한국수학사학회지 제19권 제4호(2006년 11월), 63-80

도형에 의한 추론 (Schematic Reasoning) : 통시적 사례 연구*

덕성여대 **정계섭**
kseopcheong@hanmail.net

수학 언어는 보통 자연언어(Natural language), 대수언어(algebraic langauge) 그리고 도식(schema)으로 구성되는데, 이 논문에서는 도식에 논의의 초점을 맞추고자 한다. 도식은 고대 그리스의 피타고라스 시대부터 이미 기하학적 추론에서 사용되었는데, 동양수학도 예외가 아니어서 중국의 고문서에서도 도식이 발견되곤 한다.

도식은 감각적인 이미지를 통하여 개념적인 것으로의 전이가 이루어지는 곳이다. 그래서 도형은 직관에 직접 호소함으로써 문제해결을 용이하게 해주는 발견술적인 (heuristic) 가치를 지니고 있다. 도식의 도입은 또한 교육적인 관점에서도 매우 효율적이다. 그러나 그것이 증명을 대신할 수는 없다는 점을 잊어서는 안되겠다.

이 논문에서는 통시적 관점에서 다양한 도식을 소개한 후에 카테고리 이론과 파인만 다이어그램 그리고 아르강 평면을 고찰하면서 도식이 새로운 지식의 구축에 필요불가결한 방법과 도구임을 보이고자 한다.

주제어 : 도식(scheme), 그래프, 다이어그램, 파인만 다이어그램, 아르강 평면

I. 들어가면서

이제부터 우리가 아주 넓은 의미에서 통칭으로 쓰고자하는 도형 또는 도식(Scheme, Skême)[1]은 하나의 대상, 과정, 관계 또는 지각되지 않는 실재의 핵심적 특징에 대한 비선형적 표상체계로서 다양한 양상으로 나타난다 : 모델, 크로키, 이미지, 플랜, 스케치, (축소)모형, 약도, 도형, 그래픽, 다이어그램.

우리는 이미 칸트의 스키마 이론을 알고 있다. 도식은 하나의 개념에 이미지를 대응시키는 일반적 과정의 표상으로서, 보는 편에서는 이런 감각적인 이미지를 통하여

* 이 연구는 2006년도 덕성여자대학교 교내연구비 지원으로 수행되었다.

1) 앞으로 우리는 도식과 도형을 동의어로 간주하고 문맥에 따라 보다 더 적합해 보이는 용어를 자유롭게 사용하고자 한다.

개념적인 것으로의 전이가 이루어지는 것이다.

이러한 도식에 대해 우리가 직접 응용할 수 있도록 조작적인 정의(Operational definition)를 준 사람은 쏘쉬르(Ferdinard de Saussure, 1857~1913)와 무관하게 미국에서 기호학(Semiotics)을 창시한 퍼스(Charles S.Peirce, 1839~1914)이다.

...It has long been a puzzle how it could be that, on the one hand, mathematics is purely deductive in its nature, and draws its conclusions apodictically, while on the other hand, it presents as rich and apparently unending a series of surprising discoveries as any observational science. Various have been the attempts to solve the paradox by breaking down one or other of these assertions, but without success. The truth, however, apperas to be that all deductive reasoning, even simple syllogism, involves an element of observation; namely, deduction consists in constructing an icon or diagram the relations of whose parts shall present a complete analogy with those of the parts of the object of reasoning, of experimenting upon this image in the imagination, and of observing the result so as to discover unnoticed and hidden relations among the parts.....[2)]

한편으로 수학은 본질적으로 순수하게 연역적인 학문이어서 결론을 필당연적으로 유도하는데, 또 다른 편으로는 경험과학처럼 끊임없이 놀라운 발견을 제공하는 것이 도대체 왜 그러한지 오랜 동안 수수께끼였다. 여러 사람들이 이 역설을 풀고자 시도했으나 성공하지 못했다. 그런데 사실은 모든 연역적인 추론은 단순한 삼단논법일지라도 관찰의 요소를 포함한다는 것이다. 즉, 연역은 도상이나 다이어그램을 만드는 데에 있는데, 그들의 부분 사이의 관계는 추론이나 실험 또는 관찰대상의 부분들의 관계와 완전한 유비를 이룬다는 것이다. 그래서 결과적으로 부분들 사이의 숨겨진 관계를 발견하게 해준다.

이렇게 도식은 전체와 부분의 관계 또는 부분들 사이의 관계를 명시적으로 나타내는데, 바로 이런 관계가 추론의 대상이 될 때 도식의 존재 이유가 있는 것이다.

