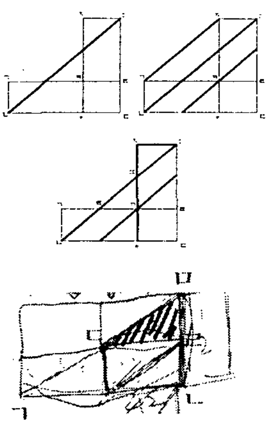
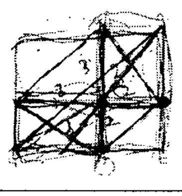
학생 J의 경우, 본 과제에서는 잘라 붙이기를 시도하다가 잘 해결되지 않으므로 피타고라스의 정리에 몰두하기 시작한다. 이 과정에서 기하적 접근으로 전환하였다. 학생이 문제해결에 어려움을 겪는 상황에서 제시된 보조문제 1의 해결 과정은 역시 혼동 속에 진행되었다. 피타고라스의 정리에 얽매인 기하적 접근으로부터 문자를 이용한 길이에 대한 생각, 다시 직사각형의 특수한 길이 비의 적용 등 대수적 접근과 수치적 접근이 공존하였다. 보조문제 2에서는 길이의 삼등분이라는 특수한 경우에 대해 생각하지만 그 아이디어를 증명으로 발전시키지는 못한다. 관찰자의 개입으로 평행선의 길이 비를 발견하고 여러 그림에서 확인함으로써 일반화를 의도한다.

관찰자: 그림을 필요한 것만 정리해 볼까?
학생 J: 잠시 좀 더 연구해 봐야 겠어요. 지금 한 사실을 알게 됐는데요. (<표 5>의 보조문제 2 관련 그림에서) ㄷㄹ:ㄹㅁ은 ㄱㄴ:ㄴㅁ 과 같다는 거여.
관찰자: 그걸 이용하면 할 수 있을 것 같아?
학생 J: 이제 이걸 여기다 관련지어서여?
관찰자: 응. 관련지어서...
학생 J: 네.. (다른 그림에서) 여기다! 이거 대 이거는 이거 대 이거랑 같다. (또 다른 그림에서도) 여기도 같이 해보니까요 이거 대 이거는 이거 대 이거랑 같다.
관찰자: 원래 문제를 해결하기 위해서 그것을 이용하면 어떻게 될까 한번 생각해봐... 뭔가 빠진 것 같아? 될 것 같은데... 잘 안돼?
학생 J: 여기서도 ㄱㄴ:ㄷㄹ은 ㄴㅁ:ㄹㅁ과 같다.
(이런 저런 생각과 혼잣말이 이어지다가)
학생 J: 또 이걸 어떻게 증명하느냐가 문제에요.

이와 같이 많은 구체적인 사례에서 확인하는 단계를 지나면 시각적 표현에서 특수하게 성립하는 성질에 대해 수학적 증명의 필요성을 인식하고 있음을 보여준다(<표 IV-3>).

학생 J의 경우, 보조문제 3과 4 중 선택한 보조문제 4에 대해 문제해결 과정이 정리가 안 된 상태였지만 관찰자의 도움 후, 보조선으로서 평행선을 인식한다. 그러나 그렇게 찾은 점에 의한 두 직사각형의 넓이가 같음을 증명하는 단계에서는 다시 특수 길이에 의한 넓이로 증명하려는 수치적 접근으로 전환하고 만다. 이 단계에서 일반적인 예를 이용하여 설명하는 것은 수준 2의 특성을 보여주지만 IV장 2절의 '라'항에서 나타나듯이 일반적인 증명의 필요

