韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 20집 제 4호, 2006. 11. 621-634

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 20, No. 4, Nov. 2006. 621-634

지렛대 원리를 활용한 선분의 비에 관련된 도형 문제의 해결에 대한 연구

한 인 기 (경상대학교)
홍 동 화 (창원사파고등학교)

1. 서 론

제 7차 수학과 교육과정(교육부, 1998, p.29)에 수학교육의 목표들 중의 하나로 '수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결할 수 있다'는 것을 규정하여, 실제 생활이나 다른 학문 영역의 현상들에 대한 수학적 해석 및 수학적 탐구 활동을 강조하고 있다. 특히, 한국교육개발원(2000)에서는 수학과 영재교육과정 시안 개발의 기본 방향을 기술하면서 다양한 학문영역들 사이의 통합적/간학문적 접근이 가능한 교육과정 개발을 강조하였다. 결국, 수학과 정규 교육과정, 수학 영재교육을 위한 교육과정 모두에서 실생활의 문제상황을 다양한 관점에서 분석하고, 수학과 다른 학문 영역 사이의 관련성을 탐구하며, 간학문적인 통합적 접근을 통한 문제해결 능력의 계발 및 육성하는 것이 강조되고 있음을 알 수 있다.

지렛대 원리 및 무게중심에 관련된 연구는 수학과 물리, 수학과 공학 분야에서 폭넓은 활용을 가지는 간학문적 접근의 중요한 부분이며, 실생활에서 다양한 실제적인 예를 수학적 개념 및 방법에 관련시킬 수 있는 흥미로운 영역이라 할 수 있다. 특히, 수학사에서 보면, 아르키메데스는 지렛대 원리 및 무게중심의 개념을 이용하여 구의 부피를 구하였는데, 이것은 수학적 사실의 발명이라는 측면에서 뿐만 아니라, 공학의 개념을 수학 문제해결에 적용하여 수학 연구의 방법을 풍부하게 했다.

지렛대 원리 및 무게중심에 관련된 국내의 수학교육학 연구를 분석하면, 첫째 삼각형의 무게중심에 대한 다양한 증명 및 확장에 관한 연구(김선희·김기연, 2005; 홍갑주, 2005; 박달원, 2006; 한인기·강인주, 2000; 한인기, 2002; 에르든예프·한인기, 2005; 한인기·김기수, 2004), 둘째 지렛대 원리를 활용한 질량점들 및 다각형판의 무게중심에 관련된 연구(한인기, 2003, 2005)를 들 수 있다. 첫 번째 방향의 연구에서는 수학교과서에 제시된 삼각형의 무게중심에 대한 정리의 다양한 증명방법이 제시되었으며, 두 번째 방향의 연구에서는 도형의 꼭지점에 놓인 질량점들에 대한 무게중심 및 다각형판의 무게중심을 지렛대의 원리를 이용하여 탐구하였다. 이들 연구에서는 삼각형의 중선, 무게중심을

* ZDM 분류 : D53
* MSC2000 분류 : 97D50
* 주제어 : 지렛대 원리, 기하 문제해결, 무게중심, 체바 정리

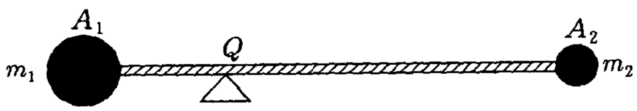
확장시켜 도형의 다양한 성질들을 밝히고, 중등학교 수학교육에서 활용할 수 있는 다양한 수준의 학습 자료를 제공하였다는 측면에서 교육적인 의미를 둘 수 있을 것이다. 그런데, 지렛대 원리와 무게중심을 활용한 문제해결 방법 자체에 대한 체계적인 연구는 없었다.

본 연구에서는 선분의 비에 관련된 도형 문제를 중심으로 지렛대와 무게중심을 활용한 문제해결 방법의 특징을 설명하고, 이 방법을 일반적인 논증을 이용한 방법, 해석적 방법과 비교·분석하며, 이 방법을 활용한 몇몇 문제해결의 실례를 제시할 것이다. 이를 통해, 기하학의 문제해결 방법을 풍부하게 하며, 중등학교 수학 교수-학습에서 학생들이 다양한 문제해결을 위한 새로운 접근 방법을 제시할 것이다.

