韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2006. 11. 제 45권, 제 4호, 481-491.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
November. 2006, Vol. 45, No. 4, 481-491.

디피의 머리

김 홍 찬 (고려대학교)

I. 서 론

인간의 두뇌는 과거에 일어난 일이나 얻은 지식을 시간이 지나면 어느 정도는 자연히 잊어버리게 되어 있다. 사회에서 성공적으로 활약하는 사람들도 중·고등학교 시절 배웠던 인수분해나 이차방정식을 자신의 직업에 사용하는 경우는 극히 드물다. 그런데 왜 사람들은 고생해서 배우고 지식을 얻으려고 하는가? '사칙 연산만 알면 되는데, 수학은 왜 배워야 하나요?' 요즈음 중·고등학교 학생들이 자주하는 질문이다. 이것에 대한 대답이 명쾌하게 존재하는 것은 아니지만, 수학의 노벨상인 필즈(fields)상을 받은 히로나카 헤이스케(2001)는 다음과 같이 말하였다.

"나는 지혜를 얻기 위해서라고 말하고 싶다. 배워 나가는 과정에서 지혜라고 하는 눈에는 보이지 않지만 살아가는 데 있어 매우 중요한 것이 만들어 진다고 생각한다. 이 지혜가 만들어지면 배운 것을 잊어버린다고 해도, 필요에 의하여 다시 한 번 꺼내려고 할 때, 전혀 배워 본 적도 없고 들어 본 경험도 없는 사람과는 달리, 최소한의 마음의 준비는 되어 있고, 어느 정도 시간을 들이면 별 고생 없이 그것을 이해하게 되기 때문이다."

현재 학교에서 배우는 수학 내용이 빠른 속도로 변해가는 사회에 유용하게 쓰이지 않을지 몰라도, 그러한 수학 과정에서 얻어진 지혜는 새로운 변화에 적응하는 능력이 되는 것이다. 인터넷과 컴퓨터의 발달로 인하여 수학적 지식과 계산보다는 수학적 태도와 수학적 사고에 대한 교육의 중요성이 더 강조되고 있다. 그러므로 어릴 때부터 수학적 사고를 하는 생활의 습관화가 필요하다.

* 2006년 8월 투고, 2006년 10월 심사 완료.
* ZDM 분류 : A90
* MSC2000 분류 : 97A90
* 주제어 : 디피(Diffy), 수학적 사고, 영재교육용 게임

2006년 5월 한 수학교육 학회에서 연구자는 '디피'에 대한 소개를 처음 접했는데, 그 날 '임의의 자연수에 대하여 디피의 길이는 최대가 8이다' 라는 잘못된 발표자의 주장이 연구자가 디피의 머리를 연구하게 되는 계기가 되었다. 디피 활동은 뺄셈 능력만 있으면 누구나 할 수 있는 간단하고 재미있는 게임이면서, 수학적 사고를 풍부하게 할 수 있는 초등학교 영재교육용 수학게임으로 좋은 예가 된다.

디피(diffy)는 학생들에게 뺄셈에 대한 수학적 규칙을 제공하는 간단한 퍼즐게임이다. 이 게임의 기원은 19세기 말 이탈리아의 E. Duccid 라고 알려져 있으며, 30여 년전 University of Houston의 J. Copley 교수가 초등학교 교사에게 디피를 소개해 주면서 널리 확대 되었다(Ciamberlini 외, 1937; Behn 외, 2005).

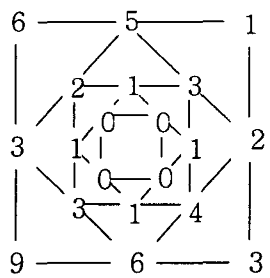
디피의 규칙은 다음과 같다.

1. 큰 정사각형을 그리고, 각 꼭지점에 임의의 자연수를 쓴다.

2. 이웃한 두 꼭지점의 차(difference)를 변의 중점에 쓴다.

3. 각 변의 중점들을 꼭지점으로 하는 정사각형을 그린다.

4. 새로 생긴 정사각형의 이용하여 이웃한 꼭지점의 차를 중점에 적는 과정을 차가 모두 0이 될 때까지 반복한다.



<그림 1> 정사각형 형태의 디피

즉, diffy는 주어진 네 자연수 a,b,c,d의 두 원소의 차(difference)를 구하는 단순한 연산이다. Diffy란 용어는 difference를 간단하고 귀엽게 표현한 말이다. Duccid는 디피에서 처음 주어지는 네 수를 자연수로 한정했지만, Copley는 정수까지 확장 하였다.

임의로 네 정수를 택하여 디피를 시행해 보면 일반적으로 8번 이내에 꼭지점의 차가 모두 0이 된다. 하지만 항상 디피가 8번 이내에 꼭지점의 차가 모두 0이 될까? 결론부터 이야기하자면 이것의 답은 '아니다'이다. 우리는 디피의 성질을 파악하기 위하여 디피의 과정을 수학적으로 다시 정의하고 살펴보도록 하자.

II. 디피의 수학적 정의

디피를 한 번 시행하고 생긴 네 수는 두 정수들의 차이므로 모두 음이 아닌 정수이다. 그런데 임의의 k에 대하여 (a,b,c,d)와 $(a+k,b+k,c+k,d+k)$의 차가 같으므로, 주어진 네 수는 0 또는 자연수라고 하자.

정의 2.1 a,b,c,d가 0 또는 자연수일 때

$$F(a,b,c,d) := (|a-b|,|b-c|,|c-d|,|d-a|)$$

로 정의하고 $F(a,b,c,d)$를 (a,b,c,d)의 디피의 발(the foot of diffy)라고 한다. 디피를 k번 시행한 것을 F^k로 나타내자. $F^{n-1}(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$이고 $F^n(a,b,c,d) = (0,0,0,0)$일 때, n을 (a,b,c,d)의 디피의 길이(the length of diffy)라고 한다. $F^n(a,b,c,d) = (0,0,0,0)$이 되었을 때, 디피가 끝났다(the end of diffy)라고 한다. $F(x,y,z,w) = (a,b,c,d)$가 되는 음이 아닌 네 정수 (x,y,z,w)를 (a,b,c,d)의 디피의 머리(the head of diffy)라고 하고 $H(a,b,c,d)$라고 나타낸다.

