

Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따른 무리수 개념 지도 방법의 적용 사례

이영란* · 이경화**

Freudenthal은 수학화 학습지도원리로서 수학의 역사발생 과정을 고려하고 학습자의 상식에서 출발하여 학습자 스스로 지식을 구성하도록 하는 것을 제시하였다. 이 원리를 무리수 지도에 적용한다면 무리수의 존재성을 파악하도록 하는 문제 상황에서 출발해야 한다. 이 연구에서는 Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따른 무리수 개념 도입 방식을 알아보고, 실제로 Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따른 무리수 지도 결과 나타나는 학습과정의 특징을 알아보았다. 교수실험에 참여한 학생들은 기존에 학습한 유리수 체계에 대한 반성적 사고를 통하여 무리수의 존재성과 무리수 학습의 필요성을 인식하였으며, 무리수의 역사발생적 배경에 따른 여러 가지 탐구 활동과 측정 활동을 통해 무리수 개념을 발전적으로 이해하면서 학습하였다.

I. 들어가는 말

서도 학생들이 무리수 학습에 어려움을 느끼고 있음을 지적하고 있다(김재성, 1992; 최성희, 1999; 노민숙, 2002 등).

Freudenthal은 수학의 역사발생 과정을 고려하고 학습자의 상식에서 출발하여 학습자 스스로 지식을 구성하도록 하는 수학화 학습지도론을 제시하였다(정영옥, 1997). 수 개념도 역사적 산물이므로 수 개념 지도에 있어 역사발생적 원리를 적용하는 것이 필요하다(우정호, 2000). 현행 교육과정에서 수 체계는 자연수, 정수, 유리수, 실수, 복소수의 순서로 도입된다. 자연수, 정수, 유리수는 비교적 학습자의 상식을 고려하기 위한 다양한 시도에 근거하여 지도되고 있다. 그러나 무리수의 경우에는 그 역사발생 과정을 고려하거나 실생활 상황에서 출발하려는 시도가 거의 이루어지지 않고 있다. 이는 무리수의 역사발생 과정이 학교수학에 반영되기 어렵고, 실생활 상황에서도 도입하기가 어렵기 때문이다. 선행연구에

이 연구는 무리수 개념 지도 방식을 수정하거나 보완하는 것을 목표로 하며, 그 주요 방식을 Freudenthal의 수학화 학습지도원리에 근거하고자 한다. 이를 위해 설정한 연구 문제는 다음 두 가지이다. 첫째, Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따른 무리수 개념 도입 방식은 무엇인가? 둘째, Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따른 무리수 개념 도입 수업에서 나타나는 학습과정의 특징은 무엇인가?

II. Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따른 무리수 개념 도입

Freudenthal(1973)은 학교수학이 의미 충실한

* 용인 신릉중학교, la-ny@hanmail.net

** 한국교원대학교, khmath@knue.ac.kr

문맥에서부터 출발하여 학생들 간의 상호작용을 통하여 반성적 사고를 유발함으로써, 점진적으로 수학화되어야 한다고 하였다. 수학화는 현상을 수학적 수단으로 조직하는 것으로서 학생들의 창조적인 활동을 중시할 때 이루어질 수 있고, 이렇게 수학화된 지식은 실제적인 문제 상황에 적용할 수 있으며, 점차로 더 높은 수준으로 발전되므로 실제적인 정신 활동으로 나아가게 된다. Freudenthal은 교수학적 현상학, 안내된 재발명의 원리, 학습 수준 이론, 문맥 수학 등을 학습지도 원리로 제시하였다(정영옥, 1997에서 재인용). 이하에서는 이러한 원리를 재음미하여 무리수 지도 관점을 도출하고 구체적인 수업 계획을 도출하였다.

1. Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따른 무리수 지도 관점

교수학적 현상학은 본질과 현상 사이의 관계를 파악하여 교수학적으로 재구성하는 과정과 관련된다. 여기서 본질은 수학적인 개념, 구조 등을 말하는데, 이는 물리적·사회적·정신적 세계 및 수학적 현상을 조직하는 도구로 발명된 것이다. Freudenthal에게 어떤 수학적 개념, 구조의 현상학이란 그것이 창안된 현상과 관련시켜, 그리고 그것이 인류의 학습과정에서 확장되어 온 현상과 관련시켜 그 본질을 기술하는 것이다(우정호, 2000). Freudenthal은 이러한 현상과 본질의 교대 작용으로 점진적인 수준 상승이 이루어지면서 수학화가 이루어진다고 하였다. 그러므로 교수학적 현상학에 의거하여 무리수의 학습과정을 설계할 때에는 무리수의 본질이 적절한 현상 속에서 발견의 대상으로 내포되도록 해야 한다.

Freudenthal이 제시한 안내된 재발명의 원리는 수학자들이 수학적 지식을 만들 때 경험한

바를 학습자들도 교사의 안내에 따라 경험함으로써 수학적 지식을 재발명하도록 한다는 것이다(우정호, 2000). 이러한 원리에 따라 수학을 지도하기 위해서는 교사의 사고실험이 필수적이다. Freudenthal(1973)은 이 사고실험 결과를 바탕으로, 실제와의 관련성이 적재된 수학을 구성할 것을 주장하고 있다. 다시 말하여 교사의 주도하에 수학의 역사적 발달 과정을 단축된 형태로 재현시켜야 하며, 이 때 학생들의 활동적, 구성적 역할이 매우 중요하다. 그러므로 이 관점에 따라 무리수를 지도하기 위해서 교사는 무리수의 역사발생적 맥락을 탐구하고, 무리수가 발생되는 과정에 대한 사고실험을 해야 한다. 학생들은 역사적으로 무리수가 발생되었던 상황을 경험함으로써 무리수 학습에 의미를 부여할 수 있으며, 기존에 학습되었던 유리수와 연결할 수 있게 된다. 무리수에 대한 이런 의식적인 재발명은 무리수를 구성해가는 활동을 통하여 이루어지고, 이렇게 획득된 무리수 개념을 산술 조작까지 확장시킴으로써 무리수에 대한 이해가 향상될 수 있다.

Freudenthal의 학습 수준 이론에 의하면, 수학적 사고 활동이 경험의 세계를 조직하는 가운데 이루어지며, 한 수준에서 경험을 정리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 의식되어 그것을 조직화하는 활동이 이루어지게 되면서, 그 다음 수준으로의 비약을 하게 되는 과정을 반복한다. 그러므로 수학의 학습지도는 그러한 불연속적인 사고 수준을 거치면서 수학적 사고를 재발명해 가도록 되어야 한다(정영옥, 1997). 이 수준 이론은 van Hieles의 연구에 의해 구체화되었으며, 직관적 수준, 서술적 수준, 국소적인 논리적 관계를 파악하는 수준, 형식적으로 논리를 파악하는 수준, 논리적 법칙의 본질을 파악하는 수준 등으로 구분되었다(우정호, 2000; 정영옥, 1997). 무리수의 학습과정도 Freudenthal

의 학습 수준 이론에 의해 구체적으로 설정될 수 있으며, 각 수준에서의 현상과 본질에 대한 논의가 구체화될 수 있다.