<표 Ⅳ-3> 학생 J의 풀이 과정

과제 번호	학생 활동	코드화		설명 및 분석
		접근 방식	증명요소	
본 과제		AP AG	-C4 C50 C51,C54 C56,C59	처음에 잠시 잘라 붙이기를 시도하다가 곧 기하적 접근으로 전환한다. 적절하지 않은 보조선을 이용하며, 피타고라스 정리를 염두에 두고 수선을 이용하여 도형을 분할하려고 한다. 직사각형에서 변의 길이의 비, 소인수분해 등에 기초하여 다양한 시도를 하지만 적절한 해결 방법을 찾지 못한다.
보조 문제1		AN AA AG	-C1,C2 -C4 C50,C53 C54,C56 -C57 C59 -C8	여러 가지 사각형에 대각선을 긋고 피타고라스를 이용하려고 한다. 피타고라스 정리에 의존하여 다양한 형태의 보조선을 긋는다. 사각형을 삼각형으로 분할하여 상호 관계를 찾으려고 한다. 주어진 것과 구해야 할 것을 혼동하지만 관찰자의 개입으로 해소된다. 다시 넓이에서의 비에 대한 생각에 의존한다.
보조 문제2		AN AG	C3,-C4 C51,C52 C53,C54 C55,C56 C58,C6 C7,C8	구해야할 점을 주어진 것으로 가정하여 설명하며, 특별한 조건이 만족된 그림의 특징을 이용하며 삼등분이라는 특수한 수치의 비를 이용하기도 한다. 평행선에 대한 생각은 갖지만, 그것이 부적절한 곳에 그어져 적절한 증명으로 이어지지 못한다. 삼각형의 합동이나 점대칭에 근거하여 잘못된 추론을 하기도 한다. 관찰자의 개입으로 평행선을 긋는 것이 문제임을 인식하고 그 때 생기는 삼각형의 닮음비를 찾는다. 평행선에 의한 길이의 비를 발견하고 그것을 모든 그림에서 확인함으로써 일반화를 시도한다. 잘못된 추론을 하지만 발견한 성질이 시각적 표현과 무관하게 성립해야 한다는 증명의 필요성을 강하게 드러낸다.
보조 문제4		AN AG	-C4 C52,C54 C56 -C8	관찰자의 도움으로 주어진 것이 무엇인지 명료해졌을 때 평행선을 긋는 것을 찾아낸다. 또한 변의 특수한 비를 이용하여 넓이가 같음을 증명한다.

성을 강하게 의식하고 있고 관찰자의 도움이 있을 때 증명을 수행할 수 있다는 점에서 학생 J의 전반적인 증명 수준은 수준 3으로 볼 수 있다. 한편 학생 J는 증명에 도움이 될만한 아이디어는 갖고 있고 다양한 시도를 하지만 생각의 정리 면에서 부족한 것으로 판단된다. 문제에 대한 다양한 접근은 발전적 사고의 원동력이 되지만, 그것이 중심 방향을 잃고 지나치게 산발적인 경우에 문제의 내용이나 의미를 혼동하게 만듦으로써 문제해결에 방해가 될 수 있음을 보여준다. 또한 학생 J에게 나타난 한 가지 사실에 몰두하는 영재아의 특성은 그것이 문제해결에 방해 요소로 작용할 수도 있음을 시사한다.

지금까지 살펴본 내용을 요약하면 <표 Ⅳ-4>와 같다.

<표 Ⅳ-4> 초등 수학 영재들의 증명 수준, 증명 구성 요소에 대한 이해도, 접근 방식 비교

연구 대상	증명 수준 (지식수준)	증명의 구성 요소에 대한 이해	접근 방식
T	수준 2-4 (6단계)	C3, C5 -C1, -C2, -C4, -C6, -C7, -C8	AP AN AG
S	수준 3 (8단계)	C2, C3, C5 -C1, -C4, -C6, -C7, -C8, -C9	AP AG
J	수준 3 (9단계)	C2, C3, C5, C6, C7 -C1, -C4, -C8	AP AN AA AG

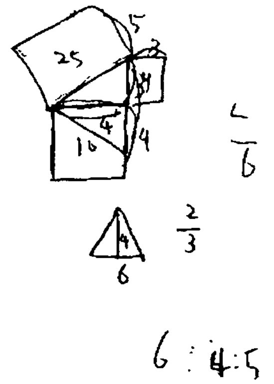
2. 증명 과정에서 나타난 인지적 특성

지금까지 살펴본 학생들의 풀이 과정을 분석한 결과에서 학생들이 보이는 사고 특성을 구체적인 행동 사례나 면담 내용을 통해 살펴보면 다음과 같다.