2. 지렛대 원리를 활용한 평면도형의 문제해결

(1) 문제해결에서 지렛대 원리의 활용

질량이 m_1인 대상이 A_1에, 질량이 m_2인 대상이 A_2에 놓여있는 지렛대 A_1A_2를 생각하자. 지렛대의 지탱점을 Q라 하면(그림 1), 지렛대가 평형을 이룰(지탱점 Q가 무게중심이 될) 필요충분조건은 $\dfrac{QA_1}{QA_2} = \dfrac{m_2}{m_1}$라는 것이 지렛대 원리이다. 즉, 지렛대 원리는 무게중심으로부터 질량점까지의 거리의 비와 질량점에 놓인 질량들의 비 $\dfrac{QA_1}{QA_2}$, $\dfrac{m_2}{m_1}$사이의 관계를 나타내는 식이라 할 수 있다. 그러므로, 지렛대의 원리를 무게중심으로부터 질량점들까지의 거리를 알 때에 질량점에 놓인 질량을 구하거나, 질량점에 놓인 무게를 알 때에 무게중심으로부터 질량점들까지의 거리를 구하는 문제의 해결에 활용할 수 있다. 실제로, Balk(1959), Balk & Boltyanski(1987), Prasolov(2001), 한인기(2003)는 지렛대 원리를 활용하여 기하학의 다양한 문제를 해결하였다. 여기서는 선분의 비에 관련된 평면도형의 문제해결에서 지렛대 원리를 활용하는 방법을 체계적으로 분석해 보자.



<그림 1>

지렛대 원리를 이용한 문제해결의 살펴보고, 이를 분석하자.

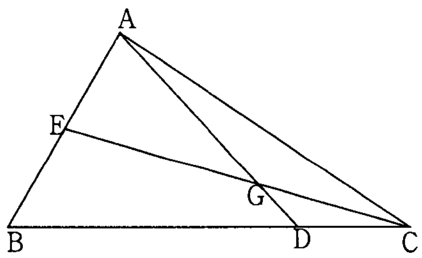
문제 1. 삼각형 ABC의 변 BC를 5:1로 나누는 점 D를 잡자. 선분 AD는 중선 CE를 어떤 비로 나누는가?

풀이. <그림 2>와 같이 중선 CE와 선분 AD의 교점을 G라고 하면, 비 CG:GE를 구해야 한다. 이, 비 CG:GE를 삼각형 ABC의 무게중심을 이용하여 구해보자. 점 G는 선분 CE에도 속하며 선분 AD

에도 속한다. 만약, 삼각형 ABC의 무게중심이 선분 CE에도 속하고 선분 AD에도 속하도록 점 A, B, C에 적당한 질량을 놓으면, 점 G는 그러한 세 질량점의 무게중심이 된다(질량점들의 무게중심은 유일하므로).

선분 CE가 중선이므로, 점 A, B에 같은 질량을 놓으면, 선분 CE에 세 질량점 A, B, C의 무게중심이 속하게 된다. 가령, 점 A, B에 질량 1을 놓았다고 하자. 한편, 선분 AD의 끝점 D는 변 BC를 5:1로 나누므로, B와 C에 놓이는 질량의 비는 1:5이어야 한다. 점 B에 질량 1을 놓았으므로, 점 C에는 질량 5를 놓으면 된다.

결국, 점 G는 삼각형의 세 꼭지점에 놓인 질량점 (A, 1), (B, 1), (C, 5)의 무게중심이 된다. 이제, 비 CG:GE를 구할 수 있다. 점 E에는 질량 2가 놓이며, 점 C에는 질량 5가 놓인다. 점 G는 세 질량점 A, B, C의 무게중심이므로, 지렛대의 원리에 의해, CG:GE=2:5임을 알 수 있다. □



<그림 2>

지렛대 원리를 이용한 문제 1의 해결과정을 분석하면, 다음과 같다.

첫째, 세 질량점 A, B, C의 무게중심이 선분 AD, CE에 각각 놓이도록 세 점 A, B, C에 적당한 질량을 놓는다.

둘째, 선분 AD, CE의 교점 G가 세 질량점 A, B, C의 무게중심임을 이용하여, 구하는 비 CG:GE를 찾는다.

이때, 문제의 조건에 따라 점 G의 위치는 다양하게 변화될 수 있다. 기술한 것과 같은 방법으로 문제를 해결하기 위해선, 삼각형의 내부점 G에 대해, G가 질량점 A, B, C의 무게중심이 되도록 점 A, B, C에 적당한 무게를 항상 놓을 수 있다는 것을 보여야 한다.

정리 1. 삼각형 ABC의 임의의 내부점을 G라 하자. G가 질량점 A, B, C의 무게중심이 되도록, 점 A, B, C에 적당한 질량을 결정할 수 있다는 것을 증명하여라.