풍부한 문맥을 제공함으로써 수학화가 가능해진다고 하였다. 문맥은 학습자가 수학화하게 되는 열려 있는 현실 상황을 의미한다. 풍부한 문맥을 제공하기 위해서는 가르치려는 수학적 개념을 담은 현상을 교수학적으로 분석하여 제시하고, 그것이 학생들에게 의미가 있어야 한다(Freudenthal, 1991). 현실 속에서 의미 풍부한 문맥을 찾아내고, 그것을 교수학적으로 다듬어서 제공하는 것은 수학화를 추구하는 교수 학습에서 가장 먼저, 그리고 가장 중요하게 준비해야 할 일이다(정영옥, 1997).

결국 수학화 학습지도론에 따른 무리수 지도 관점은, 유리수에 대한 반성적 사고를 자극하는 풍부한 문맥에서 출발하여, 점진적인 수학화를 거쳐 무리수의 본질을 획득해가는 것이다. 이는 변희현·박선용(2002)의 제안과 기본적으로 일치하는 관점으로, 제곱근 개념에서 출발하여 순환하지 않는 무한소수로 무리수를 정의하는 현행 교과서와는 상당히 다른 도입 방식이다.

2. Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따른 무리수 지도 관점의 구체화

앞서의 논의에 기초하여 차시별 무리수 지도 계획을 다음과 같이 구체화할 수 있다. Lappan et al. (2004)은 이 연구의 기본 관점과 유사하게 무리수의 역사발생적 배경을 강조하는 방식으로 교재를 구성하였다. 피타고라스 정리를 무리수 개념 학습 이전에 간략한 형태로 학습하는 방법은 이 책에서 이미 시도하고 있으며, 이 연구에서는 이러한 구체적인 시도를 적극적으로 반영하여 무리수 지도 계획을 작성하였다.

1차시에는 5×5 격자용지 위에 정사각형을 그려보고, 여덟 가지 정사각형의 넓이를 구하는 활동을 하게 된다. 또한 각 정사각형의 한 변의 길이를 구하게 함으로써 넓이가 2, 5, 8, 10인 정사각형의 한 변의 길이는 구할 수 없음을 확인한다. 교사는 이 단계에서 학생들에게 답을 강요하지 말고 표에 공란을 두거나 학생들 나름대로의 표현법을 사용하게 한다([그림 II-1] 참조). 이러한 과정을 통하여 학생들은 유리수로 표현할 수 없는 수의 존재를 의식하게 되고, 암묵적으로 그려한 수의 표현에 대한 필요성을 느끼게 된다.

<표 II-1> 수학화 학습지도론에 따른 무리수 지도

차시	학습 내용		준비물
1 무리수 발견 경험	격자 위의 도형에 대한 넓이 구하기	활동지	
	5×5 격자 위의 모든 정사각형 넓이 찾기		
2 피타고라스 정리 이해	직각 삼각형에서 세 변의 길이 관계 탐구	격자용지	
	퍼즐을 이용한 피타고라스 정리 증명		활동지, 가위, 풀
3	제곱근 이해		
4	Theodorus 바퀴 탐구		종이자, 가위, 풀
5 무리수 특성 탐구	$\sqrt{2}$ 의 근사값 탐구	계산기	
	무리수의 소수 표현 탐구		

5. (문제 3)에서 찾은 정사각형의 넓이와 한 변의 길이에 관한 다음 표를 완성하여라.

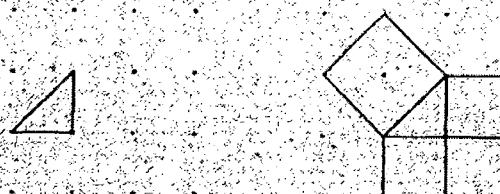
정사각형의 넓이	정사각형의 한邊의 길이	정사각형의 넓이	정사각형의 한邊의 길이
1			
2			

6. (토론) (문제 5)에서 정사각형의 한 변의 길이를 구하지 못한 경우가 있는가?

왜 구할 수 없다고 생각하는가?

[그림 II-1] 1차시 수업안의 일부

1. 아래 그림에서 직각 삼각형의 각 변 위에 그려진 정사각형의 넓이를 구하여라.



2. 문제 1과 같은 방법으로 직각 삼각형의 각 변 위에 정사각형을 그린 후, 정사각형의 넓이를 구하여 아래 표를 완성하여라(격자용지 제공).

변1	변2	변1위의 정사각형 넓이	변2위의 정사각형 넓이	빗변의 정사각형 넓이
1	1	1	1	2
1	2			
2	2			
1	3			
2	3			
3	3			
3	4			

3. (토론) 위의 표를 보고 세 정사각형의 넓이 사이에 어떤 관계가 있는지 추측하여라.

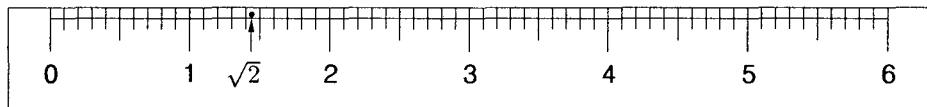
[그림 II-2] 2차시 수업안의 일부

2차시 수업에서는 1차시에 수업에서 나타낼 수 없었던 길이를 어떻게 표현해야 할지에 주목하게 하기 위하여 피타고라스 정리를 도입한다([그림 II-2] 참조). 피타고라스 정리는 무리수로 표현되는 선분이 존재하는 상황을 더 자연스럽게 더 다양하게 확인하게 한다. 학생들은 기존에 배운 유리수로는 표현할 수 없는 새로운 길이의 존재성을 확인하고, 그 길이를 표현하는 방법에 관심을 갖게 된다. 여기서 피타고라스 정리의 증명은 퍼즐 활동을 통하여 직관적인 수준에서만 하도록 한다. 이 수업에서 피타고라스 정리는 형식화된 증명과 더불어 엄밀하게 다루어지는 것이 아니라 무리수의 존재성과 그 표현 방법 개발의 필요성을 부각시키는 정도로만 다루어진다.