보통 수학의 언어는 i) 자연언어, ii) 자연언어를 방정식으로 변환한 대수언어, iii) 도식, 이 세가지로 이루어진다. 응용문제가 어렵다고 하는 이유는 대개 자연언어를 대수언어로 번역하는 방법을 모르기 때문이다. 그러나 이 중요한 문제는 다른 기회에 다루기로 하고 여기에서는 도식이라는 '언어'를 선택하여 이에 집중하고자 한다.

여기에서 반드시 짚고 넘어가야 할 점이 있다. 그것은 앞으로 소개되는 도형들에 의한 '기하학적인' 방법 속에 내재될 수도 있는 한계성이다. 가령 삼각형의 합동을 증

2) Collected paper of Charles Sanders Peirce, 3.363, pp.212-213

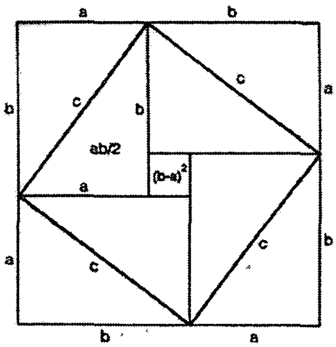
명하는 문제에서 '동일한' 두 개의 삼각형을 그려놓고 나서, 이것을 증명과 동일시하는 경우가 그러하다. 두 개의 동일한 삼각형이 보여주는 합동의 자명성은 학생이 진정한 증명의 개념을 이해하는 데에 오히려 방해가 될 수도 있다. 태백 콘퍼런스에서[3] 홍성사 교수는 원과 직선의 관계에 대한 예를 들면서 이 점을 명쾌하게 지적하였다.[4]

우리는 도형에 의한 추론이 증명의 엄밀성을 보장한다고 주장하지는 않는다. 다만 이런 방법은 직관에 직접 호소함으로써 문제해결을 용이하게 하고, 또한 교육적인 관점에서도 효율적이라는 점을 드러내고자 할 뿐이다.

우리는 모든 도식에 대해 분류작업을 시도하지는 않겠다. 다만 비교적 논난의 여지가 없어 보이는 그래프와 다이어그램을 분류해서 고찰하고 파인만(Feynman, 1918 ~) 다이어그램과 아르강(Argand, 1768~1822) 평면은 별도로 취급할 것이다. 이러한 연구를 통하여 도식이 지식의 전달에 얼마나 결정적인 역할을 하는지 알 수가 있다.

II. 역사적 사례들

도식에 의한 추론의 전형적인 사례는 아마도 기하학적 추론일 것이다. 도식은 시각적 직관을 통해 기하학의 문제를 해결하는 강력한 도구이다. 피타고라스(Pythagoras, 582?~500? B.C.)와 거의 같은 시기인 B.C. 600년대 중국의 고문서에서 다음과 같은 도형이 발견되었다.[5]



3) 이창구 교수님 고희 기념 2006 한국수학사학회 태백 콘퍼런스 (2006. 7.13 ~15)

4) 직선의 방정식 cx+dy+e=0에서 y의 값을 구해 원의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$에 대입하면 하나의 2차 방정식을 얻는다. 바로 이 식이 모든 원과 모든 직선의 관계를 보여주는 식이다. 이 점은 강조할 필요가 있는데 우리가 모든 원과 모든 직선을 다 그릴 수는 없기 때문이다. 여기에서 판별식 D<0이면 원과 직선은 만나지 않고, D=0이면 한점에서 만나고, D>0이면 두 점에서 만난다.

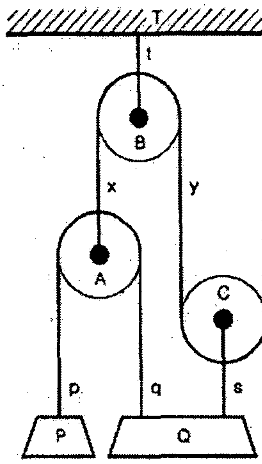
5) 물론 중국식 표기를 영어 알파벳으로 바꾸는 사소한 수정을 가한 후에 제시하는 것이다. 구장산술/주비산경 (차종천역), 범양사 출판부, 2000, p. 204

이 도형으로부터 우리는 즉각 대수적 결과를 도출할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
c^2 &= 4(ab/2) + (b-a)^2 \\
&= 2ab + b^2 - 2ab + a^2 \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

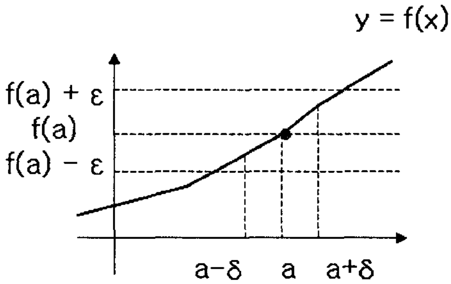
물론 이 방법 이 외에도 이 정리를 증명하는 방법은 무척 많은데 문제의 핵심은 주어진 직각 삼각형을 가지고 어떤 도식을 만드느냐에 있다.