여기서 우리는 3가지 궁금증이 생긴다.

첫째, 디피는 항상 끝나는가?

둘째, 디피의 머리는 항상 존재하는가?

셋째, 임의로 주어진 길이 n을 갖는 (a,b,c,d)를 구할 수 있는가?

위의 궁금증을 해결하기 위하여 먼저 주어진 네 수 (a,b,c,d)와 같은 길이를 갖는 네 수들의 유형에 대하여 생각해 보자. 그러한 2쌍의 네 수를 서로 동치(equivalence)라고 한다. ①~⑤는 강문봉의 논문(2005)에서 가져왔고, ⑥과 ⑦은 연구자가 찾아내었다.

정의 2.2 아래의 7가지 경우를 (a, b, c, d)와 동치인 디피라고 한다.

① 평행이동(translation) : (a+k, b+k, c+k, d+k)
   이 때 k는 (-1)·min{a, b, c, d} 이상의 정수
② 확대(magnification) : (ma, mb, mc, md)
   이 때 m은 자연수
③ 축소(reduction) : (a/n, b/n, c/n, d/n)
   이 때 n은 {a, b, c, d}의 공약수
④ 회전(rotation) : (b, c, d, a), (c, d, a, b), (d, a, b, c)
⑤ 반사(reflection) : (d, c, b, a)
⑥ 호환(transposition) : (a, d, c, b), (c, b, a, d)
⑦ 반전(inversion) : (i-a, i-b, i-c, i-d)
   이 때 i는 max{a, b, c, d} 이상의 자연수

위의 7가지 외에 다른 유형의 동치인 diffy가 존재할 수 있는지는 아직 명확하지는 않다.

정리 2.3 동치인 2쌍의 네 수들의 diffy의 길이는 같다.

증명. ⑥, ⑦ 만 증명하자.

⑥ F(a, d, c, b)=(|a-d|, |d-c|, |c-b|, |b-a|)을 반사하면 (|b-a|, |c-b|, |d-c|, |a-d|) = (|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|) = F(a, b, c, d)가 되어, F(a, d, c, b)와 F(a, b, c, d)의 길이가 같다. 그러므로 (a, d, c, b)와 (a, b, c, d)도 길이가 같다.

(a, d, c, b)와 (c, b, a, d)는 회전동치이므로 서로 길이가 같다. 그러므로 추이율(transitive)에 의하여 (c, b, a, d)와 (a, b, c, d)도 길이가 같다.

⑦ F(i-a, i-b, i-c, i-d)=(|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)=F(a, b, c, d)이므로 (i-a, i-b, i-c, i-d)와 (a, b, c, d)는 길이가 같다. □

1. 디피는 항상 끝나는가?

정의 2.4 $\max\{a,b,c,d\}-\min\{a,b,c,d\}$를 주어진 네 수 (a,b,c,d)의 디피의 크기(size of diffy)라고 하고 $|(a,b,c,d)|$로 나타낸다.

아래의 정리는 Behn, Kribs-Zaleta, Ponomarenko의 논문(2005)에 나온다.
정리 2.5 $|F(a,b,c,d)| \le |(a,b,c,d)|$ 이다. 만약 네 수가 모두 다르면 부등호가 성립한다.
증명. $M=\max\{a,b,c,d\}$, $m=\min\{a,b,c,d\}$라고 하자. 그러면 $|(a,b,c,d)|=M-m$이다. 디피의 발 $F(a,b,c,d)$의 네 수 $|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|$는 0과 $M-m$ 사이에 있으므로 $|F(a,b,c,d)| \le (M-m)-0=|(a,b,c,d)|$ 이다. 만약 네 수 (a,b,c,d)가 모두 다르면 $F(a,b,c,d)$은 0을 포함하지 않는다. 그러므로 $|F(a,b,c,d)| < |(a,b,c,d)|$ 이다. □

강문봉의 논문(2005)에 아래의 정리가 증명되어 있다.
정리 2.6 임의의 네 정수에 대하여 $|F^4(a,b,c,d)| < |(a,b,c,d)|$ 이다.

정리 2.6에 의하여 디피를 계속 시행해 나가면 디피의 크기가 점차 줄어들게 되고, 디피의 길이는 0 또는 자연수 이므로 언젠가는 0이 된다. 그러므로 디피는 항상 끝난다. Behn, Kribs-Zaleta, Ponomarenko의 논문(2005)에 의하면 (a,b,c,d)가 정수일 때, 디피의 길이는 $|(a,b,c,d)|+3$ 보다 작거나 같다고 한다.

(a,b,c,d)를 유리수로 확장시켜도 확대동치에 의하여 (ma,mb,mc,md)를 정수로 만들 수 있으므로 디피는 유한번 내에서 끝난다. 하지만 실수로 확장시키면 n이 커짐에 따라 $|F^n(a,b,c,d)|$은 0으로 한없이 가까이 가지만, 결코 0은 되지 않는 예가 존재한다. McLean의 논문(1999)에 의하면 무한의 길이를 갖는 실수 디피가 존재함을 알 수 있다. 이를 간단히 소개하면 다음과 같다.

t를 방정식 $t^3=t^2+t+1$의 실근이라고 하자. 그러면 t는 유일하게 존재하고 값은 대략 1.839이다. $(1,t,t^2,t^3)$의 디피의 발을 구하면 $F(1,t,t^2,t^3)$ $=(t-1,t^2-t,t^3-t^2,t^3-1)=(t-1)(1,t,t^2,t^3)$ 이다. 만약 $a=(1,t,t^2,t^3)$라고 두면 $F(a)=(t-1)a$이고, $F^n(a)=(t-1)^n a$이다. $(t-1)^n \fallingdotseq 0.839^n$은 n이 커짐에 따라 0으로 가까이 가기는 하지만 결코 0이 되지는 않는다. 그러므로 임의의 자연수 n에 대하여 $F^n(a)=(t-1)^n a \neq (0,0,0,0)$이다. 즉 $(1,t,t^2,t^3)$의 디피는 끝나지 않는다.