3차시에는 제곱근 개념을 학습한다. 앞의 수업에서 표현할 수 없었던 정사각형의 한 변의 길이는 이제 제곱근을 이용하여 표현할 수 있게 된다. 학생들은 피타고라스 정리를 이용하여 다양한 길이의 선분으로 표현되는 무리수를 접하게 된다. 그러나 아직 무리수의 대소 관계

를 파악할 수 없으며 유리수와의 관련성도 알 수 없다. 이제 4차시에서 Theodorus 바퀴를 도입한다([그림 IV-4] 참조). 이미 학습한 피타고라스 정리를 이용하여, Theodorus가 시도한 방법으로 무리수를 확장시키고 또한 종이자를 이용하여 무리수로 표현되는 선분의 길이를 구하면서 유리수 사이에 무리수를 위치시키도록 한다. 이와 같이 측정 활동을 통하여 무리수를 도입함으로써, 학생들은 무리수의 크기를 실제로 경험하고 무리수 개념을 이해하기 위한 기초를 마련할 수 있다. 특히, 피타고라스 정리는 무리수를 확장하기 위한 중요한 도구로 사용된다. 또한 종이자를 이용하여 무리수의 크기를 측정하고 그 위치를 눈금 위에 표현하는 활동은 이후에 수직선 위에서 유리수와 무리수의 크기를 비교하는 학습 활동을 하는 데에 홀륭한 기초가 된다. 5차시에는 무리수의 크기를 표시한 눈금자를 보면서 무리수의 소수 표현을 알아본다([그림 II-3] 참조). 무리수의 소수 표현을 구하기 위해 처음에는 눈금자를 이용한 시각적인 방법을 사용하기 때문에 쉽게 무리수와 소수를 연결시킬 수 있다.

3. 문제 2의 활동에 의하면 $\sqrt{2}$ 는 아래 그림과 같은 위치에 표시된다.



$\sqrt{2}$ 는 1보다 크고 2보다 작은 수로서 부등식 $1 < \sqrt{2} < 2$ 로 나타낼 수 있다.

다음 빈 칸에 알맞은 수를 써라.

$$(\quad) < \sqrt{3} < (\quad)$$

$$(\quad) < \sqrt{5} < (\quad)$$

$$(\quad) < \sqrt{6} < (\quad)$$

[그림 II-3] 5차시 수업안의 일부

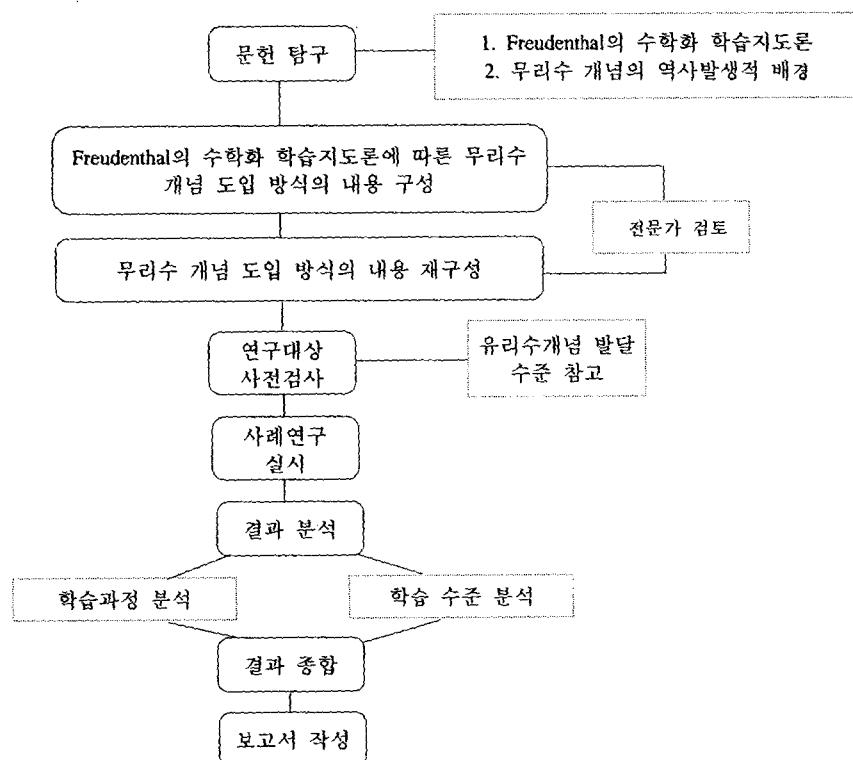
눈금자에 나타난 무리수의 크기를 대략적으로 알아보는 데 그치지 않고, 주어진 무리수에 가까운 소수를 소수 첫째 자리, 소수 둘째 자리까지 점차로 알아보게 함으로써 무리수의 소수 표현을 탐구하도록 한다. 6차시 수업은 5차시 수업과 연결선 상에 놓여 있다. 6차시에는 계산기를 이용하여 $\sqrt{2}$ 의 근사값을 소수 넷째 자리까지 찾으면서 무리수의 소수 표현이 어떤 특징을 가지는지 탐구한다. 계산기에 표시된 제곱근 키를 활용하여 $\sqrt{2}$ 의 소수 표현을 찾게 하고 $\sqrt{2}$ 의 소수 표현을 다시 제곱하기도 한다. 이 때 $\sqrt{2}$ 의 소수 값을 제곱하여도 2가 되지 않음을 발견하면서 무리수의 유한한 소수 표현이 존재하는가를 탐구한다.

지금까지 제시한 Freudenthal의 수학화 학습

지도론에 따른 무리수 개념 도입 방식은, 우리나라 현행 교육과정의 무리수 개념 도입 방식과 달리 다음과 같은 특징이 있다. 첫째, 무리수 개념의 역사발생적 배경을 보다 강조한다. 둘째, 격자용지를 활용한 도형의 탐구과제를 통해 무리수의 존재성을 먼저 인식하도록 한다. 셋째, 피타고라스 정리를 무리수 개념 학습의 도구로 활용하여 무리수의 존재성을 파악하고 무리수 표현의 필요성을 느끼게 한다. 넷째, 계산기를 활용하여 무리수의 소수 표현의 특정을 파악하게 한다.

III. 무리수 학습과정의 분석 방법

이 연구에서는 문헌 검토를 통하여 Freudenthal



[그림 III-1] 연구절차의 상세화 .

의 수학화 학습지도론과 무리수 개념의 역사발생적 배경을 탐구하고 이를 바탕으로 Freudenthal의 수학화 학습지도론에 입각한 무리수 개념 도입 방식을 도출하였다. 이제 새로운 무리수 개념 도입 방식이 학생들의 무리수 이해에 어떠한 영향을 미치는지 자세히 알아보기 위하여 정성적 사례연구를 실시하였다. 연구절차는 [그림 III-1]과 같다.