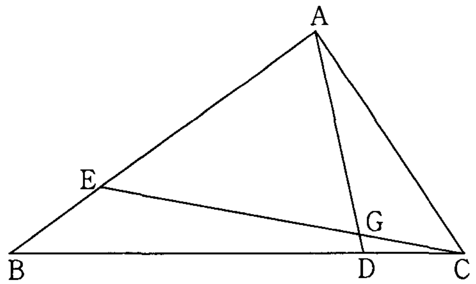
증명. <그림 2>에서 임의의 내부점을 G라 하고, CG의 연장선과 AB의 교점을 E라 하자. 이제, 꼭지점 A, B에 질량 m_1, m_2를 $\frac{AE}{BE}=\frac{m_2}{m_1}$이 되도록 각각 잡자. 즉, $m_1=k\cdot BE$, $m_2=k\cdot AE$라

잡으면 된다(단, k는 양수). 이제, 점 C에 적당한 질량 m_3를 두어 점 G가 무게중심이 되도록 해야 한다. 그런데, 점 E에는 질량 m_1+m_2가 놓이므로, 지렛대 원리에 의해 등식 $\frac{CG}{EG}=\frac{m_3}{m_1+m_2}$이 성립해야 한다. 이로부터, 질량 m_3가 $(m_1+m_2)\frac{CG}{BG}$와 같이 결정된다는 것을 알 수 있다. □

정리 1에 의하면, 삼각형 내부의 임의의 점이 무게중심이 되도록 삼각형의 세 꼭지점에 적당한 질량을 결정할 수 있다는 것을 알 수 있다. 이로부터, 문제 1과 유사한 문제들을 지렛대 원리를 이용하여 풀 수 있음을 알 수 있다.

문제 2. 삼각형 ABC의 변 BC를 5:1로 나누는 점 D를 잡고, 변 AB를 m:n으로 나누는 점 E를 잡자. 그러면, 선분 AD는 선분 CE를 어떤 비로 나누는가?

풀이. <그림 3>에서 BD:DC=5:1, AE:BE=m:n이고, AD와 CE의 교점을 G라 하면, CG:GE를 구해야 한다. 문제 1에서와 마찬가지로, G가 세 점 A, B, C의 무게중심이 되도록, 점 A, B, C에 놓이는 질량을 결정해야 한다.



<그림 3>

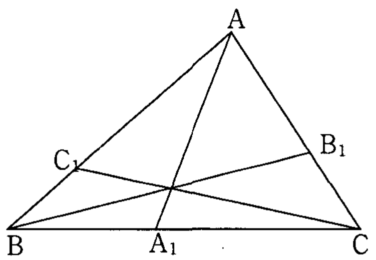
이를 위해, 점 B에 질량 1을 놓으면, BD:DC=5:1이 성립해야 하므로, 지렛대 원리에 의해 점 C에는 질량 5를 놓아야 한다. 한편, AE:BE=m:n이 성립해야 하므로, 지렛대 원리에 의해 점 A에는 질량 $\frac{n}{m}$을 놓아야 한다. G는 질량점 (C, 5), (E, $\frac{n}{m}$)의 무게중심이므로, CG:GE=$\frac{n}{m}$:5이다. □

지렛대 원리는 다양한 유형의 문제를 해결하는 도구가 될 수 있다. 예를 들어, 다음 문제 3은 지렛대 원리를 활용하여 체바 정리를 증명하는데 바탕이 되는 흥미로운 수학적 사실을 포함하고 있다.

문제 3. 삼각형 ABC의 변 BC, AC, AB에 A_1, B_1, C_1을 잡아 선분 AA_1, BB_1, CC_1을 그었다.

만약, $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$이면, 점 A_1이 질량점 B, C의 무게중심, 점 B_1이 질량점 A, C의 무게중심, 점 C_1이 질량점 A, B의 무게중심이 되도록 점 A, B, C에 질량 m_1, m_2, m_3를 각각 잡을 수 있다는 것을 증명하여라.

증명. 점 C_1이 질량점 A, B의 무게중심이 되도록 점 A, B에 질량을 잡자(그림 4). 즉, $\frac{m_1}{m_2}=\frac{BC_1}{AC_1}$이 되도록 m_1, m_2를 잡자. 그리고, 점 A_1이 질량점 B, C의 무게중심이 되도록 하려면, $\frac{m_2}{m_3}=\frac{CA_1}{BA_1}$이 되도록 잡아야 한다. 두 등식 $\frac{m_1}{m_2}=\frac{BC_1}{AC_1}$, $\frac{m_2}{m_3}=\frac{CA_1}{BA_1}$이 성립하도록 m_1, m_2, m_3를 항상 잡을 수 있다. 예를 들어 첫 번째 등식으로부터 $m_1=kBC_1$, $m_2=kAC_1$이라 놓을 수 있고(k는 양수), 두 번째 등식으로부터 $m_2=tCA_1$, $m_3=tBA_1$이라 놓을 수 있다(t는 양수). $m_2=kAC_1=tCA_1$이므로, t= $\frac{kAC_1}{CA_1}$이므로, 두 등식을 만족시키는 m_1, m_2, m_3를 항상 구할 수 있다.