다음과 같은 도르래의 그림은 중, 고등학교 교과서에서 흔히 볼 수 있는 그림이다. 그림과 같이 이 체계가 평형 상태에 있을 때 무게비 Q/P를 구하는 문제는 역시 도형에 의한 추론의 대표적인 사례가 된다.



가장 왼쪽 도르래의 두 개의 줄에서 상하로 받는 힘을 각각 1P로 가정하면, 가운데 도르래의 각각의 줄에서 받는 힘은 2P가 될 것이고, 오른쪽 도르래의 상단 두 줄은 각각 2P의 힘을 받게 될 것이며 따라서 아래 줄이 받는 힘은 4P가 될 것이다. 마지막으로 가운데 아래줄이 받는 힘은 1P로 가정했으므로 결국 Q는 1P + 4P = 5P가 되어 무게비는 1: 5가 된다.

함수를 취급할 적에 이른바 'ε-δ'방법에 의한 함수의 연속성의 정의가 소개된다. 함수 f(x)는 임의의 실수 $\varepsilon>0$에 대해, 어떤 실수 $\delta>0$가 존재해서 $|x-a|<\delta$일 때 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$를 만족하게 되면 이 함수는 $x=a$에서 연속이다. 먼저 아래의 도형을 보지 않고 방금 소개한 함수의 연속성 개념을 이해하려고 시도해보자. 그 다음에 아래의 도형을 보면서 추론을 해보면 그 차이가 엄청나다는 사실을 실감할 것이다.

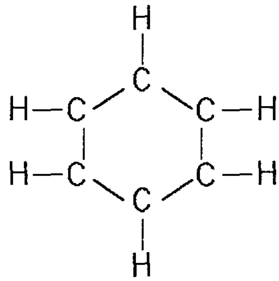


이처럼 도형에 의한 추론은 우리의 이해과정에서 결정적인 축의 역할을 하는 것이다. 이제 또 다른 분야를 섭렵하도록 하자.

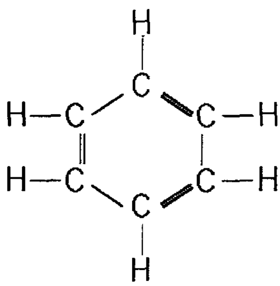
영국에서는 산업혁명 당시 석탄을 많이 사용하게 되어 석탄을 건류한 혼합물에서 벤젠을 분리할 수 있었다. 그래서 벤젠의 녹는점, 끓는점 그리고 원소분석에 의해 분자식을 알 수 있었지만 구조식은 아직 알려지지 않은 상태였다.

※ 미지의 분자 ⟶ 원소분석 C,H ⟶ 실험식 $C_?H_?$ ⟶ 분자식 C_6H_6 ⟶ 구조식 ?

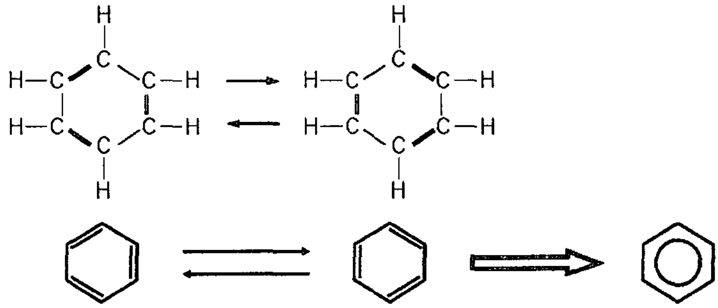
그러다가 1865년 케쿨레(Kekulé)가 처음으로 6각형 구조를 제안했다.



그러나 이 구조는 탄소 원자의 결합선이 4개가 아니므로 1년후인 1866년 6각형 고리 안에 이중결합이 교대로 위치한 구조를 다시 제안하기에 이른다.



그러나 이 구조의 경우에도 벤젠의 여러 물리 화학적 성질과 일치하지 않음에 따라 벤젠의 실제 구조를 찾아 고심하던 중 런던의 버스 안에서 잠시 꾼 꿈에서 몇 마리의 뱀들이 꼬리를 물고 원을 그리면서 회전하는 모습을 보고 공명구조를 생각해냈다.