1. 교수실험

사례연구에서는 연구 방법 및 목적에 맞는 적절한 연구 대상을 선정해야 한다(Merriam, 1997). 이 연구에서 목적에 맞는 연구 대상은 유리수 개념을 이해하고 무리수 개념은 이해하지 못하는 학생들이다. 유현주(1995)가 제시한 유리수의 개념적 관계망과 학습수준에 의하면, 초등학교 6학년부터 중학교 2학년 학생들의 유리수 학습 수준은 제 3수준으로서 형식적인 이해의 단계이다. 이 단계의 학생들은 조작적인 관계의 이해 위에서 유리수의 계산 문제를 해결할 수 있으며, 유리수를 형식적 처리의 대상으로 이해할 수 있어야 한다. 그러므로 이 연구에 참여하는 학생들이 유리수 개념에 대한 이해를 바탕으로 무리수 개념을 어떻게 이해하는지 관찰하기 위해 3수준의 이해 단계를 갖춘 학생들을 선정하였다. 이 기준에 의거하여 충북 청주의 M중학교 2학년 학생 4명(남학생 2명(학생 1, 학생 2), 여학생 2명(학생 3, 학생 4))을 선정하였다.

이 연구에 참여한 학생들 모두 수학 과목에 대한 사교육을 받지 않는 학생으로 무리수에 대한 선형 학습은 없었다. 유리수 학습 수준 사전 검사지는 유리수의 크기를 수직선에 나타내기, 유리수를 세분하여 자연수, 정수, 유리수로 분류하기, 유리수의 사칙연산을 주된 내용

으로 하였다. 사전 검사 결과, 학생 3은 모든 문항에 정답을 제시하여 유리수 성취 수준을 상으로 정하였다. 학생 4는 유리수의 크기를 수직선에 나타내는 문제에서 $-\frac{1}{6}$ 의 위치를 바르게 나타내지 못하였고, 0을 정수로 분류하지 않고 정수가 아닌 유리수로 분류하였다. 또한 유리수의 사칙연산을 계산하는 문제 중 한 문제에서 계산 오류를 나타내어 유리수 성취 수준을 중으로 정하였다. 학생 1과 학생 2는 $-\frac{1}{6}$ 를 수직선 위에 바르게 나타내지 못하였고, 유리수 사칙연산에서 각각 한 문제씩 계산의 오류가 있었으므로, 둘 다 유리수 성취 수준을 중상으로 정하였다. 학생 3을 제외한 세 학생은 모두 $-\frac{1}{6}$ 의 위치를 수직선 위에 바르게 나타내지 못하였으나, 유리수 학습 성취 수준은 중 이상으로서 유리수의 계산 문제를 해결할 수 있으며 유리수를 형식적 처리의 대상으로 이해한다고 볼 수 있다. 학생들을 지도한 교사는 수학교육과 대학원에 재학하고 있으며, Freudenthal의 수학화 학습지도론의 의미를 충분히 알고 있는 여교사였다.

Denzin(1978)은 삼각검증법을 자료 삼각검증, 연구자 삼각검증, 이론적 삼각검증, 방법론적 삼각검증의 네 가지 유형으로 나누어 소개하였다. 이 연구는 방법론적인 삼각검증법을 사용하였다. 이는 연구자가 자신의 연구에 대한 이해를 증진시킬 뿐 아니라 연구결과를 확증하기 위해 참여관찰, 면접, 문서분석의 세 가지 방법을 함께 적용하는 것을 가리킨다(Merriam, 1997, 재인용).

2. 학습과정 분석 방법

이 연구에서 사례연구는 문헌검토를 통해서 개발된 교수 자료가 무리수 이해에 어떤 영향

을 미치는지 알아보는 것이 목적이므로 이를 객관적으로 파악하기 위한 이론적인 틀을 통하여 학습과정의 특성과 학습 수준의 정도를 분석하였다. 우선 학습과정의 특성 측면은 Hiebert et al. (2004)이 제시한 분석틀을 이론적인 근거로 하였고, 무리수 개념의 이해 정도는 van Hieles가 제시한 수학 학습 수준 이론을 참고하여 개발한 수준에 기초하였다.

Hiebert et al. (2004)은 이해에 초점을 둔 수학 수업의 주요 측면과 특징을 과제의 특성, 수학적 도구의 활용, 수업의 사회문화, 교사의 역할, 공평성과 접근 가능성에 의해 분석하였다. 이 연구에서는 이 중 과제의 특성과 수학적 도구의 활용 측면에 초점을 두어 분석하였다. 학습과정에서 학생들이 무리수 개념을 이해하였다는 것은 기존에 알고 있던 수 개념과 무리수의 개념을 연결할 수 있어야 한다는 것을 의미하며 학생들에게 부여되는 과제가 기존의 지식과 새로운 지식을 연결할 수 있는 특성을 가져야 함을 나타낸다. 과제의 특성은 과제의 연결성과 발전가능성을 살펴봄으로써 학생들의 이해과정을 분석하는 도구이다. 이해에 도움이 되는 과제의 특성은 학생들의 흥미를 유발하고 지식이 서로 연결되도록 의미 있는 내용을 담아야 하며, 반성적 사고를 유발해야 한다. 아이디어를 여러 다른 관점에서 바라보고, 다시 생각하기도 하며, 깊이 있게 되돌아보면서 반성적 사고가 일어난다. 이러한 반성적

사고는 아이디어나 사실, 절차 사이의 관계를 인식하고 형성하게 하는 원동력이 된다(Hiebert et al., 2004: 7).

학생들은 기존의 지식에 새로운 수학적 개념을 연결하기 위하여 수학적 도구를 활용한다. 여기서 수학적 도구라는 것은 문제해결에 사용하는 모든 도구로서 학생들이 이미 알고 있는 지식, 학생들의 언어, 문자, 그리고 학생들이 사용하는 학습 도구를 가리킨다. 어떤 수학적 도구를 사용하는가에 상관없이 도구는 사고방법을 어느 정도 구체화한다. 수학적 활동 자체가 도구의 사용을 필요로 하며, 도구를 사용하면서 사고방법이 상당 부분 결정되는 것이다 (Hiebert et al., 2004). 그러므로 학생들이 문제를 해결하기 위해 수학적 도구를 사용할 때, 수학적 도구의 의미를 스스로 구성하는 방식을 살펴보거나, 기록하고 의사소통하고 사고하기 위해 도구를 사용하는지를 살펴보는 것은 학습과정의 특성을 이해하는 중요한 분석 도구가 될 것이다.