2. 디피의 머리는 항상 존재하는가?

정의 2.7 실수 x에 대하여 x의 부호(the sign of x) $\operatorname{sgn}(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} +1 & \text{만약 } x \ge 0 \\ -1 & \text{만약 } x < 0 \end{cases}$$

임의의 실수 x에 대하여 부호를 이용하여 절대값을 $|x|=\operatorname{sgn}(x)x$로 표시할 수 있다.

주어진 네 수 a,b,c,d에 대하여 $\varepsilon_1=\operatorname{sgn}(a-b)$, $\varepsilon_2=\operatorname{sgn}(b-c)$, $\varepsilon_3=\operatorname{sgn}(c-d)$, $\varepsilon_4=\operatorname{sgn}(d-a)$라고 두자. 그러면 네 수의 디피의 발 $F(x,y,z,w)$는 $(\varepsilon_1 a-\varepsilon_1 b,\ \varepsilon_2 b-\varepsilon_2 c,\ \varepsilon_3 c-\varepsilon_3 d,\ \varepsilon_4 d-\varepsilon_4 a)$로 나타내어진다. 이것을 행렬로 표시하면

$$F=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_3 \\ -\varepsilon_4 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix} \text{ 이다.}$$

이제 디피 머리의 존재성에 대하여 증명해 보자.
정리 2.8 위의 행렬 F에 대하여 행렬식 $\det(F)=0$이고 위수 $\operatorname{rank}(F)=3$ 이다.
증명. F의 행렬식을 1열에 대하여 소행렬식 전개하면

$$\det(F)=\varepsilon_1\begin{vmatrix} \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{vmatrix}-(-\varepsilon_4)\begin{vmatrix} -\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

$=\varepsilon_1(\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)+\varepsilon_4(-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)=0$ 이다.

소행렬식 $\det(F_{44})=\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & -\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}=\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \neq 0$ 이므로 위수 $\operatorname{rank}(F)=3$ 이다. □

정리 2.8에 의하여 $\det(F)=0$ 이므로 F^{-1}는 존재하지 않는다. 그러므로 주어진 네 수 (a,b,c,d) 에 대하여 디피의 머리 $H(a,b,c,d)$ 는 a,b,c,d 의 관계에 따라서 존재하지 않거나 혹은 무수히 많이 존재한다. 그러므로 (a,b,c,d) 가 디피의 머리를 가질 조건을 구해보자.

(x,y,z,w) 가 (a,b,c,d) 의 디피 머리라고 하자. 즉, $F(x,y,z,w)=(a,b,c,d)$ 이다. $\varepsilon_1=\mathrm{sgn}(x-y)$, $\varepsilon_2=\mathrm{sgn}(y-z)$, $\varepsilon_3=\mathrm{sgn}(z-w)$, $\varepsilon_4=\mathrm{sgn}(w-x)$ 라고 두면 $a=|x-y|=\varepsilon_1(x-y)$, $b=|y-z|=\varepsilon_2(y-z)$, $c=|z-w|=\varepsilon_3(z-w)$, $d=|w-x|=\varepsilon_4(w-x)$ 이다. 모든 i 에 대하여 $\varepsilon_i^2=1$ 이므로 $x=y+\varepsilon_1 a$, $y=z+\varepsilon_1 b$, $z=w+\varepsilon_3 c$, $w=x+\varepsilon_4 d$ 가 되어 $w-\varepsilon_4 d=x=y+\varepsilon_1 a=(z+\varepsilon_2 b)+\varepsilon_1 a=((w+\varepsilon_3 c)+\varepsilon_2 b)+\varepsilon_1 a)$ 이다. 그러므로 다음의 등식이 성립한다.

$$\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c+\varepsilon_4 d=0 \text{ 이다.}$$

정리 2.9 주어진 (a,b,c,d) 가 디피의 머리를 가질 필요충분조건은 $\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c+\varepsilon_4 d=0$ 을 만족하는 $\varepsilon_i=\pm 1$ 이 존재하는 것이다.

증명. 위에서 (a,b,c,d) 가 디피의 머리 (x,y,z,w) 를 가지면 위의 식을 만족하는 것을 보였으므로, 그것의 역을 보이자. 일관성을 잃지 않고 $\varepsilon_4=-1$ 라고 두자. 즉 $d=\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c$ 으로 표시된다고 하자. 그러면 디피 머리 $H(a,b,c,d)$ 를 소행렬 F_{44} 의 역행렬인 $F_{44}^{-1}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3\\ 0 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{pmatrix}$ 을 이용하여 구할 수 있다. $(a,b,c)=F_{44}(x,y,z)$ 라고 두면 $F_{44}^{-1}(a,b,c)=(x,y,z)$ 에 의하여 $(x,y,z)=(\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c,\ \varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c,\ \varepsilon_3 c)$ 이다. $d=\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c$ 이므로 디피 머리 (x,y,z,w)는 $(\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c,\ \varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c,\ \varepsilon_3 c,\ 0)$ 가 된다.

또한 반전동치 $(i-x,i-y,i-z,i-w)$ 에 의하여 $i=d=\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c$ 를 대입한 $(0,\varepsilon_1 a,\ \varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b,\ \varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c)$ 도 (a,b,c,d) 의 머리가 된다. 그런데 위에서 구한 네 수가 0 또는 자연수라는 보장이 없다. 그래서 평행이동을 하여 네 수가 음이 아니게 만들면 디피의 머리를 구할 수 있다. □

추론 2.10 만약 $d=\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c$ 가 되는 $\varepsilon_i=\pm 1$ 가 존재하지 않으면 디피 (a,b,c,d) 의 머리는 존재하지 않는다.