오늘날 첨단 기기를 이용한 분석에서 벤젠의 구조가 바로 이 공명구조라는 사실이 정확하게 검증되었다. 벤젠의 구조가 중요한 이유는 이 구조식을 통하여 벤젠의 화학적 성질들에 대한 탐구가 가능해지기 때문이다. 화학 반응과 관련해서는 탄소-탄소 결합이 쉽게 끊어지지 않는 구조이기 때문에 치환 반응이 첨가 반응에 비해 훨씬 잘 일어난다는 사실을 알 수 있다.

끝으로 임의의 논리식이 타당한지 여부를 점검할 때 수형도(tree method)를 이용하면 편리하다. 논리식 $((\exists x)(\forall y)Pxy \supset (\forall y)(\exists x)Pxy)$가 타당한지 알기 위해서, 만일 우리가 이 식을 부정할 때 모순을 만나면 이 식은 타당한 논리식이다.

$$\neg((\exists x)(\forall y)Pxy \supset (\forall y)(\exists x)Pxy)$$

$$(\exists x)(\forall y)Pxy$$
$$\neg(\forall y)(\exists x)Pxy$$

$$(\forall y)Pay$$

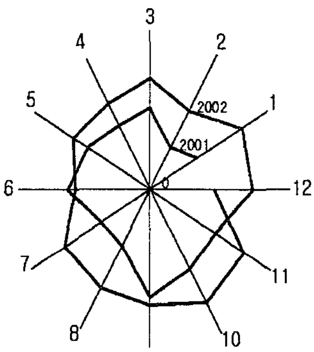
$\neg(\exists x)Pxa$		$\neg(\exists x)Pxb$
Paa		Paa
	Pab	
$\neg Paa$		$\neg Pab$
		$\neg Pbb$
x		x

이상의 논의를 통해서 보더라도 우리는 학문의 각 분야의 추론 과정에서 도식이 얼마나 결정적인 역할을 해왔는지 알 수 있겠다. 이제부터 그래픽과 다이어그램에 대해 살펴보고자 한다.

Ⅲ. 그래프

1. 극 그래프

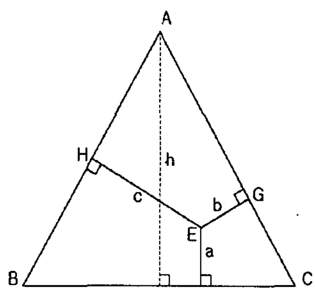
다음 도형은 어느 상점의 연간 매상액을 월별로 나타낸 것이다.



선이 중심 O에 접근할 때는 매상액이 감소하고, 중심으로부터 멀어질 때에는 매상액이 증가한다. 이런 그래픽은 연대기적 배열을 나타내는데 적합하다.

2. 삼각 그래프

삼각 그래픽은 정삼각형의 기본적인 특성에 의해 고안된 것이다. 즉 삼각형 내부의 한 점에서 세 변에 이르는 거리의 합은 일정하고 이 삼각형의 높이와 같다.6)

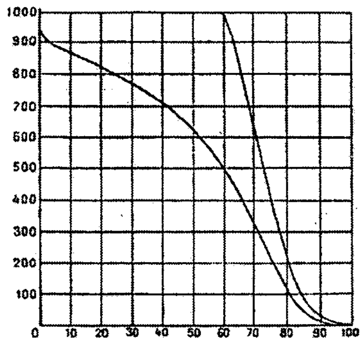


6) 변의 길이를 ℓ이라 할 때 면적 $S = 1/2\ell(a+b+c)$ 또 $S=1/2\ell h$ $\therefore h = a+b+c$

삼각 그래픽은 세 개의 변수로 구정된 집합들을 표현하는 데에 적합하다. 가령 원가 계산에서 3개의 변수은 원자재비, 인건비, 생산비가 될 것이고, 재고품에서 3개의 변수는 원자재, 완제품, 생산중인 제품이 될 것이다. 이 때 h를 100으로 잡으면 편리하다.

3. 사망률 곡선

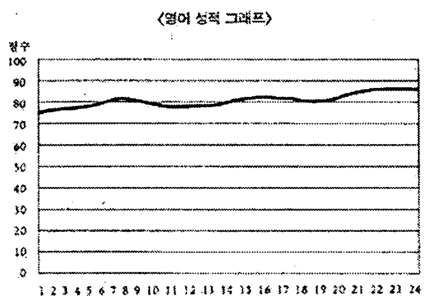
다음은 일반적인 사망률 곡선으로부터 60세 이상 1000명에 대한 사망률 곡선을 연역한 그래프이다.