이 연구에서 학습 수준 분석은 학생들이 무리수를 어느 정도의 수준까지 이해하는지 알아보는 것이다. van Hieles가 제시한 일반적인 수학 학습에 대한 수준(우정호, 2000)을 바탕으로 하여 무리수 개념의 학습 수준을 나누고 이를 학생들의 무리수 이해 정도를 파악하는 도구로 사용한다. 이 연구에서 개발한 무리수 개념의 학습 수준은 다음과 같다.

<표 III-1> 학습과정 분석틀

범주	분석 내용	분석 관점
과제의 특성	반성적 사고	과제를 해결하면서 반성적으로 사고하는가?
	발전가능성	발전가능성을 내포하는 과제인가?
수학적 도구	의미 구성	수학적 도구의 의미를 스스로 구성하는가?
	활용	문제해결, 의사소통 등을 위해 수학적 도구를 활용하는가?

제 1수준은 시작적 수준으로, 구체적인 문맥에서 무리수를 시작적으로 인식하는 수준이라고 할 수 있다. 여기서 구체적인 문맥은 이미 알고 있는 유리수 체계와 관련된 것이며, 유리수로는 파악되지 않는 수가 존재한다는 것을 직관적으로 확인함으로써 무리수의 존재성을 파악하는 수준이다. 주요 문제는 유리수 체계 내에서 표현되지만 유리수가 아닌 새로운 수에 의해 해결되는, 곧 무리수의 존재성 인식에 의해 이해되는 현상이다.

제 2수준은 서술적 수준으로, 새로운 수 자체를 대상으로 하여 제곱근 기호, 피타고라스 정리를 이용하여 그 수의 표현 형식을 개발하는 단계이다. 이제 탐구 대상은 유리수로 설명할 수 없는 새로운 수의 존재성 자체이며, 새로운 수와 유리수 사이의 관계를 파악하고 표현하기 위한 방법으로서의 제곱근과 피타고라스 정리가 본질이 된다.

제 3수준은 이론적 수준으로, 제곱근과 피타고라스 정리에 의해 표현된 무리수를 소수 표현에 의해 명확하게 규명함으로써 유리수와는 본질적으로 다른 특성을 가진 수 체계라는 것을 이해하고 설명하는 단계이다. 여기서 순환하지 않는 무한소수와 순환하는 무한소수의 구분은 제곱근으로 표현되는 무리수를 기준 수 체계인 유리수와 다른 새로운 수 체계로 이해하게 하는 본질이 된다.

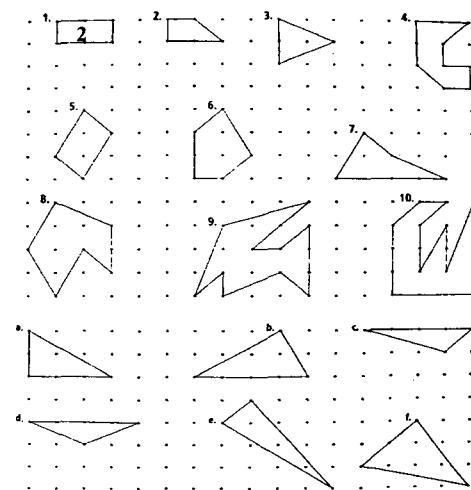
제 4수준은 형식적 수준으로, 기존의 수 체계에 무리수의 위치를 논리적으로 배치하고 공리적이고 연역적인 방법으로 무리수를 다루는 단계이다. 결과적으로 실수 체계를 형식화하는 수준이라고 할 수 있다. 이 논문은 무리수 개념 도입에 대한 연구이므로 제 1수준에서 제 3수준까지의 학습을 기대하고 학생들의 수준을 분석할 것이며 특히 한 수준에서 다음 수준으로의 이행 과정에 주목할 것이다.

IV. 사례연구 결과

이 절에서는 Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따른 무리수 개념 도입 방식을 4명의 학생들에게 지도한 결과를 분석한다. 먼저 이 연구에서 개발한 과제가 무리수 학습과정을 어떻게 구현하는지, 학생들의 반성적 사고를 어떤 방식으로 자극하는지, 발전가능성을 얼마나 내포하고 있는지, 수학적 도구를 어떤 방식으로 활용하는지 살펴본다. 이어서 문헌연구를 바탕으로 설정한 무리수 학습 수준에 비추어 학습 과정의 특징을 알아본다.

1. 반성적 사고 측면

이해에 도움을 주는 과제는 반성적 사고를 유발하고, 지식이 서로 연결되도록 한다. 또한 반성적 사고를 자극하는 과제는 문제해결 과정에 난관이 있어야 하며 수학적으로 의미 있는 혼란을 일으킬 수 있어야 한다(Hiebert et al, 2004: 25). 이 연구에서 Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따라 개발한 첫 번째 과제는 다음 도형들의 넓이를 구하고 구한 방법을 공유하는 것이었다.



[그림 IV-1] 도형의 넓이 구하기

이어서 5×5 격자용지에 가능한 많은 정사각형을 그린 후 그 넓이를 구하도록 한다. 또한 다음 표를 완성하도록 한다. 이는 무리수의 발견을 경험하도록 하기 위한 내용이었다.

5×5 격자용지 위에 그릴 수 있는 정사각형의 종류는 모두 8가지로서 그 넓이는 각각 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 16이다. 이 중 한 변의 길이를 구하지 못하는 경우는 넓이가 2, 5, 8, 10인 경우이다. 다음은 학생들이 주어진 과제를 기반으로 수 체계에 대한 반성적 사고를 어떤 식으로 전개하는지 보여준다.

교사: 한 변의 길이를 구하지 못한 경우가 있었습니까?

학생들: 예.

교사: 예. 왜 구할 수 없다고 생각합니까?

학생 1: 글쎄요.

교사: 글쎄요? 틀리든 맞든 여러분의 생각을 말해 봐요...

학생 1: 어 이거는요. 어.

교사: 응, 말해봐.

학생 1: 음. 한 변의 길이를 곱한 경우는요. 자연수를 제곱하든, 분수를 제곱하든, 소수를 제곱하든 간에요. 어. 자연수를 곱했을 때는 이런 값을 갖지 못하고, 소수를 곱했을 때는 소수자리가 영이 되는 소수가 없기 때문에, 구하지 못한다고 생각해요.

교사: 그렇게 생각한다? 또 다른 사람. 응, 학생 2 얘기해 봐.

학생 2: 넓이를 소인수분해 해보면요. 2가 2곱하기 1이 나오잖아요.

교사: 응

학생 2: 근데. 이게 제곱. 어떤 수의 제곱이 되려면 지수가 짝수가 되어야 하는데, 홀수가 나오니까. 안돼요.