$d=\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c$ 일 때, a,b,c,d가 가질 수 있는 관계는 모두 8가지 경우가 있다. 그 중 $d=-a-b-c$ 는 자명한 경우이므로 다루지 않도록 하겠다. 이유는 a,b,c,d가 음이 아닌 정수이므로 $a+b+c+d=0$ 이면 $(a,b,c,d)=(0,0,0,0)$ 이다. 그러므로 k가 음이 아닌 정수일 때, $(x,y,z,w)=(k,k,k,k)$ 라고 두면 된다.

나머지 7가지 경우에 대하여, 위의 정리 2.9에서 구한 방법으로 디피의 머리를 계산하면 아래 추론 2.11의 결과를 가진다.

추론 2.11

<표 1> $d=\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c$ 일 때 디피의 머리

	$H(a,b,c,d)$
① $d=a+b+c$ 이면	$(0,a,a+b,a+b+c)$
	$(a+b+c,b+c,c,0)$
② $d=a-b-c$ 이면	$(0,a,c+d,d)$
	$(a,0,b,b+c)$
③ $d=-a+b-c$ 이면	$(a,0,b,a+d)$
	$(c+d,b,0,c)$
④ $d=-a-b+c$ 이면	$(a+b,b,0,c)$
	$(d,a+d,c,0)$
⑤ $d=-a+b+c$ 이면	$(a,0,b,b+c)$
	$(d,a+d,c,0)$
⑥ $d=a-b+c$ 이면	$(b,a+b,a,a+c)$
	$(a+c,c,b+c,b)$
⑦ $d=a+b-c$ 이면	$(0,a,a+b,d)$
	$(a+b,b,0,c)$

3. 임의로 주어진 길이 n을 갖는 (a,b,c,d) 를 구할 수 있는가?

위에서 a,b,c,d가 정리 2.9의 관계를 만족하면 디피의 머리를 구할 수 있다는 것을 알았다. 세 번째 문제를 해결하기 위하여 (a,b,c,d) 의 디피의 머리 $(x,y,

$z, w)$ 도 역시 $w=\varepsilon_1 x+\varepsilon_2 y+\varepsilon_3 z$ 관계를 가지게 할 수 있다면, 임의로 주어진 자연수 n 의 길이를 갖는 네 수를 구할 수 있다.

주어진 네 수 (a, b, c, d) 에 대하여 회전동치에 의하여 $a=\min\{a, b, c, d\}$ 라고 하고 호환동치에 의하여 $b \le d$ 라고 가정하자. $\{a, b, c, d\}$ 로 만들 수 있는 치환은 모두 4!=24 가지인데, 그 중에 8 경우가 동치이므로 동치류(equivalence classes)는 3 가지가 존재한다.

즉 동치가 아닌 주어진 네 수는 $a \le c \le b \le d$, $a \le b \le c \le d$, $a \le b \le d \le c$ 뿐이다. 이러한 가정하에 $w=\varepsilon_1 x+\varepsilon_2 y+\varepsilon_3 z$ 관계를 가지는 디피의 머리를 구해보자.

추론 2.12 (x, y, z, w) 를 (a, b, c, d) 의 머리라고 하자. $a \le c \le b \le d$, $a \le b \le c \le d$, $a \le b \le d \le c$ 일 때 디피의 머리를 구하면 다음과 같다.

① $d=a+b+c$ 인 경우

위의 추론 2.11의 결과인 $(0, a, a+b, a+b+c)$ 를 평행이동한 $(x, y, z, w)=(k, a+k, a+b+k, a+b+c+k)$ 에 $w=x+y+z$ 가 될 k 의 조건을 계산해 보면 $k=(c-a)/2$ 가 된다. 위의 식에 k 를 대입하면

$$(x, y, z, w)=\left(\frac{c-a}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{c+a}{2}+b, \frac{c+a}{2}+b+c\right)$$

가 되고 $0 \le x \le y \le z \le w$, $x+y+z=w$ 이다.

② $d=a-b-c$ 인 경우

$a=b+c+d \le d$ 가 되어 $b=c=0$ 이고 $a=d$ 이다. 그런데 $a \le b$ 이므로 $a=0$ 이어야 한다. 즉 $(a, b, c, d)=(0,0,0,0)$ 이므로 음이 아닌 정수 k 에 대하여 $(x, y, z, w)=(k, k, k, k)$ 라고 두면 된다. 이 때 $0 \le x \le y \le z \le w$, $-x+y+z=w$ 이다.

③ $d=-a+b-c$ 인 경우

$b=a+c+d \le d$ 가 되어 $a=c=0$ 이고 $b=d$ 이다. 그러므로 $(a, b, c, d)=(0, b, 0, b)$ 이다. $(x, y, z, w)=(0,0, b, b)$ 라고 두면 $0 \le x \le y \le z \le w$ 이 되고 $x+y+z=w$ 이 된다.

④ $d=-a-b+c$ 인 경우

$c=a+b+d$ 이므로 $a \le b \le d \le c$ 이다. 위의 추론 2.11의 결과인 $(a+b, b, 0, c)$ 를 평행이동한 $(x, y, z, w)=(a+b+k, b+k, k, c+k)$ 가 $w=x+y+z$ 가 될 k 의 조건을 계산해 보면 $k=(d-b)/2$ 가 된다. 위의 식에 k 를 대입하면

$$(x, y, z, w)=\left(\frac{d+b}{2}+a, \frac{d+b}{2}, \frac{d-b}{2}, \frac{d+b}{2}+a+d\right)$$

가 되고 $0 \le z \le y \le x \le w$, $x+y+z=w$ 이다.