<그림 4>

이제, 앞에서와 같이, m_1, m_2, m_3를 잡으면, 점 B_1이 질량점 A, C의 무게중심이 된다는 것을 보이자. 가정에 의해, $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$이 성립한다. 이 등식에 $\frac{m_1}{m_2}=\frac{BC_1}{AC_1}$, $\frac{m_2}{m_3}=\frac{CA_1}{BA_1}$을 대입하자. $\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{m_3}{m_2}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$이다. 이로부터, $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{m_1}{m_3}$을 얻을 수 있다. 이것은, 점 A, C에 질량 m_1, m_3를 놓으면, 점 B_1이 무게중심이 된다는 것을 의미한다. □

문제 3의 역은 쉽게 증명될 수 있다. 즉, 점 A_1이 질량점 B, C의 무게중심, 점 B_1이 질량점 A, C의 무게중심, 점 C_1이 질량점 A, B의 무게중심이 되도록 점 A, B, C에 질량 m_1, m_2, m_3를 각각 잡으면, 등식 $\frac{m_1}{m_2}=\frac{BC_1}{AC_1}$, $\frac{m_2}{m_3}=\frac{CA_1}{BA_1}$, $\frac{B_1A}{CB_1}=\frac{m_3}{m_1}$이 성립하므로, 이들을 서로 곱하면 관계식

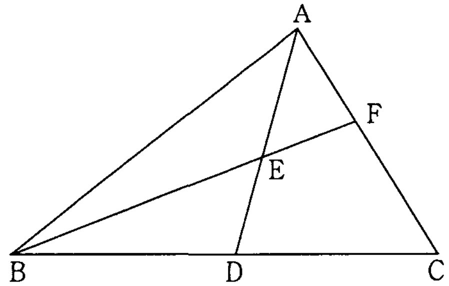
$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A}=1$이 성립함을 알 수 있다. 결국, 문제 3과 그 역에서는 체바 정리에 포함된 등식 $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A}=1$을 무게중심의 언어로 번역하였으며, 체바 정리의 증명은 3장에 제시하였다.

(2) 지렛대 원리를 이용한 문제해결 방법과 다른 방법들의 비교

이제, 지렛대의 원리를 이용한 문제해결 방법과 일반적인 논증적 방법에 의한 문제해결을 비교해 보자. 이를 위해, 다음 문제를 살펴보자.

문제 4. 삼각형 ABC의 중선 AD를 m:n으로 분할하는 점 E를 잡았다. 직선 BE와 변 AC의 교점을 F라 하면, 점 F는 변 AC를 어떤 비로 나누는가?

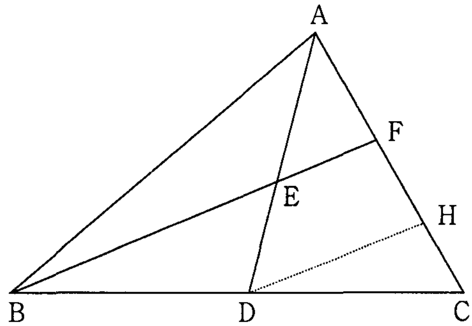
지렛대 원리를 이용한 풀이. 세 질량점 A, B, C의 무게중심이 선분 AD에 놓이도록, 즉 점 E가 세 질량점 A, B, C의 무게중심이 되도록, 이들 점에 적당한 질량을 놓아야 한다(그림 5). 점 D는 변 BC의 중점이므로, 점 B, C에 각각 같은 질량 1을 놓는다. 이때, 점 E에는 질량 2가 놓이게 된다. 조건에 의해 AE:ED=m:n이므로, 지렛대 원리에 의해 A에 질량 $\frac{2n}{m}$을 놓으면, 점 E는 세 질량점 A, B, C의 무게중심이 된다.



<그림 5>

이제, 세 질량점 A, B, C의 무게중심이 선분 BF에 놓이도록 하려면, 점 F가 질량점 A, C의 무게중심이어야 한다. 그러므로, 지렛대 원리에 의해, AF:FC=m:2n임을 알 수 있다. □

일반적인 논증 방법을 이용한 풀이. <그림 6>과 같이, 점 D를 지나며 선분 BF에 평행인 선분 DH를 작도하자. 그러면, 삼각형 CBF에서 선분 DH는 중점을 연결한 선분이 되며, CH=HF가 된다. 한편, 삼각형 ADH에서 EF//DH이므로, AE:ED=AF:FH=m:n가 성립한다. 이로부터, AF:FC=m:2n임을 알 수 있다. □



<그림 6>

일반적인 논증 방법을 이용한 풀이에서는 삼각형의 닮음, 삼각형의 중점연결 정리를 이용하였으며, 보조선으로 점 D를 지나며 선분 BF에 평행인 선분 DH를 작도하였다. 그러나, 지렛대 원리를 이용한 방법에서는 이와 같은 보조선이 필요하지 않다는 것에 주목할 필요가 있다. 일반적으로, 도형 문제의 해결에서 보조선의 작도는 문제해결의 탐색수행에서 어려움을 유발시키는 중요한 요인들 중의 하나이다.

문제 4의 해결과정에서 지렛대 원리를 이용한 방법과 일반적인 논증 방법에 의한 풀이를 구체적으로 비교하면, 다음의 <표 1>과 같다.