위의 발췌문에서 학생들은 정사각형의 한 변의 길이를 구하지 못하는 이유를 이미 알고 있는 지식과 연결시켜 생각하고 있다. 학생 1은 자연수, 분수, 소수 등 기존에 알고 있는 수의 표현 방식에 주목하여, 자연수를 제곱해서 2, 5, 8, 10을 얻을 수 없고, 소수점 이하가 0이 아닌 소수를 제곱하면 소수점 이하가 0이 되지 않으므로 2, 5, 8, 10을 얻지 못한다고 설명하였다. 자연수 범위에서 먼저 판단해보고, 자연수가 아닌 유리수를 소수 표현에 연결하여 반성적으로 사고한 후, 비형식적이긴 하지만 타당한 근거를 제시하고 있음을 알 수 있다. 학생 2는 넓이가 제곱수로 표현되기 때문에 소인수분해하면 지수가 짝수로 나타난다고 설명하였다. 2를 소인수분해하면 지수가 홀수이므로 어떤 도형의 넓이가 될 수 없다고 설명하였다.

위의 과제는 정사각형이라는 매우 특수한 도형을 격자용지에서 탐구하도록 함으로써, 쉽게 넓이를 구하면서도 그 한 변의 길이를 구할 수 없는 갈등 상황을 제시하고 있다. 이는 학생들에게 이미 알고 있는 유리수를 대상화하여 추론하게 하며, 학생 1과 학생 2가 제시한 바와 같이 새로운 수의 필요성에 주목하게

<표 IV-1> 정사각형의 넓이와 한 변의 길이

넓이	정사각형의 한 변의 길이	넓이	정사각형의 한 변의 길이
1			
2			

하였다. 학생들은 반성적 사고를 통해 유리수로는 표현할 수 없는 수가 있다는 것을 느낄 수 있으며, 정사각형의 한 변의 형태로 존재하는 무리수를 인식하였다. 무리수 개념을 학습하기 전에 반성적 사고를 거쳐 무리수의 필요성 또는 존재성을 먼저 느끼게 하는 것은 기존의 수 체계와 새롭게 학습하게 될 무리수 개념을 바르게 연결시키는 데 중요한 역할을 한 것으로 보인다.

2. 발전가능성 측면

발전가능성 측면은 학생들이 문제를 해결하는 동안 수학적 지식을 스스로 발견하고, 사용함으로써 수학적으로 의미 있는 구조를 발견하거나, 문제해결을 위한 전략이나 방법을 개발하는지를 분석하기 위한 기준이다(Hiebert et al., 2004: 31). 다음 발췌문에서 학생들의 학습 과정이 이후 학습으로의 발전가능성을 내포하고 있음을 확인할 수 있다.

학생 1 : 방법을 찾아야 되는데요.

교사 : 응

학생 1 : 어떤 방법인지 모르겠어요

교사 : 어떻게 할까?

학생 1 : (친구들을 보며) 어떻게 하면 좋을까?

학생 2 : 2 $x=2$. 아! x 제곱은 2라고 뒤요.

교사 : 아. 여기를? 여기다 써봐! 자꾸 헷갈리니까.

학생 2 : 빈칸에 x 라고 쓴다.

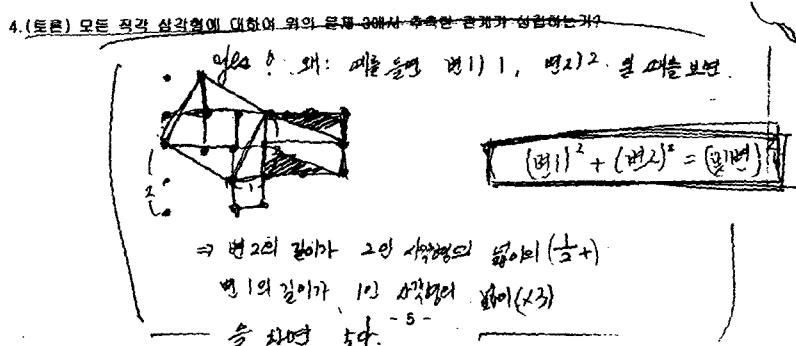
교사 : 아. 여기를 이렇게 하자고? 그럼 여기는.

학생 2 : 여기는 y 제곱.

위의 대화에서 학생 2는 넓이가 2인 정사각형의 한 변을 “제곱해서 2가 되는 어떤 수”라는 의미에서 x 로, 넓이가 5인 정사각형의 한 변은 “제곱해서 5가 되는 어떤 수”的 의미로 y 를 사용하였다. 이는 유리수로는 표현할 수 없는 새로운 수에 대한 대수적인 조건, 그리고 그 조건을 이용한 표현 방식에 주목하는 것으로 볼 수 있다. 결국 학생 2의 제안은 제곱근의 정의로 발전할 수 있는 의미를 담고 있으므로 이 연구에서 제공한 과제가 발전가능성을 내포하고 있음을 알 수 있다.

3. 수학적 도구의 활용 측면

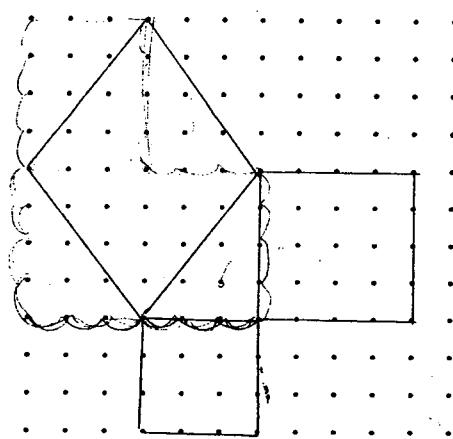
Hiebert et al(2004)에 따르면, 수학적 도구는 기록을 위해, 의사소통을 위해, 사고를 위해 활용된다. 이 연구에서는 5×5 격자용지, 종이자, 계산기, 가위, 풀 등의 구체물과 정사각형의 넓이, 피타고라스 정리, 제곱근 등의 수학적 개념



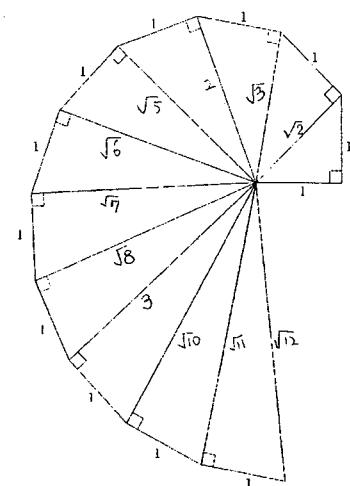
[그림 IV-21] 수학적 도구의 의미 구성 1

이 무리수 학습을 위한 도구로 활용되었다. 수학적 도구의 의미는 도구 자체에 있는 것이 아니라 학생들이 문제 해결 과정에서 그 도구를 사용하면서 만들어내는 것이다. 동일한 도구를 사용한다고 해서 동일한 의미가 만들어지지 않는 이유가 여기에 있다. 다음 [그림 IV-2]에서 학생 1이 격자용지 안에서 수학적 지식의 의미를 어떻게 활용하고 재구성하는지 확인할 수 있다.