⑤ $d=-a+b+c$ 인 경우

위의 추론 2.11의 결과인 $(a, 0, b, b+c)$ 를 평행이동한 $(x, y, z, w)=(a+k, k, b+k, b+c+k)$ 가 $w=x+y+z$ 가 될 k 의 조건을 계산해 보면 $k=(c-a)/2$ 가 된다. 위의 식에 k 를 대입하면

$$(x, y, z, w)=\left(\frac{c+a}{2}, \frac{c-a}{2}, \frac{c-a}{2}+b, \frac{c-a}{2}+b+c\right)$$

가 되고

$$0 \le \frac{c-a}{2} \le \frac{c+a}{2} \le \frac{c-a}{2}+b \le \frac{c-a}{2}+b+c$$

이므로 $0 \le y \le x \le z \le w$, $x+y+z=w$ 이다.

⑥ $d=a-b+c$ 인 경우

$0 \le d-a=c-b$ 이므로 $a \le b \le c$ 이다. 추론 2.11의 결과인 $(b, a+b, a, a+c)$ 를 평행이동한 $(x, y, z, w)=(b+k, a+b+k, a+k, a+c+k)$ 가 $w=x+y+z$ 가 될 k 의 조건을 계산해 보면 $k=[(c-a)/2]-b$ 가 된다. 위의 식에 k 를 대입하면

$$(x, y, z, w)=\left(\frac{c-a}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{c+a}{2}-b, \frac{c+a}{2}-b+c\right)$$

가 되고

$$0 \le \frac{c+a}{2}-b \le \frac{c-a}{2} \le \frac{c+a}{2} \le \frac{c+a}{2}-b+c$$

이므로 $z \le x \le y \le w$, $x+y+z=w$ 이다.

⑦ $d=a+b-c$ 인 경우

$0 \le d-a=b-c$ 이므로 $a \le c \le b$ 이다. 추론 2.11의 결과인 $(0, a, a+b, d)$ 를 평행이동한 $(x, y, z, w)=(k, a+k, a+b+k, d+k)$ 가 $z=x+y+w$ 가 될 k

의 조건을 계산해 보면 $k=(c-a)/2$가 된다. 위의 식에 k를 대입하면

$$(x,y,z,w)=\left(\frac{c-a}{2},\frac{c+a}{2},\frac{c+a}{2}+b,\frac{c+a}{2}+b-c\right)$$

가 되고

$$0\le\frac{c-a}{2}\le\frac{c+a}{2}\le\frac{c+a}{2}+b-c\le\frac{c+a}{2}-b$$

이므로 $x\le y\le w\le z$이고 $w=-x-y+z$이다.

주의 2.13 위의 경우 x,y,z,w가 0 또는 자연수 이어야 하므로, $c+a$가 자연수 이어야 한다는 조건이 필요하다. 하지만 우리의 목적은 디피 길이가 n인 (a,b,c,d)를 구하는 것이므로 이것은 확대동치를 이용하여 해결할 수 있다.

이제 a,b,c,d의 관계가 일반적인 경우의 디피의 머리를 구하는 방법에 대하여 생각해 보자. 추론 2.12의 ① $d=a+b+c$ 에서는 $a\le c$를 가정했기에 디피의 머리를 구할 수 있었다. 만약 $a\ge c$인 경우는 추론 2.11의 ①의 두 번째 결과를 이용하여 $y+z+w=x$가 될 k를 구하면 된다.

이와 같이 일반적인 경우의 ① $d=a+b+c$는 $a\le c$와 $a\ge c$, 2가지 경우로 나누어진다. 이처럼 ①~⑦까지 나타날 수 있는 일반적으로 경우를 살펴보면 다음 <표2>와 같다.

<표 2> 디피 머리의 경우의 수

① $d=a+b+c$	2 가지 경우
② $d=a-b-c$	2 가지 경우
③ $d=-a+b-c$	2 가지 경우
④ $d=-a-b+c$	2 가지 경우
⑤ $d=-a+b+c$	4 가지 경우
⑥ $d=a-b+c$	8 가지 경우
⑦ $d=a+b-c$	4 가지 경우

위의 <표 2>와 같이, 각 경우로 나누어지는 이유는 정리 2.14의 분류에서 x,y,z,w의 부등호의 순서가 중요한 역할을 하기 때문이다. 아래 정리 2.14의 계산 과정은 추론 2.12와 같다.

중요정리 2.14 (x,y,z,w)를 (a,b,c,d)의 머리라고 하자. 일반적인 경우의 디피의 머리를 구하면 다음 <표 3>과 같다. 이 때 '디피 머리의 종류'에서 나오는 기호 $\alpha\beta\gamma\delta$는 $0\le\alpha\le\beta\le\gamma\le\delta$, $\alpha+\beta+\gamma=\delta$임을 의미한다. x,y,z,w 사이의 등식 $w=\varepsilon_1x+\varepsilon_2y+\varepsilon_3z$ 와 대소 관계를 이용하여 중요정리 2.14를 계속 이용하면 디피머리를 계속 구할 수 있다.

<표 3> $w=\varepsilon_1x+\varepsilon_2y+\varepsilon_3z$ 관계를 가지는 디피의 머리

	조건	디피 머리 (x,y,z,w)	디피 머리의 종류
①-1. $d=a+b+c$	$a\le c$	$\left(\frac{c-a}{2},\frac{c+a}{2},\frac{c+a}{2}+b,\frac{c+a}{2}+b+c\right)$	$xyzw$ ①-1
①-2. $d=a+b+c$	$c\le a$	$\left(\frac{a+c}{2}+b+a,\frac{a+c}{2}+b,\frac{a+c}{2},\frac{a-c}{2}\right)$	$wzyx$ ②-2
②-1. $d=a-b-c$	$b\le d$	$\left(\frac{d+b}{2}+c+d,\frac{d-b}{2},\frac{d+b}{2},\frac{d+b}{2}+c\right)$	$yzwx$ ②-1
②-2. $d=a-b-c$	$d\le b$	$\left(\frac{b-d}{2},\frac{b+d}{2}+c+b,\frac{b+d}{2}+c,\frac{b+d}{2}\right)$	$xwzy$ ③-2
③-1. $d=-a+b-c$	$c\le a$	$\left(\frac{a+c}{2}+d,\frac{a+c}{2}+d+a,\frac{a-c}{2},\frac{a+c}{2}\right)$	$zwxy$ ③-1
③-2. $d=-a+b-c$	$a\le c$	$\left(\frac{c+a}{2},\frac{c-a}{2},\frac{c+a}{2}+d+c,\frac{c+a}{2}+d\right)$	$yxwz$ ④-2