가. 수치적 접근

연구 대상자 3명은 모두 정도의 차이는 있지만 증명 과정 중에 부분적으로는 수치적 접근에 의존하는 경향을 보였다. 이에 대한 이유로 그들이 수학 활동에서 경험한 많은 문제들이 주로 계산과 관련된 문제였다는 점이나 그들의 사고가 기하 증명 문제와 관련하여 아직 순수한 기하적 접근 방식에 익숙하지 않다는 점 등을 생각해 볼 수 있다.

학생 J는 보조문제 1과 2를 풀면서 수치적 접근의 예를 보여주었다. 특히 해결 과정에서 자신이 의도한대로 문제가 풀리지 않자 수치적 방법에 의존한 경우이다. 학생 J가 보조문제 1의 증명 과정 중에 나온 사각형을 정사각형이라고 잘못 추론하였을 때 관찰자가 그 정당화를 요구하자 설명하지 못하는 상태에서 [그림 Ⅳ-1]을 그리고 특별한 수치를 써서 해결책을 모색하였다. 또한 보조문제 2의 증명 과정에서는 생성된 삼각형의 닮음비를 찾으면서 4:2, 2:1과 같은 특수 비를 이용하여 설명하려 하였다.



[그림Ⅳ-1]보조문제1과 관련된 학생 J의 그림

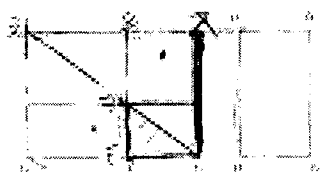
한편 학생 T는 보조문제 2가 주어졌을 때, 그림에서 추측되는 특수한 비의 관계에 주목하

여 다음과 같이 곧바로 대략적인 수치를 가정하였다.

학생 T: 이게 1이고 이게 2라면요...(보조선을 긋다가) 비가 있다고 가정하면은... 비로 2:2 라고 생각하면은... 전체가 3이 되잖아요. 이 길이가 3개 있는 거잖아요. 이 길이를 3으로 나눠서 올리면 되잖아요...

나. 주어진 것과 구해야 할 것의 혼동

문제해결의 최종 지점을 풀이 과정에서 제대로 인식하지 못하는 일이 종종 있었다. 특히 문제해결자가 직접 작도하여 구해야 하는 점이 그림에 이미 표시되어 있는 경우에 그러한 경향은 더욱 두드러졌다. 같은 맥락에서, 교육과정상 증명을 처음 배우는 8단계 학생들에게 종종 발생하는 증명 오류 중 하나인 결론을 증명 과정에서 이용하는 오류도 관찰되었다. 다음은 보조문제 3을 푸는 과정에서 학생 S와 관찰자의 대화이다.



[그림 Ⅳ-2] 보조문제 3과 관련된 학생 S의 그림

관찰자: 실제로 옮긴 것이 똑같은 넓이라는 걸 보여야 되는 거지?

학생 S: 그런데 어떻게 보여야...?. (공통부분을 지적한 후) 공통된 부분이 있구요. 이것(ㄱㄴㅌㅋ)과 이것(ㄹ'ㅋㄹㅈ)의 넓이가 같죠.

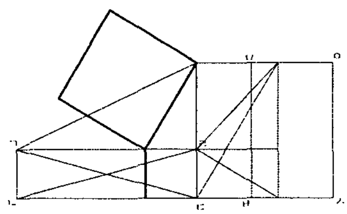
관찰자: 우리가 지금 그걸 보여야 되는 거잖아. 이 모양이 이렇게 변한다는 걸 보이려면 네가 설명한대로 이게 공통이니까 이게 왜 같은지를 설명해줘야지.