[그림 IV-2]에서 알 수 있듯이 학생 1은 격자용지의 특성을 활용하여 주어진 도형을 부분으로 분할한 후 넓이를 정확하게 구했다. 이는 피타고라스 정리에 대한 직관적인 이해의 토대를 제공한 것으로 보인다. 반면에 학생 4는 [그림 IV-3]과 같이 격자용지 안에 내포된 수학적 지식의 의미를 잘못 사용하여 피타고라스 정리 발견으로 나아가지 못하였다. 직각 삼각형의 빗변 위에 정사각형을 그려야하는데 격자용지 위에서 어떤 조건을 만족할 때 정사각형이 만들어지는가를 이해하지 못한 것이다. 수업을 위해 도입한 수학적 도구가 바람직한 의미로 활용될 때에만 학습을 가능하게 함을 알 수 있다.



[그림 IV-3] 수학적 도구의 의미 구성 2



[그림 IV-4] 수학적 도구의 의미 구성 3

격자용지가 일부 학생에게 혼란을 일으킨 반면에 [그림 IV-4]에 제시한 Theodorus 바퀴는 무리수를 유리수와 자연스럽게 관련짓도록 함으로써 무리수 학습에 도움을 준 것으로 판단된다. 모든 학생들이 피타고라스 정리에 대한 직관적인 이해에 기초하여 수월하게 체계적으로 무리수를 만들었기 때문이다. 이 연구에서 피타고라스 정리는 Theodorus 바퀴와 긴밀하게 관련되면서 의미 있는 수학적 도구의 역할을 하였다.

4. 무리수 학습 수준 측면

1차시 수업에서 네 학생 모두 정사각형의 넓이가 2, 5, 8, 10이 되는 경우에 한 변의 길이를 유리수로 나타낼 수 없음을 인식하였으며, [그림 IV-5]와 같이 표현하였다. 이는 무리수의 존재성을 인식하는 것으로 시각적 이해 수준에 해당하는 것으로 볼 수 있다.

학생 3은 “그냥 간단히 설명하자면 정사각형은 한 변의 제곱인데, 넓이가 2인 경우는 제곱해서 2가 되게 하는 그런 숫자가 없다”라고

설명하였다. 마찬가지로 학생들은 모두 기존의 수로는 표현할 수 없는 새로운 수가 존재한다는 것을 분명하게 인식하였기 때문에 1차시 수업에서 모두 1수준에 도달한 것으로 보인다. 1수준인 시각적 수준에서 2수준인 서술적 수준으로 이행하려면, 무리수 표현의 필요성을 인식하고 체계적으로 시도하는 것이 필요하다. 학생 2는 “여기가 지금 한 칸이 1이잖아. 그럼 1곱하기 1하면 1이라는 게 나오잖아. 이거 넓이 이거 넓이 더하면 이거 나온댔잖아. 1더하기 1, 2잖아. 그러니까 지금 이렇게 AB를 제곱하면 2야. 그러니까, 이거 한 변의 길이를 구하면 $\sqrt{2}$ 가 되야지.”라고 설명하였다. 학생 2는 피타고라스 정리와 제곱근의 의미를 이용하여 선분의 길이가 무리수로 나타나는 상황을 분명하게 이해하고 표현하고 있는 것이다. 넓이가 5, 8, 10인 정사각형의 한 변의 길이 역시 제곱근을 이용하여 분명하게 표현함으로써 단지 직관적으로 무리수의 존재성을 파악하는 수준에서 벗어나 새로운 표현 방법과 명시적으로 관련짓고 있음을 나타냈다. 이 때만 들어지는 무리수는 이전에 알고 있는 유리수와 크기를 비교할 수 있는 하나의 수로 의식되었다. 유사한 방식으로 학생 4를 제외한 세 명의 학생이 서술적 수준에 도달한 것으로 확인되었다.

5차시와 6차시에서 계산기를 이용하여 $\sqrt{2}$ 의

소수 표현을 탐구하게 하였을 때, 모든 학생들은 이론적으로 무리수의 존재와 표현 방법을 설명하고자 노력하였다. 예를 들어, 학생 2는 “ 1.414213562341 을 제곱하면 1.999999 가 나오는데요. 1.414213562341 곱하기 1.414213562341 . 야! 여기까지가 최대수다. 야! 한번 루트랑 비교해볼까?”와 같이 설명하였다. 다른 학생들도 계산기의 제곱근 키를 이용하여 구한 $\sqrt{2}$ 의 값이 정확하지 않으며, 계산기의 한계라고 말하였다. 그러므로 모든 학생들이 $\sqrt{2}$ 가 유한한 소수로 나타날 수 없음을 파악했다고 볼 수 있다. 그러나 다음 대화에서 알 수 있듯이, 유리수가 순환하는 무한소수이고 무리수가 순환하지 않는 무한소수가 된다는 것을 명확하게 구분하여 설명하지는 못하기 때문에 이론적 수준에 도달했다고는 보기 어렵다.

학생 4 : 유리수는요 어... 분수로도 나타낼 수 있는데요 소수로만 나타낼 때 딱 떨어지는..

연구자 : 유리수는 분수로 나타내면 딱 떨어진다고? 소수로 나타내도? 그런데

학생 4 : 무리수는 소수로 나타내면 딱 떨어지지 않는 수.

연구자 : 딱 떨어지지 않을 거 같아?

학생 3 : 네. 딱 떨어지지 않아서 기호를 써요

연구자 : 그렇지, 기호를 쓰지? 그 기호가 뭐였지?

학생 3: 루트요.

넓이	한 변의 길이	넓이	한 변의 길이
1	1	2	X
2	X	3	
5	2	10	X
8	X	16	4

[그림 IV-5] 1수준 사례

이 연구에서 제시한 수업만으로는 이론적 수준에 해당하는 3수준에 도달하는 것은 무리가 있는 것으로 보이며, 이를 위해서는 현행 교과서에서 제시하는 순환소수와 비순환소수에 대한 학습을 해야 하는 것으로 판단된다. 이 연구에 참여한 학생들이 3수준에 이르지는 못하였지만 1수준과 2수준을 충실히 거칠으로써 무리수 개념 학습을 바람직하게 시작하였다고 평가할 수 있다. 후속 연구를 통해 3수준에 도달하게 하는 추가 과제를 개발할 필요가 있다.