60세와 1000명이 만나는 점이 출발점이 되어야 하고, 이 점은 일반사망률곡선 500명에 대해 정확하게 두 배가 됨을 알 수 있다. 따라서 나머지 경우에도 일반사망률곡선에서 같은 연령대의 생존자 수의 두 배를 잡아주면 구하고자 하는 점이 된다. 이 점들을 연결하면 구하고자 하는 곡선이 된다.

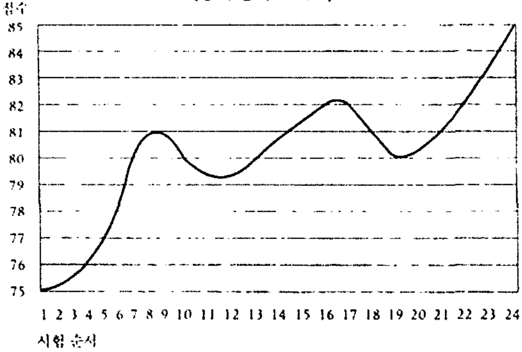
4. 남용 사례 (1.)

아래 그래프는 철수가 241회 치른 영어시험의 성적을 나타낸다.



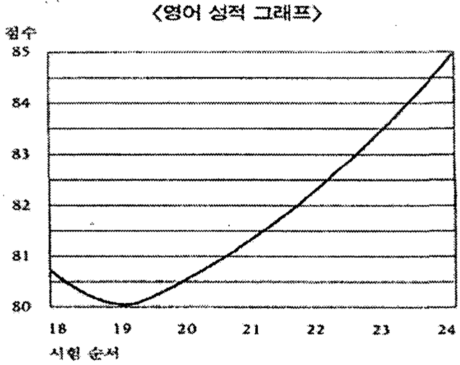
그러나 이 그래프에서 세로축 눈금을 변화시키면 작은 차이도 크게 드러나도록 조작할 수 있다.

<영어 성적 그래프>



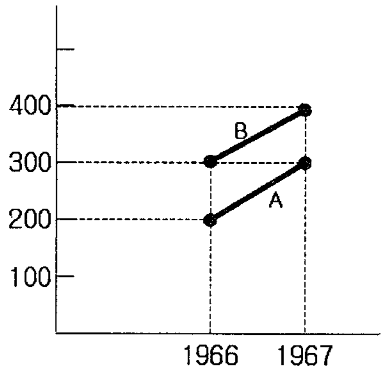
가로 축 역시 의도에 따라 선택하여 과장할 수 있다.

<영어 성적 그래프>



5. 남용사례(2)

아래의 그래프는 산술적 척도에 의한 그래프인데 이런 그래프는 상대적 변화율을 대로 나타내지 못한다.



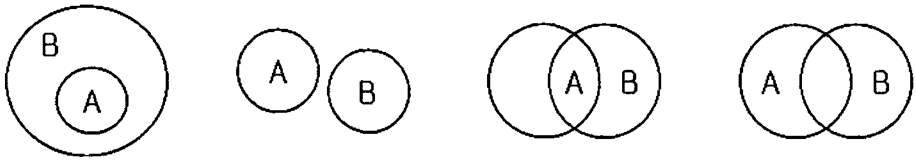
즉 두 직선이 평행이므로 예컨대 두 공장이 똑같은 비율로 생산품을 증가시켰다고 믿게 되기 쉽다. 그러나 A가 50% 증산한 반면, B는 33.3.% 밖에 증산하지 못했다.

Ⅳ. 다이어 그램

1. 집합론의 다이어그램

오일러(Euler) 다이어그램(1768)은 중학생 정도면 이해할 수 있는 아주 친숙한 다이어그램이다. 그는 집합 사이의 관계를 나타내기 위해 아마도 처음으로 원을 사용했다.

① All A are B. ② No A is B. ③ Some A is B. ④ Some A is not B.

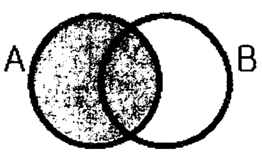


모든 A는 B이다. 어떤 A도 B가 아니다. 어떤 A는 B이다. 어떤 A는 B가 아니다.