학생 S: 이것(ㄱㄴㄷㄹ)과 이것(ㄹ'ㅌㄷㅈ)의 넓이가 같으니까요.

관찰자: 그걸 우리가 지금 보이고 싶은 거잖아! 주장해야 돼. 넓이가 같다라고!

다. 한 가지 사항에 대한 집착 현상과 메타 인지

학생 J는 과제집착력이라는 영재아의 일반특성 중 하나에 포함시킬 수 있는 한 가지 사항에 대한 집착 현상을 뚜렷하게 드러내었다. 자신의 경험상 기하 영역의 문제해결시 많은 관련이 있던 피타고라스의 정리를 염두에 두고 증명을 구성하려고 하였다. 피타고라스 정리에 의존하여 30분 정도에 걸쳐 [그림 Ⅳ-3]과 같은 다양한 형태의 보조선을 긋고 시도하지만해결의 실마리를 찾지 못하자 스스로에게 "내가 왜 자꾸 직각삼각형에 집착하지?"라고 자문한다. 이는 사고의 집착이라는 특성 외에 스스로의 사고에 대한 메타인지적 차원의 통제력을 보여주는 부분이다.



[그림 Ⅳ-3] 보조문제 1과 관련된 학생 J의 그림

라. 증명에 대한 생각

학생 J의 해결 과정에서는 기하 증명에서 도형 그림의 특수성을 주의하고 일반화된 증명이 필요하다는 것을 인식하고 있음을 보여주는 부분이 발견된다. 보조문제 2에서 보조선으로 평행선을 긋는 다음 장면이다.

관찰자: ㄱㅇ은 어떻게 그렸어?

학생 J: 수직이게요. 그릴 수 있는 선은 최대한

그려봐야 되요. 중간 중간 잇기, 내려버리기. ㅈㄹ의 중점. ㅅㄹ의 중점에서 내려요. 근데. 꼭 이렇게 해서 평행이 될 수 있는 건 아니에요. 이건 운이 좋아서 될 수 있는 거예요.

관찰자: 그럼. 운이 나빠서 딱 맞아떨어지지 않는 그림을 그려줄게.

학생 J: 네. 아주 운이 나쁜 그림으로요.

또한 학생 S는 보조문제 1을 푸는 과정에서 "구한 거 같은데, 증명은 못 하겠어요."라고 하고, 문제해결 활동을 마친 후 면담 중에는 "찾으면 증명할 수도 있으니까, 증명 못하면 안 찾은 거나 마찬가지."라고 하면서 증명의 필요성에 대한 정확한 인식을 드러내었다.

V. 결 론

본 연구는 우리나라의 영재교육진흥법에 따라 운영되고 있는 경기도의 A, S시 지역교육청 소속의 과학영재교육원에 다니는 초등학교 6학년 학생 3명을 대상으로 연구자 참여 관찰과 면담의 질적 연구 방법을 통해 증명의 수준과 증명의 구성 요소에 대한 이해 정도를 확인하고 그것이 수학영재교육에 주는 시사점을 얻고자 하는 것이다.

Polya가 수학적 문제해결을 '답을 구하는 문제'와 '증명 문제'로 이분할 정도로 큰 비중을 차지하는 증명 영역에서 지역교육청 과학영재교육원 수준의 초등학교 6학년생들은 대체로 3수준에 있지만 부분적으로는 4수준의 특성을 보이거나 심지어 2수준의 특성도 포함하여 경계 수준의 폭이 광범위한 것으로 드러났다. 예를 들어, 학생 T의 경우, 출발점에서는 지식수준도 낮고 구해야 할 것에 대한 파악도 불명확하며 잘라 붙이기와 수치적 접근이 지배적이어서 보조문제 1의 과정에서는 수준 2 정도로 파악되었다. 그러나 보조문제 3과 4를 통해 교사의 적절한 도움이 주어졌을 때 직관력에 의존하여 증명을 매우 훌륭하게 수행하였다. 또한 마지막 과정에서는 관찰자가 처음에 예측하지 못한 새로운 증명 방법을 생각해낼 정도로 발전하였다.