<표 1> 문제 4의 해결과정에서 일반적인 논증 방법과 지렛대 원리를 이용한 방법의 비교

일반적인 논증 방법	지렛대 원리를 이용한 방법
점 D가 선분 BC의 중점	점 D가 질량점 B, C의 무게중심
AD와 BE의 교점 E	점 E가 세 질량점 A, B, C의 무게중심
비 AE:ED=m:n	점 D의 질량을 2라 하면, 점 A의 질량은 $\frac{2n}{m}$
보조선 DH를 작도	보조선 필요 없음
선분 AF, FC(=FH+HC)가 닮음인 삼각형들의 변들이라는 것을 이용하여, 비 AF:FC를 구함	점 F가 질량점 A, C의 무게중심임을 이용하여, 비 AF:FC를 구함

문제 5. 삼각형 ABC에서 AB:AC=p:q이며, AD는 각 A의 이등분선이다. AD를 m:n으로 분할하는 점 E를 잡아, 직선 BF와 변 AC의 교점을 F라 하자. 점 F는 변 AC를 어떤 비로 나누는가?

지렛대 원리를 이용한 풀이. <그림 5>에서 AD가 각의 이등분선이므로, AB:AC=p:q=BD:CD이다.

그러므로, 점 D가 변 BC의 무게중심이 되려면, 지렛대 원리에 의해 점 B에 $\frac{1}{p}$, 점 C에 $\frac{1}{q}$인 질량을 놓으면 된다. 결국, 점 D에 질량 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{p+q}{pq}$이 놓이게 된다. 이제, AE:ED=m:n임을 이용하자. 점 A의 질량을 x라 하면, 지렛대 원리에 의해 x:$\frac{p+q}{pq}$=n:m이 성립한다. 이로부터, x=$\frac{n(p+q)}{mpq}$이다. 한편, 점 E가 세 질량점 A, B, C의 무게중심이 되려면, F는 질량점 A, C의 무게중심이 되어야 한다. 그러므로, AF:FC=$\frac{1}{q}:\frac{n(p+q)}{mpq}$이고, 이로부터, AF:FC=mp:n(p+q)가 된다. □

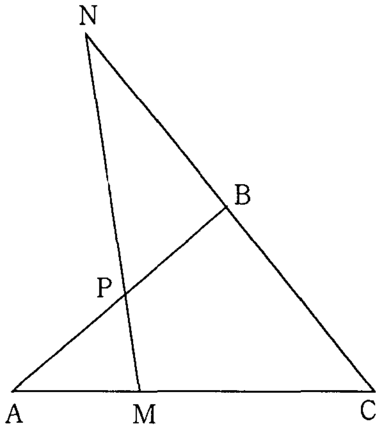
일반적인 논증 방법을 이용한 풀이. AD가 각의 이등분선이므로, AB:AC=p:q=BD:CD이다(그림 6). 점 D를 지나며 선분 BF에 평행인 선분 DH를 작도하자. 그러면, 삼각형 CBF에서 CD:DB=CH:HF 이므로, CH:HF=q:p가 된다. 한편, 삼각형 ADH에서 EF//DH이므로, AE:ED=AF:FH =m:n이다. 결국, AF:FH:HC=mp:np:nq가 된다. 이로부터, AF:FC=mp:(np+nq)=mp:n(p+q)가 됨을 알 수 있다. □

문제 5의 해결과정에서 주목할 것 중의 하나는 'AD가 각의 이등분선이다'라는 것의 의미이다. 일반적인 논증 방법에서는 AD가 각의 이등분선이라는 것으로부터 비례식 AB:AC=p:q=BD:CD를 유도한 반면, 지렛대 원리를 이용한 방법에서는 첫째, D가 변 BC의 무게중심이 되어야 한다는 것, 둘째 점 B에는 질량 $\frac{1}{p}$, 점 C에는 질량 $\frac{1}{q}$인 질량을 놓아 점 D에 질량 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{p+q}{pq}$이 놓여야 한다는 것을 유도하였다. 즉, 지렛대 원리에 의한 방법에서는 문제에 주어진 정보로부터 일반적인 논증 방법보다 더 많은 조작적 정보를 얻을 수 있었다.

문제 6. 삼각형 ABC의 변 AC에 AM:MC=1:2인 점 M을 잡고, 변 CB의 연장선에 CB=BN이 되도록 점 N을 잡았다. 선분 MN과 변 AB의 교점을 P라 할 때, 점 P는 선분 MN, 변 AB를 어떤 비로 나누는가?