④-1. $d=-a-b+c$	$d \leq b$	$\left(\frac{b+d}{2}, \frac{b+d}{2}+a, \frac{b+d}{2}+a+b, \frac{b-d}{2}\right)$	$wxyz$ ④-1
④-2. $d=-a-b+c$	$b \leq d$	$\left(\frac{d+b}{2}+a, \frac{d+b}{2}, \frac{d-b}{2}, \frac{d+b}{2}+a+d\right)$	$zyxw$ ①-2
⑤-1. $d=-a+b+c$	$a \leq c, a \leq b$	$\left(\frac{c+a}{2}, \frac{c-a}{2}, \frac{c-a}{2}+b, \frac{c-a}{2}+b+c\right)$	$yxzw$ ①-1
⑤-2. $d=-a+b+c$	$a \leq c, b \leq a$	$\left(\frac{c+a}{2}, \frac{c-a}{2}, \frac{c-a}{2}+b, \frac{c-a}{2}+b+c\right)$	$yzxw$ ①-2
⑤-3. $d=-a+b+c$	$c \leq a, a \leq b$	$\left(\frac{a+c}{2}+b-a, \frac{a+c}{2}+b, \frac{a+c}{2}, \frac{a-c}{2}\right)$	$wzxy$ ③-1
⑤-4. $d=-a+b+c$	$c \leq a, b \leq a$	$\left(\frac{a+c}{2}+b-a, \frac{a+c}{2}+b, \frac{a+c}{2}, \frac{a-c}{2}\right)$	$wxzy$ ③-2
⑥-1. $d=a-b+c$	$b \leq d$, $b \leq a \leq c$	$\left(\frac{c-a}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{c+a}{2}-b, \frac{c+a}{2}-b+c\right)$	$xzyw$ ①-1
⑥-2. $d=a-b+c$	$b \leq d$, $a \leq b \leq c$	$\left(\frac{c-a}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{c+a}{2}-b, \frac{c+a}{2}-b+c\right)$	$zxyw$ ①-2
⑥-3. $d=a-b+c$	$b \leq d$, $c \leq b \leq a$	$\left(\frac{a+c}{2}-b+a, \frac{a+c}{2}-b, \frac{a+c}{2}, \frac{a-c}{2}\right)$	$ywzx$ ②-1
⑥-4. $d=a-b+c$	$b \leq d$, $b \leq c \leq a$	$\left(\frac{a+c}{2}-b+a, \frac{a+c}{2}-b, \frac{a+c}{2}, \frac{a-c}{2}\right)$	$wyzx$ ②-2
⑥-5. $d=a-b+c$	$d \leq b$, $c \leq a \leq b$	$\left(\frac{a-c}{2}+b-a, \frac{a-c}{2}+b, \frac{a-c}{2}, \frac{a+c}{2}\right)$	$zxwy$ ③-1
⑥-6. $d=a-b+c$	$d \leq b$, $c \leq b \leq a$	$\left(\frac{a-c}{2}+b-a, \frac{a-c}{2}+b, \frac{a-c}{2}, \frac{a+c}{2}\right)$	$xzwy$ ③-2
⑥-7. $d=a-b+c$	$d \leq b$, $a \leq b \leq c$	$\left(\frac{c+a}{2}, \frac{c-a}{2}, \frac{c-a}{2}+b, \frac{c-a}{2}+b-c\right)$	$wyxz$ ④-1
⑥-8. $d=a-b+c$	$d \leq b$, $a \leq c \leq b$	$\left(\frac{c+a}{2}, \frac{c-a}{2}, \frac{c-a}{2}+b, \frac{c-a}{2}+b-c\right)$	$ywxz$ ④-2
⑦-1. $d=a+b-c$	$c \leq a, b \leq c$	$\left(\frac{a-c}{2}+b+a, \frac{a-c}{2}+b, \frac{a-c}{2}, \frac{a+c}{2}\right)$	$zywx$ ②-1
⑦-2. $d=a+b-c$	$c \leq a, c \leq b$	$\left(\frac{a-c}{2}+b+a, \frac{a-c}{2}+b, \frac{a-c}{2}, \frac{a+c}{2}\right)$	$zwyx$ ②-2
⑦-3. $d=a+b-c$	$a \leq c, b \leq c$	$\left(\frac{c-a}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{c+a}{2}+b, \frac{c+a}{2}+b-c\right)$	$xwyz$ ④-1
⑦-4. $d=a+b-c$	$a \leq c, c \leq b$	$\left(\frac{c-a}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{c+a}{2}+b, \frac{c+a}{2}+b-c\right)$	$xywz$ ④-2

위의 <표 3>에 의하여 디피와 디피 머리의 관계를 그림으로 만들어 보면 다음 <그림 2>와 같다. 이 때 '⑤-2 ⇒ ①-2'가 의미하는 것은, ⑤-2 모양의 네 수의 디피 머리가 ①-2 모양을 가진다는 것이다.