본 연구에서 확인한 결과는 다음과 같다.

첫째, 초등학교 6학년 수학영재들은 이미 증명의 의미와 그것의 필요성을 잘 인식하고 있으며 교사가 부분적으로 개입하여 과제에 대한 이해가 충분한 학습 상황에서는 자신의 주장을 정당화하는 방법으로 기하학적 증명이 가능하다.

둘째, 초등학교 6학년 수학영재들은 증명의 과정에서 직관적인 파악에 의해 새로운 발견의 경험을 하며, 증명 수준이 지식수준에 크게 좌우되지는 않는다. 물론 문제해결 자원으로서의 지식수준이 증명 수준에 긍정적인 영향을 미칠 것이라는 추측은 가능하다. 그러나 본 연구로 판단하건대 증명을 잘 수행하기 위해서는 선수지식보다 우선하는 증명의 요소들이 다수 있다.

셋째, 초등학교 6학년 수학영재들 중에 잘라 붙이기와 수치적 접근을 주로 보이는 학생들은 도형을 통해 알아낸 사실들을 보다 일반화하지 못하므로 자신이 발견한 사실들을 형식적인 증명으로 연결하는데 어려움을 겪는다. 수업에 함께 참여한 20명의 학생들을 모두 고려해 보았을 때 수치적인 접근보다 직관적 통찰력을 바탕으로 일반화를 시도하려는 성향과 증명의 필요성에 대한 인식이 강한 학생일수록 형식적인 증명에서 성공한 경우가 많았다.

넷째, 초등학교 6학년 수학영재들은 증명의 구성 요소에 대한 이해도와 관련하여 정의와 성질의 구분, 기본적인 원리의 이용은 대부분 잘 이해하고 있으나, 추론 규칙의 연접, 보조선 등의 적절한 그림의 이용, 가정과 결론의 구분

등은 어려워하는 편이다.

이상으로부터, 제공하는 과제에 대한 학생들의 사고 수준과 사고의 유형을 고려하여 보다 체계화된 증명 학습 방법이 제공되기만 하면 초등수준에 있는 수학영재들의 연역적 사고력을 충분히 자극시킬 수 있다는 함의를 해볼 수 있다. 특히, 수학적 발견과 사고에서 형식적 증명보다 비형식적 증명이 더 중요함을 고려할 때 단계적 힌트를 통한 과제 해결의 시도는 증명 과정에서 발견된 어려움이나 오류를 극복하며 주어진 조건을 논리적으로 활용하여 발전적인 사고를 창출해내는 경험으로 열릴 수 있을 것이다. 따라서 교사는 수업 전에 학생의 사전 경험과 사고 수준을 파악하여 어떤 방법으로 어느 정도 개입할 것인지를 신중히 결정해야 한다. 본 연구에서는 사고의 도약이 필요한 보조문제를 준비하여 학생들이 장시간 사고에 진전 없이 지체하거나 그들이 원하는 경우에만 제공하였다. 이런 방법은 학생들의 문제해결에 큰 도움이 되었다.

우리나라의 실정에서 대다수의 영재 학생들은 선행 학습을 하고 있는 것으로 파악된다. 그러나 교사가 외형적으로 드러나는 학생들의 선수 지식보다 그들의 사고력 계발에 집중하면 더욱 다양하고 깊이 있는 탐구가 가능할 것이며, 교사 주도의 형식적인 증명 및 해법을 지도하기 전에 학생들이 직접 핵심요소에 대한 직관적인 파악을 할 수 있는 충분한 시간과 이해를 위해 적절한 발문을 제공하는 것만으로도 사고력이 우수한 학생들로 하여금 스스로 문제를 해결할 수 있는 경험과 성취감을 갖도록 할 것이다. 바람직한 영재교육을 위해 그러한 자기주도적인 발견의 방법이 타율적인 학습에 의한 지식의 증가보다 의미 있는 경험이 될 것이다.