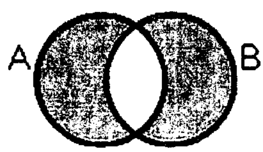
다만 문제가 좀 있다면 존재진술 ③의 다의성이다. 즉, 이 진술은 다음과 동의문이다.

i. Some B is A.	어떤 B는 A이다.
ii. Some A is not B.	어떤 A는 B가 아니다.
iii. Some b is not A.	어떤 B는 A가 아니다.

1881년 벤(Venn)은 공집합을 나타내기 위해 새로운 통사적 장치인 명암법(Shading)을 도입하였다. 다음은 A가 공집합인 경우와 A와 B가 동일한 집합인 경우 명암법을 통해 나타낸 다이어그램이다.



All A are B
No A is B



All A are B
All B are A

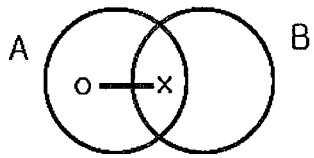
모든 A는 B이다.
어떤 A도 B가 아니다.

모든 A는 B이다.
모든 B는 A이다.

왼쪽의 벤다이어그램은 위의 오일러 다이어그램 ①, ②를 동시에 나타낼 수 있다는 장점이 있다.

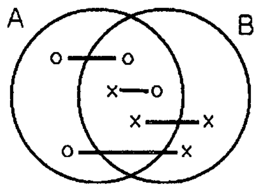
퍼스(Peirce)는 1933년 새로운 표상방법을 제안했다.

i. 존재의 부재를 나타내는 벤의 그림자는 'o'으로 대체한다.
ii. 존재 진술을 위해 'x'를 도입한다.
iii. 이접(disjunction)을 나타내기 위해 '____ '을 도입



All A are B 모든 A는 B이다.
Some A is B 어떤 A는 B이다.

조금 더 복잡한 예를 보자.



" Either all A are B and some A is B, or no A is B and some B is not A. "

"모든 A가 B이고 어떤 A가 B이거나, 어떤 A도 B가 아니고 어떤 B는 A가 아니다."

오일러 다이어그램은 두 집합 사이의 모든 관계를 동시에 나타낼 수 없어서 표현력의 제한을 받았고 이는 연역을 하는 데에 제약요소로 작용했다. 벤은 다소 이러한 제약을 극복했으나 존재의 문제를 취급하지 못하고 공집합을 나타내는 것에 그쳤다. 퍼스의 이 다이어그램은 선임자들의 이러한 제약을 극복했다는 점에서 주목할 만하다.

2. 카테고리 이론의 다이어그램

카테고리 이론을 만든 수학자들은 아주 복잡한 사실들을 다이어그램을 통해 시각화 할 수 있는 장치를 개발하였다.

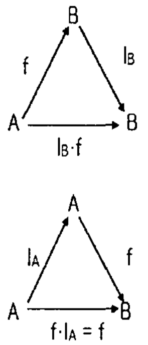
i. $A \xrightarrow{I_A} A$

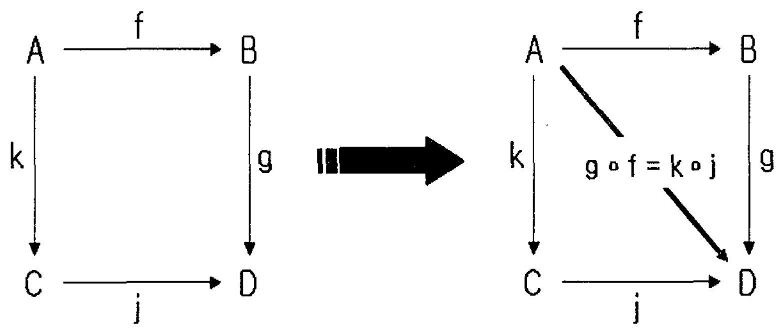
ii. $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

$A \xrightarrow{g.f} C$

이런 기본적인 장치를 갖추면 보다 복잡한 사실도 수월하게 이해할 수 있다.

iii. 만일 $A \xrightarrow{f} B$이면, $I_B \cdot f = f$이고 $f \cdot I_A = f$이다.



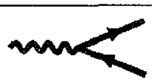
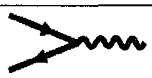


V. 파인만(Feynman) 다이어그램

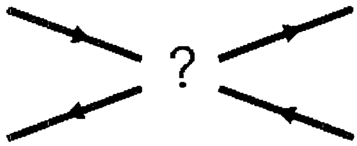
이 다이어그램은 시공간 다이어그램으로서 하나의 물리적 과정은 아래에서 시작하여 위에서 또는 왼쪽에서 시작하여 오른쪽에서 끝난다. 다이어그램의 모든 선은 입자를 나타내는데 세가지 유형의 기본 입자가 존재한다.