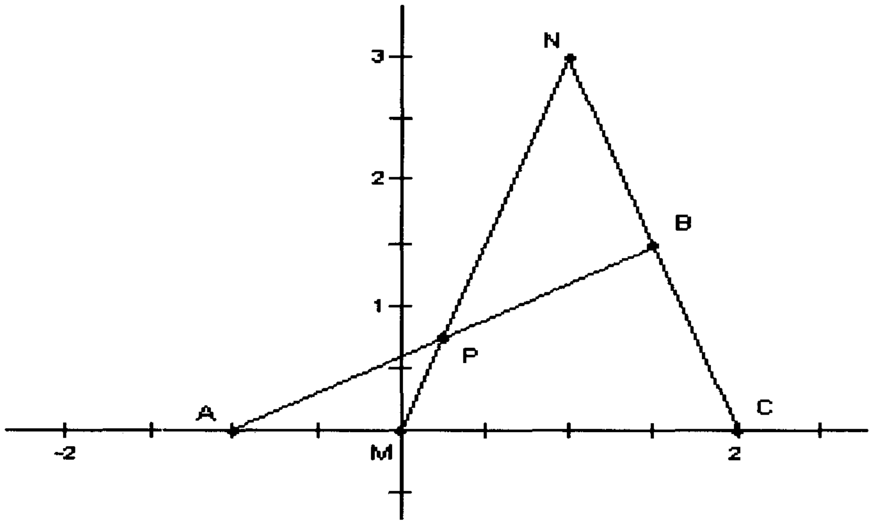
지렛대 원리를 이용한 풀이. <그림 7>에서는 다른 문제들과는 달리, 삼각형 ABC의 밖에 점 N이 있으므로, 점 P가 세 질량점 N, A, C의 무게중심이 되도록 해야 한다. AM:MC=1:2이므로, 점 A, C에 각각 질량 2, 1을 놓는다. 그러면, 점 M에는 질량 3이 놓이게 된다.

한편, CB=BN이므로, 점 N에 질량 1을 놓으면, 점 B가 질량점 C, N의 무게중심이 된다. 이로부터, NP:PM=3:1임을 알 수 있고, AP:PB=1:1임을 알 수 있다. □



<그림 7>

해석적 방법을 이용한 풀이. <그림 8>과 같이, 좌표축에서 점 M에 원점을 잡자. 이제, AM:MC=1:2가 되도록 점 A(0, -1), C(2, 0)을 잡고, 점 B의 좌표를 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 점 N의 좌표를 (1, 3)으로 잡자.



<그림 8>

점 P의 좌표를 구하기 위해, 직선 MN, AB의 방정식을 구하자. 직선 MN의 방정식은 $y=3x$이고, AB의 방정식은 $y=\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}$이다. 이들 방정식을 연립하면, 교점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$이다. 이제, 점

P, N, N에서 x축에 수선의 발을 내려, 그 좌표를 X, Y, Z라 하자. 그러면, MP:PN=MX:XY=$\frac{1}{4}$:$\frac{3}{4}$ =1:3, AP:PB=AX:XZ=$\frac{5}{4}$:$\frac{5}{4}$=1:1이다. □

해석적 방법을 이용한 풀이에서는 문제해결자가 적절하게 좌표계를 설정하여, 문제의 조건에 상응하는 도형의 방정식을 구해야 한다. 문제 6에서 AM:MC=1:2는 조건은 점 A, M, C의 좌표를 정하는 과정에서 고려되어 좌표 점 A(0, -1), M(0, 0), C(2, 0)를 얻었다. 그리고, CB=BN이라는 조건으로부터, 점 B, N의 좌표를 결정할 수 있었다.

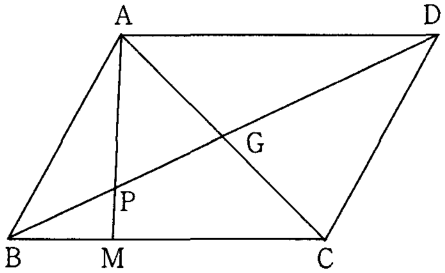
한편, 지렛대 원리를 이용한 방법에서 선분 NM, AB의 교점이 P라는 사실은 점 P가 질량점 N, A, C의 무게중심이 되어야 한다고 번역되었지만, 해석적 방법을 이용한 풀이에서는 두 직선 NM, AB의 방정식을 연립해야 한다는 것으로 번역되었다.

3. 지렛대의 원리를 활용한 평면도형의 성질 탐구

지렛대의 원리를 이용하여 선분의 비에 관련된 몇몇 도형 문제들을 해결하고, 이 방법을 일반적인 논증적 방법, 해석적 방법과 비교하였다. 이제, 지렛대 원리를 이용하여 넓이에 관련된 문제(문제 7), 체바 정리(정리 2) 등에 대한 문제해결 및 증명을 살펴보자.

문제 7. 평행사변형 ABCD의 변 BC에 점 M을 잡아, BM:MC=3:5가 되도록 하였다. 선분 AM과 DB는 점 P에서 교차하며, 평행사변형 ABCD의 넓이는 1이다. 이때, 사각형 CMPD의 넓이를 구하여라.