V. 맺는 말

이 연구에서는 Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따른 무리수 개념 도입 방식을 알아보고, 실제로 연구결과를 적용한 수업에서 나타나는 학습과정의 특징을 알아보았다. 먼저 교수학적 현상학, 안내된 재발명의 원리, 학습 수준 이론, 등 Freudenthal의 수학화 학습지도론의 주요 원리를 반영한 6차시의 수업계획을 첫 번째 연구결과로 제시하였다. 무리수를 발견하는 경험, 피타고라스 정리에 대한 직관적 이해, 무리수 특성 탐구의 순서로 학습이 이루어지도록 하였으며, 네 명의 학생을 대상으로 개발한 자료를 이용하여 수업하였다. 네 명의 학생은 중학교 2학년 여학생 2명, 남학생 2명으로 유리수 이해에 관한 사전 검사지를 이용하여 선정되었다.

현행 교육과정에서는 제곱근을 먼저 정의하고 다소간 형식화된 무리수 개념 도입이 이루어지는 반면에, Freudenthal의 수학화 학습지도론을 적용한 수업 자료에서는 무리수 개념의 역사발생적 배경을 토대로 학습자가 스스로 무리수 개념을 발견할 수 있도록 하였다. 무리수가 어떤 상황에서 존재하는지, 어떻게 표현해

야 할 것인지의 문제에 주목하게 하는 문제 상황을 개발하였으며, 기존의 지식에 해당하는 유리수와의 연결을 시도하도록 하였다. 무리수를 배운 후에 피타고라스 정리를 도입하는 현행 교육과정과 달리, 직관적인 수준에서 피타고라스 정리를 이해하게 하고 그것을 토대로 무리수를 이해하도록 하였다. 마지막으로 무리수의 소수 표현을 계산기를 이용하여 탐구하도록 함으로써 학습자 스스로 무리수의 특성을 파악하도록 하였다.

이 연구에서 얻은 결과를 이용하여 실시한 사례연구에서는 무리수 학습과정이 반성적 사고를 자극하고, 발전가능성을 내포하며, 수학적 도구를 의미 있게 활용하는 것으로 이루어지는지 파악하였다. 또한 무리수 학습 수준을 van Hieles의 이론에 따라 구분한 후 학생들의 도달여부를 확인하였다.

이 연구에서 개발한 과제는 학생들이 반성적 사고에 의해 무리수의 존재성을 인식하고 무리수의 특성을 파악하게 하였으며, 무리수를 새로운 수로서 받아들이고 표현 방법을 고민하게 하는 발전가능한 탐구를 유발하였다. 수학적 도구의 활용 면에서는 학생들 사이에서 다소간의 차이가 발견되었으나, 대체로 격자용지, 피타고라스 정리 등에 대한 바람직한 의미를 구성함으로써 무리수 개념 이해의 기초가 됨을 확인하였다. 특히 무리수를 학습한 이후에 피타고라스 정리를 배우는 것이 아니라 간단하고 직관적인 방법으로 피타고라스 정리를 이해하고 그것을 활용하여 무리수를 이해하도록 하였다는 점에서 기존의 방식과는 크게 다른 접근을 시도하였다. 무리수 학습 수준은 시각적 수준, 서술적 수준이 무리 없이 발견되었으나, 이론적으로 명확하게 유리수와 무리수를 구분하는 수준까지는 이르지 못한 것으로 나타났다. 이론적 수준에 도달하도록 하려면 현재의 수업

내용에 무리수의 소수 표현에 대한 심층적인 이해의 기회를 제공하는 과제가 추가되어야 하는 것으로 판단된다. 후속 연구에서 이에 대한 시도가 이루어짐으로써 무리수 학습에 대한 대안적인 관점이 보다 적극적으로 연구될 필요가 있다.

참고문헌

- 김재성(1992). 무리수 개념과 제곱근의 지도. 충북대학교 석사학위논문.
- 노민숙(2002). 제곱근과 무리수 개념의 이해 실태 분석에 관한 연구-중학교 3학년 학생을 대상으로-. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 변희현 · 박선용(2002). 무리수의 개념적 측면을 강조한 교육방안: 통약불가능성을 통한 무리수 고찰. *학교수학*, 4(4), 643-655.
- 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교 출판부.
- 유현주(1995). 유리수 개념의 교수현상학적 분석과 학습-지도 방향에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.
- 정영옥(1997). *Freudenthal의 수학화 학습지도론 연구*. 서울대학교 대학원 박사학위논문.
- 최성희(1999). 중등 수학에서 무리수 지도에 관한 소고. 충남대학교 석사학위논문.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- James, H., Thomas, P. C., Elizabeth, F., Karen, C. F., Diana, W., Hanlie, M., Alwyn, O., & Piet, H. (2004). *어떻게 이해 하지?*. (김수환, 박영희, 이경화, 한대희, 역). 서울: 경문사. (영어원작은 1997년 출판).
- Glenda, L., James, T. F., William, M. F., Susan, N. F., & Ellizabeth, D. P. (2004). *Looking for Pythagoras*. New Jersey: Prentice Hall.
- Merriam, S. B. (1997). *Qualitative research and case study applications in education*. SanFrancisco: Jsssey-Bass Publishers.

A Case Study on the Introducing Method of Irrational Numbers Based on the Freudenthal's Mathematising Instruction Theory

Lee, Young Ran (Yongin Shinreung Middle School)

Lee, Kyung Hwa (Korea National University of Education)

As research on the instruction method of the concept of irrational numbers, this thesis is theoretically based on the Freudenthal's Mathematising Instruction Theory and a conducted case study in order to find an introduction method of irrational numbers. The purpose of this research is to provide practical information about the instruction method of irrational numbers. For this, research questions have been chosen as follows:

1. What is the introducing method of irrational numbers based on the Freudenthal's Mathematising Instruction Theory?
2. What are the Characteristics of the learning process shown in class using

introducing instruction of irrational numbers based on the Freudenthal's Mathematising Instruction?

For questions 1 and 2, we conducted literature review and case study respectively. For the case study, we, as participant observers, videotaped and transcribed the course of classes, collected data such as reports of students' learning activities, information gathered through interviews, and field notes. The result was analyzed from three viewpoints such as the characteristics of problems, the application of mathematical means, and the development levels of irrational numbers concept.

* **Key words** : irrational numbers(무리수), Freudenthal's mathematising instruction theory(Freudenthal의 수학화 학습지도론), learning activity(학습 활동), level of irrational number concept(무리수 개념 수준)

논문접수 : 2006. 10. 4

심사완료 : 2006. 11. 10