그러나 본 연구에서의 분석 결과는 투입한 특정 과제와 소수 인원을 중심으로 한 집중 관찰의 방법이 주는 한계로 인해 일반성의 제약이라는 점에서 어느 정도의 제한점을 지닌다. 또 다른 과제에 대해서는 더 다양한 결과가 예측되므로 이 연구 결과를 참조하여 수학 영재의 증명 수준과 증명의 구성 요소에 대한 이해도를 파악하기 위한 지속적인 후속 연구가 기대된다. 특히 본 연구에서 영재아들의 증명 과정을 촉진시킨 교사의 개입 대신 학생간의 상호작용을 통한 수준의 이행에 대한 연구와 증명 수준의 차이에 대한 원인 분석도 필요할 것이라 생각된다. 그리고 5차례의 예비 실험을 통해 초, 중, 고, 대학생들이 보여준 반응들을 세밀히 비교 분석해 보면 초등 수학영재들의 사고 수준을 이해하는 또 다른 의미 있는 결과를 얻을 수 있을 것으로 기대한다.

참고문헌

서동엽(1999). **증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색 -중학교 수학을 중심으로-**. 서울대학교 대학원 박사학위논문

Anderson, J., & Austin, K. (1995). Paradigms of proof. *The Mathematical Gazette, 79*, 489-495.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children*(pp. 216-235). London: The Open University.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof - Explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 23-40.

Clairaut, A. C. (2005). **클레로의 기하학 원론**.

(장혜원 역). 서울: 경문사. (불어 원작은 1920년 출판)

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras 24*, 17-24.

Dreyfus, T., & Hadas, N. (1987). Euclid mat stay-and even be taught. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12*(1987 Yearbook, pp. 47-58). Reston, VA: National Council of Teachers of Education.

Galbraith, P. L. (1981). Aspects of proving: A clinical investigation of process. *Educational Studies in Mathematics, 12*(1), 1-28.

Hanna, G., & Jahnke, H. N.(1996). Proof and proving. In A. J. Bishop et al. (Eds). *International handbook of mathematics education*(pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children,* Chicago: The Univ. of Chicago Press.

Mesquita, A. L. (1989). Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie. *Educational Studies in Mathematics 20*(1), 55-77.

Miyasaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics: As steps from an inductive proof to an algebraic demonstration. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 47-68.

Sriraman, B. (2004). Gifted ninth graders' notions of proof: Investigating parallels in approaches of mathematically gifted students and professional mathematicians. *Journal for the Education of the Gifted, 27*(4), 267-292.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education.* Orlando: Academic Publishers.

Waring, S. (2000). *Can you prove it? Developing concepts of proof in primary and secondary schools.* London: The Mathematical Association.

Mathematically Gifted 6th Grade Students' Proof Ability for a Geometric Problem

Song, Sang Hun (Gyeongin National University of Education)
Chang, Hye Won (Chinju National University of Education)
Chong, Yeong Ok (Gyeongin National University of Education)

This study examined the proof levels and understanding of constituents of proving by three mathematically gifted 6th grade korean students, who belonged to the highest 1% in elementary school, through observation and interviews on the problem-solving process in relation to constructing a rectangle of which area equals the sum of two other rectangles. We assigned the students with Clairaut's geometric problems and analyzed their proof levels and their difficulties in thinking related to the understanding of constituents of proving. Analysis of data was made based on the proof level suggested by Waring (2000) and the constituents of proving presented by Galbraith(1981), Dreyfus & Hadas(1987), Seo(1999). As a result, we found out that the students recognized the meaning and necessity of proof, and they performed some geometric proofs if only they had teacher's proper intervention.

* **Key words** : proof levels(증명 수준), constituents of proving(증명 구성 요소), mathematically gifted(수학 영재), Clairaut(클레로), geometrical construction(기하 작도)

논문접수 : 2006. 9. 26
심사완료 : 2006. 11. 10