이미지	입자
	전자
	양전자
	광자

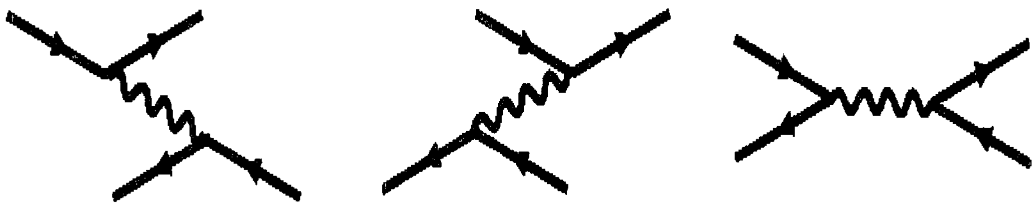
세 개의 선이 만나는 정점은 전자기 상호작용을 나타내는데 가능한 정점들은 다음과 같다.

	전자가 광자를 방출한다.
	전자가 광자를 흡수한다.
	양전자가 광자를 방출한다.
	양전자가 광자를 흡수한다.
	광자가 전자-양전자 쌍을 산출한다.
	전자와 양전자가 만나 쌍소멸한다.

이와 같은 규약을 써서 만들어지는 모든 다이어그램은 가능한 과정들이다. 하나의 전자와 하나의 양전자로 시작하고 끝나는 어떤 과정을 생각해보자.

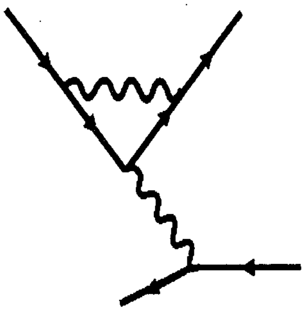


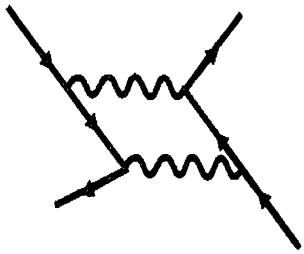
파인만은 가능한 모든 다이어그램을 그릴 것을 권고한다. 중간에 광자선을 추가하면 시간순으로 정렬 된 3개의 다이어그램을 얻는다.



(a) (b) (c)

보다 많은 광자를 가지고 얼마든지 복잡한 다이어그램을 얻을 수 있다. 사실 광자의 수에는 제한이 없다.

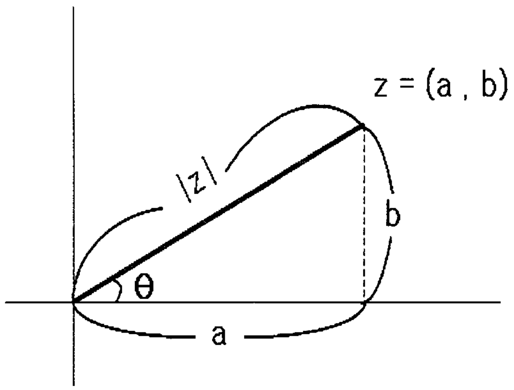




이렇게 파인만 다이어그램은 입자들의 운동경로와 상호작용을 형상화 주기 때문에 입자들의 운동을 이해하는데 많은 도움을 준다.

Ⅵ. 아르강 (Argand, 1768 ~ 1822) 평면

복소수 a+bi 는 실수와 허수축으로 구성된 2차원 추상공간의 한 점으로서, 이러한 점들로 이루어진 복소평면은 물체의 운동이 갖는 물리적 특성들을 이해하는데 안내자의 역할을 해 준다.

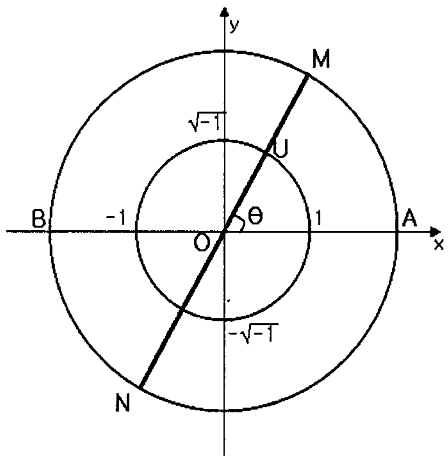


$$
\begin{aligned}
z &= a + bi \\
&= |z|e^{i\theta} \\
&= |z|(\cos\theta + i\sin\theta)
\end{aligned}
$$

그래서 두 복소수의 곱은 아래와 같다.