풀이. 사각형 CMPD는 삼각형 BCD에서 삼각형 BMP를 제외한 부분이다(그림 9). 이제, 선분들의 비를 이용하여 구하는 도형의 넓이를 구하자. 평행사변형 ABCD에서 대각선 AC는 대각선 BD를 이등분하며, 교점을 G라 하자. 이제, 삼각형 ABC의 꼭지점 A, C에 각각 질량 1을 놓으면, BM:MC=3:5 이므로, 점 B의 질량은 $\frac{5}{3}$가 된다. 점 M은 질량점 B, C의 무게중심이므로, M의 질량은 $\frac{8}{3}$이 된다. 그러므로, 지렛대 원리에 의해, AP:PM=$\frac{8}{3}$:1이므로, 8:3이다. 이로부터, AP:AM=11:3이 된다.



<그림 9>

삼각형 ABM의 넓이는 삼각형 ABC의 $\frac{3}{8}$이고, 삼각형 BMP의 넓이는 삼각형 ABM의 $\frac{3}{11}$이다. 사각형 CMPD의 넓이는 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{11}$이고, 이것을 계산하면 $\frac{79}{176}$이다. □

문제 7에서는 높이가 같은 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 비와 같다는 것을 바탕으로, 삼각형의 넓이 문제를 선분의 비에 대한 문제로 귀착시켜, 지렛대 원리를 이용하여 문제를 해결하였다. 이제, 문제 3과 지렛대 원리를 이용하여, 체바 정리를 증명하자.

정리 2. 삼각형 ABC의 변 BC, AC, AB에 A_1, B_1, C_1을 잡아 선분 AA_1, BB_1, CC_1을 그었다. 선분 AA_1, BB_1, CC_1이 한 점에서 교차할 필요충분조건은 등식 $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$이 성립하는 것임을 증명하여라.

충분조건의 증명. 문제 3의 역에 의해, 선분 AA_1, BB_1, CC_1이 점 O에서 교차할 때에 점 A_1이 질량점 B, C의 무게중심, 점 B_1이 질량점 A, C의 무게중심, 점 C_1이 질량점 A, B의 무게중심이 되도록 점 A, B, C에 질량 m_1, m_2, m_3를 각각 잡을 수 있다는 것을 보이면 된다.

문제 3의 증명에서 보았듯이, $\frac{m_1}{m_2}=\frac{BC_1}{AC_1}$, $\frac{m_2}{m_3}=\frac{CA_1}{BA_1}$이 성립하도록 m_1, m_2, m_3를 항상 잡을 수 있다. 그러면, 세 질량점 A, B, C의 무게중심은 선분 AA_1, CC_1에 속하며, 결국 점 O가 이들의 무게중심이 된다. 그러므로, 직선 BO와 변 AC의 교점인 B_1은 질량점 (A, m_1), (C, m_3)의 무게중심이다.

필요조건의 증명. 문제 3에 의해, 등식 $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$이 성립하면, 점 A_1이 질량점 B, C의 무게중심, 점 B_1이 질량점 A, C의 무게중심, 점 C_1이 질량점 A, B의 무게중심이 되도록 점 A, B, C에 질량 m_1, m_2, m_3를 각각 잡을 수 있다. 세 질량점 A, B, C의 무게중심을 O라 하자. 점 A_1이 질량점 B, C의 무게중심이므로, 점 O는 선분 AA_1에 속한다. 같은 이유로, 점 O는 선분 BB_1, CC_1에 속한다. 이로부터, 세 선분 AA_1, BB_1, CC_1이 점 O에서 교차한다는 것을 알 수 있다. □

정리 2에서는 지렛대 원리와 무게중심을 이용하여 체바 정리를 증명하였다. 공점선에 대한 체바 정리가 증명되었으므로, 공선점에 대한 메넬라우스 정리도 지렛대 원리와 무게중심을 이용하여 증명할 수 있을 것이라는 추측을 할 수 있다. 물론, 메넬라우스 정리도 지렛대 원리와 무게중심을 이용하여 증명할 수 있지만, 본 연구에서는 상세한 증명을 생략한다.

4. 결 론

본 연구에서는 선분의 비에 관련된 도형 문제를 중심으로 지렛대와 무게중심을 활용한 문제해결 방법의 특징을 설명하고, 이 방법을 일반적인 논증을 이용한 방법, 해석적 방법과 비교·분석하며, 이 방법을 활용한 몇몇 문제해결의 실례를 제시하였다.

'삼각형 ABC의 변 BC를 일정한 비로 나누는 점 D를 잡으면, 선분 AD는 중선 CE를 어떤 비로 나누는가'와 같은 문제의 해결에서 지렛대 원리의 활용은 첫째, 세 질량점 A, B, C의 무게중심이 선분 AD, CE에 각각 놓이도록 세 점 A, B, C에 적당한 질량을 놓으며, 둘째 선분 AD, CE의 교점 G가 세 질량점 A, B, C의 무게중심임을 이용하여, 구하는 비 CG:GE를 찾았다. 이와 같은 접근 방법은 삼각형의 꼭지점을 지나 대변을 각각 일정한 비로 나누는 두 선분에 관련된 문제해결에 효과적이다.