⑥-2 ⑦-2
⇓ ⇓
⑤-2 ⇒ ①-2 ⇒ ②-2 ⇐ ⑥-4
⇑ ⇓
⑥-8 ⇒ ④-2 ⇐ ③-2 ⇐ ⑤-4
⇑ ⇑
⑦-4 ⑥-6

⑤-1 ⇒ ①-1 ⇒ ①-1 ⇐ ⑥-1
⇑ ⇓
①-1 ⇒ ①-1

⑥-3 ⇒ ②-1 ⇒ ②-1 ⇐ ⑦-1
⇑ ⇓
②-1 ⇒ ②-1

⑤-3 ⇒ ③-1 ⇒ ③-1 ⇐ ⑥-5
⇑ ⇓
③-1 ⇒ ③-1

⑥-7 ⇒ ④-1 ⇒ ④-1 ⇐ ⑦-3
⇑ ⇓
④-1 ⇒ ④-1

<그림 2> 디피 머리들의 관계

즉, 네 수가 모두 0 이 아닌 임의의 (a,b,c,d)는 위의 24 경우 중의 하나에 속하고 각각은 ①-1, ②-1, ③-1, ④-1, ①-2, ②-2, ③-2, ④-2 모양의 디피 머리를 가진다. ①-1, ②-1, ③-1, ④-1은 자기 자신과 같은 모양의 머리를 가지고, ①-2, ②-2, ③-2, ④-2는 위의 <그림 2>에서 보듯이, 네 경우가 순차적으로 디피 머리가 된다.

알고리듬 2.15 아래 알고리듬을 이용하면 임의로 주어진 길이 n을 갖는 네 수 (a,b,c,d)를 구할 수 있다.

첫째, ①-1 모양을 가지는 임의의 (a,b,c,d)를 택한다. 예를 들면 $(0,1,2,3)$이 있다.

둘째, 이 디피의 길이 m를 구하고, (a,b,c,d)을 h_m이라고 둔다. 즉 $h_5=(0,1,2,3)$이다.

셋째, $\tilde{h}_{m+1}=\left(\frac{c-a}{2},\frac{c+a}{2},\frac{c+a}{2}+b,\frac{c+a}{2}+b+c\right)$라고 두고, 만약 $a+c$가 짝수이면 $h_{m+1}:=\tilde{h}_{m+1}$, $a+c$가 홀수이면 $h_{m+1}:=2\tilde{h}_{m+1}$로 정의한다. 그러면 h_{m+1}도 ①-1 모양을 가진다.

넷째, 위의 세 번째 알고리듬을 $m+l=n$이 될 때까지 반복해서 시행하면 h_n은 디피 길이 n을 가진다.

위의 알고리듬을 이용한 계산을 통하여 연구자는 디피 길이가 200인 네 수를 찾아내었다. 계산과정에서 구한 길이가 10, 20, …, 190, 200 인 예는 다음과 같다.

010 (5, 9, 17, 31)
020 (230, 423, 778, 1431)
030 (10609, 19513, 35890, 66012)
040 (978793, 1800281, 3311233, 6090307)
050 (45152016, 83047505, 152748176, 280947697)
060 (2082876103, 3831006429, 7046319384, 12960201916)
070 (192167404461, 353450961809, 650097672673, 1195716038943)
080 (8864740270458, 16304799367867, 29989201523742, 55158741162067)
090 (408933139743937, 752145307699165, 1383410902447554, 2544489349890656)
100 (37728417907092161, 69393379351699393, 127634323541132545, 234756120799924099)
110 (1740423286143437108, 3201137498669929925, 5887809802922991460, 10829370587736358493)
120 (80286250603180403871, 147669437360234672073, 271606440286606849984, 499562128250021925928)
130 (740725786334422549358, 13624071280504980689209, 25058573858326447228593, 46089903002175653411391)
140 (341699037144358680988654, 628482513289050597698415, 115595956257625877706546, 2126141113009668056393615)

```
150 ( 157626795420711678588843489,
      289920877084167176129344417,
      533247629280981490647222658,
      980795301785860345365500564 )
160 ( 145427431357414309141095842 5,
```

하지만 컴퓨터나 인터넷에서 간단히 사용할 수 있는 디피 프로그램들(Diffy - National Library of Virtual Manipulatives 2006, Two Diffy Game Applets 2006)은 최대 10자리까지의 정수만 계산할 수 있어서, 연구자가 구한 디피의 길이가 200인 네 수의 디피 실행을 할 수가 없었다. 그래서 연구자는 수학용 계산 프로그램인 Mathematica 5.0을 이용하여 디피 활동을 할 수 있는 프로그램을 아래와 같이 만들었다. Mathematica 5.0 설명서에는 'Mathematica can handle numbers of any size.(매쓰매티카는 어떠한 크기의 수도 다룰 수 있다.)' 라고 쓰여져 있다.

Mathematica용 디피 프로그램

```
In[1]:= diffy[A_]
      := Abs[A-RotateLeft[A]]
In[2]:= diffylist[B_]
      := ColumnForm[Drop[FixedPointList
         [diffy,B],-1]]
In[3]:= diffylength[C_]
      := Position[Drop[FixedPointList
         [diffy,C],-1],{0,0,0,0}]-1
In[4]:= diffinal[D_]
      := ColumnForm[{diffylist[D],
         diffylength[D]}]
```

diffy[A_]는 한 번의 디피를 시행하고, diffylist[B_]는 디피가 끝날 때 까지 시행하며, diffylength[C_]는 디피의 길이를 표시하고, diffinal[D_]은 diffylist와 diffylength를 같이 보여준다. 예를 들어 $(0,1,2,8)$의 디피를 시행한 결과는 아래와 같다.

```
In[5]:= diffy[{0,1,2,8}]
Out[5]:= {1,1,6,8}

In[6]:= diffylist[{0,1,2,8}]
Out[6]:= {0, 1, 2, 8},
         {1, 1, 6, 8}
         {0, 5, 2, 7}
         {5, 3, 5, 7}
         {2, 2, 2, 2}
         {0, 0, 0, 0}

In[7]:= diffylength[{0,1,2,8}]
Out[7]:= {{5}}

In[8]:= diffinal[{0,1,2,8}]
Out[8]:= {0, 1, 2, 8},
         {1, 1, 6, 8}
         {0, 5, 2, 7}
         {5, 3, 5, 7}
         {2, 2, 2, 2}
         {0, 0, 0, 0}
         {{5}}
```

위의 프로그램을 통하여 연구자가 구한 네 수의 디피 길이는 200이라는 것을 확인하였다.