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (|z_1|e^{i\theta_1})(|z_2|e^{i\theta_2}) \\
&= |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}
$$

아르강 평면은 다음과 같은 평면이다.



즉, $\theta = \pi/2$인 경우로서 $|i| = 1$이므로,

$$|i| = 1,\ \Theta = \pi/2$$

$$\begin{aligned} i^2 &= |i| \bullet |i| \bullet e^{i(\Theta+\Theta)} \\ &= 1 \bullet e^{i\pi} \\ &= \cos\pi + i \sin\pi \\ &= -1 + 0 = -1 \end{aligned}$$

결국 i는 $\pi/2$ 만큼 회전시킨다는 역학적인 의미를 갖게된다. 그래서 $i^2 = -1$을 완벽하게 이해 할 수 있는 것이다.

Ⅶ. 결론에 대신하여

이상의 사례들을 통하여 도상성(iconicity)이 문제해결 뿐만 아니라 새로운 지식의 구축에 있어서 필수 불가결한 양식이라는 사실이 분명해 보인다.

자연언어에 의한 학습 내지 지식의 전달은 사물의 성질에 관한 것이라기 보다는 언어의 규칙에 관한 것이 되기 쉽다. 이에 반해 도상은 어떤 대상의 고유한 본질적 특성을 드러내면서 이 대상을 가리킨다는 점에서 자의적인 언어기호와 구별된다.이러한 관점에서 우리가 그 무엇(사물/과정/상황)에 대해 안다는 것은 이 무엇에 대한 도상적 표상을 가질 수 있다는 말이 된다.

사고는 근본적으로 도상성을 띠고 있는 것인가? 이에 대해 바슐라르(Bachelard) 가 답변을 제공하는 것 같다.

Rendre géométrique la représentation, c'est-à-dire dessiner les phénomènes et ordonner en série les événements décisifs d'une expérience, voilà la tâche première où s'affirme l'esprit scientifique.[7)]

표상을 기하학적으로 만드는 것, 즉 현상을 시각화하고 어떤 경험의 결정적인 사건들을 부문별로 배열하는 것이야말로 과학정신이 명확히 드러나는 첫 번째 관습이다.

7) 과학정신의 형성, Vrin, 1970, p.5

도식은 많은 양의 정보를 통합하여 제시함으로써 추론에 필요한 정신적 노력과 공간을 절약할 수 있게 해준다. 결국 도식에 의한 추론은 개념적인 양상과 도형적인 양상의 상호작용에 기초한다고 말할 수 있겠다.

참고 문헌

1. 김희준, 화학여행, 김영사, 1996.
2. 최동수, 그래프 물리탐구, 우리교육, 1995.
3. Blanche. Robert, Le raisonnement, PUF, 1973.
4. Dictionnaire des mathématiques : fondement, probabilité, applications, Encyclopedia Universalis et Albin Michel, 1998.
5. Delahaye Jean-Paul, Information, Complexité et hasard, Hermès, 1994.
6. Feynman Richard, 파인만의 QED(Quantum Electrodynamics)강의(박병철 옮김), 승산, 2003.
7. Hartshorne C. and Weiss P.(ed.), Collected papers of Charles Sanders Peirce, The Belknap Press of Havard University Press, 1980, 3.363, pp.212-213.
8. Todorov Tzévan, Théorie du symbole, Seuil, 1977.

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 19 No. 4 (Nov. 2006), 63-80

Reasoning through scheme.

Department of french language and litterature Duksung Women's University **Kye-Seop Cheong**

Along with natural and algebraic languages, schema is a fundamental component of mathematical language. The principal purpose of this present study is to focus on this point in detail.

Schema was already in use during Pythagoras' lifetime for making geometrical inferences. It was no different in the case of Oriental mathematics, where traces have been found from time to time in ancient Chinese documents.

In schma an idea is transformed into something conceptual through the use of perceptive images. It's heuristic value lies in that it facilitates problem solution by appealing directly to intuition. Furthermore, introducing schema is very effective from an educational point of view. However we should keep in mind that proof is not replaceable by it.

In this study, various schemata will be presented from a diachronic point of view. We will show with emaples from the theory of categories, Feynman's diagram, and argand's plane, that schema is an indispensable tool for constructing new knowledge.

Key words: scheme, graph, diagram, Feynman diagam, Argand plane

2000 Mathematical Subject Classification: 00A35, 00A99, 97C80, 97D50

논문 접수: 2006년 7월 심사 완료: 2006년 8월