한편, 세 꼭지점 각각으로부터 대변에 그은 세 선분이 한 점에서 교차한다는 것은 지렛대 원리를 이용하여 번역하면, '삼각형 ABC의 변 BC, AC, AB에 A_1, B_1, C_1을 잡아 선분 AA_1, BB_1, CC_1을 그었다. 만약, $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$이면, 점 A_1이 질량점 B, C의 무게중심, 점 B_1이 질량점 A, C의 무게중심, 점 C_1이 질량점 A, B의 무게중심이 되도록 점 A, B, C에 질량 m_1, m_2, m_3를 각각 잡을 수 있다'는 것과 그 역이 성립함을 보였다. 그리고, 이를 이용하여 체바 정리를 증명하였다.

일반적인 논증 방법 지렛대 원리를 이용한 방법을 비교하면, 일반적 논증 방법에서 삼각형 ABC에서 점 D가 선분 BC의 중점, AD와 BE의 교점 E, AD가 각의 이등분선이라는 것으로부터 비례식 AB:AC=p:q=BD:CD이 성립함 등이 지렛대 원리를 이용한 방법에서는 각각 삼각형 ABC에서 점 D가 질량점 B, C의 무게중심, 점 E가 세 질량점 A, B, C의 무게중심, AD가 각의 이등분선이라는 것으로부터 D가 변 BC의 무게중심이며 점 B에는 질량 $\frac{1}{p}$, 점 C에는 질량 $\frac{1}{q}$인 질량을 놓아 점 D에 질량 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{p+q}{pq}$이 놓임 등에 대응된다. 한편, 해석적 방법에서는 삼각형 ABC에서 선분 NM, AB의 교점이 P라는 것으로부터 직선 NM, AB의 방정식을 연립함이 지렛대 원리를 이용한 방법에서는 삼

각형 ABC에서 선분 NM, AB의 교점이 P라는 것으로부터 점 P가 질량점 N, A, C의 무게중심이 됨에 대응된다.

본 연구의 결과는 기하학의 문제해결 방법을 풍부하게 하며, 중등학교 수학 교수-학습에서 학생들이 다양한 문제해결을 위한 새로운 접근 방법을 제시할 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

김선희 · 김기연 (2005). 수학 영재의 심화학습을 위한 다각형의 무게중심 연구, 대한수학교육학회지 수학교육학연구 **15(3)**, pp.335-352.

박달원 (2006). 영재학생들을 위한 삼각형의 무게중심 지도 방법, 한국학교수학회논문집 **9(1)**, pp.93-104.

에르든에프 · 한인기 (2005). 유추를 통한 수학탐구, 서울: 승산.

홍갑주 (2005). 도형의 무게중심과 관련된 오개념 및 논리적 문제, 대한수학교육학회지 학교수학 **7(4)**, pp.391-402.

한국교육개발원 (2000). 영재교육과정 개발 연구[II], 서울: 장서원.

한인기 (2002). 벡터를 이용한 삼각형의 무게중심에 관한 정리 증명에 관련된 탐구 능력 추출, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **13**, pp.305-316.

한인기 (2003). 수학 문제해결에서 아르키메데스의 공학적 방법에 관한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **17**, pp.115-126.

한인기 (2005). 삼각형판과 사각형판의 무게중심에 관한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **19**, pp.471-484.

한인기 · 강인주 (2000). 삼각형의 무게중심에 관한 다양한 증명들과 수학교육적 의의, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **10**, pp.143-154.

한인기 · 김기수 (2004). 벡터를 활용한 볼록다각형의 무게중심 탐구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **18(2)**, pp.289-294.

Balk M.B. & Boltyanski V.G. (1987). *Geometriya mass*, Moskva: Nauka.

Balk M.B. (1959). *Geometricheskie prilozeniya ponyatiya o tsentre tyazesti*, Moskva: Fizmatgiz.

Prosolov V.V. (2001). *Zadachi po planimetrii*, Moskva: MTsNMO.

A Study on Solving Geometry Problems related with the Ratio of Segments Using the Principle of the Lever

Han Inki
Gyeongsang National University
inkiski@gsnu.ac.kr

Hong Donghwa
Chang-won Sapa High School
ace4one@hanmail.net

In this study we describe the characteristics of solving geometry problems related with the ratio of segments using the principle of the lever and the center of gravity, compare and analyze this problem solving method with the traditional Euclidean proof method and the analytic method.

* ZDM Classification : D53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : the principle of the lever, the center of gravity, geometry problem solving, Ceva theorem