III. 결 론

이 글에서 우리는 디피 게임을 소개하고 그 게임을 하는 과정에서 자연스레 발생하는 3가지 궁금증에 대하여 생각해 보고 해결하였다. 19세기 말 이탈리아의 E. Duccid에 의하여 만들어진 디피 게임은 네 자연수

a, b, c, d의 두 원소의 차(difference)를 계속하여 구해가는 단순한 뺄셈 게임이다. 단순해 보이는 디피 활동 중에 여러 가지 흥미로운 추측을 할 수 있는데, '첫째, 디피는 항상 끝나는가? 둘째, 디피의 머리는 항상 존재하는가? 셋째, 임의로 주어진 길이 n을 갖는 (a, b, c, d)를 구할 수 있는가?' 이다.

첫 번째 문제는 '디피를 계속 시행하면 디피의 크기가 줄어든다' 라는 Behn, Kribs-Zaleta, Ponomarenko의 논문(2005)과 강문봉의 논문(2005)에 의하여 해결되었다.

두 번째 문제는 '주어진 (a, b, c, d)가 디피의 머리를 가질 필요충분조건은 $\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 c + \varepsilon_4 d = 0$ 을 만족하는 $\varepsilon_i = \pm 1$이 존재하는 것이다.'라는 것에 의하여 해결되었다.

세 번째 문제는 일반적인 경우의 디피의 머리를 구한 정리 2.14와 알고리듬 2.15에 의하여 임의로 주어진 길이 n을 갖는 (a, b, c, d)를 구하는 방법을 제시하였고, 연구자는 길이가 200인 네 수
(13171083237991975308096091566131010,
24225398951461887083651268387897667,
44557455431202875676230894318614598,
81953937620656738067978254272643275)
를 제시하였다. 또한 현재 컴퓨터나 인터넷에서 간단히 사용할 수 있는 디피 프로그램들은 최대 10자리까지의 정수만 계산할 수 있어서, 위의 디피 길이가 200인 네 수의 디피 실행을 할 수가 없었다. 그래서 연구자는 수학용 계산 프로그램인 Mathematica 5.0을 이용하여 디피 활동을 할 수 있는 디피 프로그램을 만들고, 연구자가 구한 네 수의 디피 길이는 200이라는 것을 확인하였다.

그 외에도 디피 게임을 하면서 여러 가지 문제를 생각해 볼 수 있는데, 주어진 길이 n을 가지는 네 수 중 가장 크기가 작은 것을 구하는 문제, 주어진 크기를 가진 네 수 중 가장 긴 길이를 가진 네 수를 찾는 문제, 서로 동치인 네 수를 완전하게 분류하는 것 등이 있다.

디피는 초등학생의 뺄셈 교육을 위한 좋은 수학 게임이 될 뿐만 아니라 중·고등학생들에게도 수학적 사고 활동을 위한 훌륭한 소재가 된다. 길이가 긴 디피를 구하기 위하여 추측, 귀납적 사고, 거꾸로 풀기 등 다양한 수학적 사고를 할 수 있다. 특히 디피 게임은 영재 교육의 좋은 자료로도 사용될 수 있다.

모든 사람들이 합리적인 사고와 현명한 판단을 하고 빠르고 새롭게 바뀌어 가는 미래 사회에 대처하고 적응하기 위하여, 수학적 사고를 생활화하는 사회가 되길 바란다.

참 고 문 헌

강문봉 (2005). 디피 활동에서의 수학적 추측과 발견, 대한수학교육학회지 <학교수학> **7(4)**, pp.319-336, 서울: 대한수학교육학회.

히로나카 헤이스케 (2001). 학문의 즐거움, 서울: 김영사.

Behn, A. ; Kribs-Zaleta, C. & Ponomarenko, V.(2005). The convergence of difference boxes, *American Mathematical Monthly,* **112(5)**, pp.426-439.

Ciamberlini, C. & Marengoni A. (1937). Sa una interessante curiosità numerica, *Period. Mat. Ser.* **4**, pp.25-30.

Diffy - National Library of Virtual Manipulatives (2006). Utah State University, http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_326_g_2_t_1.html

McLean, K. R. (1999). Playing Diffy with real sequences, *The Mathematical Gazette.* **83(496)**, pp.58-68.

Two Diffy Game Applets (2006). University of Massachusetts Amherst, http://www-unix.oit.umass.edu/~cs121/projects/project3/barring/diffyGame.htm

The Head of Diffy

Kim, Hong Chan
Dept. of Mathematics Education, Korea University, Seoul 136-701, Korea
hongchan@korea.ac.kr

Diffy is a simple mathematical puzzle that provides elementary-school students with subtraction practice. The idea appears to have originated in the late nineteenth century with E. Ducci of Itali. Thirty years ago Professor J. Copley of the University of Houston introduced the diffy game to teachers in elementary schools and it widely spreaded out.

During the diffy activity we naturally guess many interesting conjectures. First, does diffy always end? Second, does the head of diffy always exist? Third, for an arbitrary given natural number n, is there any possible method to find the diffy with the given length n?

In this study I give the necessary and sufficient condition for the existence of the head of diffy. Using this condition I classify all possible heads of diffy and provide an algorithm to find the diffy with any given length n. With this algorithm I find four natural numbers with diffy length 200. To ensure my numbers are correct, I make a diffy program for Mathematica and check they are correct.

I suggest the diffy game is good for enlarging the mathematical thinking to all graded students, especially gifted and talented students. It will produce rational consideration and synthetic judgement.

* ZDM Classification : A90
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97A90
* Key Words : diffy, mathematical thinking, game for gifted students