韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 20집 제 4호, 2006. 11. 587-594

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 20 No 4, Nov. 2006. 587-594

Viete 정리를 이용한 여러 문자 다항식의 인수분해에 대한 연구

유 익 승 (전북과학고등학교)
신 현 용 (한국교원대학교)
한 인 기 (경상대학교)

1. 서 론

주어진 식을 원하는 형태로 변형시키는 것은 생산적인 수학탐구 활동에서 중요한 역할을 수행한다. 특히, Kolmogorov(1959, p.9)는 '복잡한 문자식을 변형하고, 일반적인 방법으로 접근할 수 없는 방정식의 풀이를 위해 성공적인 방법을 찾아내는 것과 같은 대수적인 조작의 수행 능력은 수학자의 진지한 학문 탐구에 요구되는 재능에 상당히 접근해 있다'고 강조하면서, 수학탐구 활동에서 문자식의 변형 능력이 중요함을 역설하였다.

중등학교 수학교육에서 문자식의 변형은 인수분해와 전개로 크게 나눌 수 있는데, 특히 인수분해에 관련된 비정형적인 수학탐구 문제들을 쉽게 접할 수 있다. 일반적으로, 중등학교에서는 인수분해를 곱셈공식에 의한 전개의 역으로 도입되는데, 이러한 경우에 이미 알려진 곱셈공식으로 쉽게 귀착되지 않는 비정형적인 식들의 인수분해는 교사들 및 학생들에게 어려움을 유발시키게 된다. 그러므로, 다항식의 인수분해에 관련된 다양한 방법과 이에 상응하는 폭넓은 자료개발이 필요하다. 그런데, 김응태 · 박승안(1998), 신현용(2006) 등과 같은 대수학 교재들에서도 다항식환 $Z[x]$, $Q[x]$ 등의 대수적 구조에 대해서는 상세하게 다루고 있으나, 비정형적인 다항식들에 대한 다양한 인수분해 방법에 대해서는 심도있게 다루고 있지는 않다. 특히, Viete 정리를 이용한 인수분해의 방법은 잘 알려져 있지 않다.

본 연구에서는 여러 문자를 포함하는 다항식을 인수분해하는 한 방법으로, Viete 정리를 이용한 인수분해 방법을 제시하고, 이 방법의 몇몇 특징을 구체적인 예들을 통해서 고찰할 것이다. 본 연구에서는 몇몇 문자를 포함하는 비정형적인 다항식의 효과적인 취급을 위한 한 접근 방법을 제시하며, 이를 통해 교사들 및 학생들의 심도있는 수학탐구를 위한 기초자료를 제공할 수 있을 것이다.

---

* ZDM 분류 : D54
* MSC2000 분류 : 97U99
* 주제어 : Viete 정리, 인수분해, 다항식

2. Viete 정리를 이용한 인수분해 방법

Viete[1] 정리는 근과 계수의 관계로 알려져 있는 정리로, Tumanov(1969)에 의하면, n차 다항식 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$의 근들 $r_1, r_2, \cdots, r_n$에 대해, $s_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i$, $s_2 = \sum_{i,j(i \neq j)}^{n} r_i r_j$, $\cdots$, $s_n = r_1 r_2 \cdots r_n$이라 하면, $s_j = (-1)^j \frac{a_{n-j}}{a_n}$와 같이 기술할 수 있다.

Viete 정리를 이용한 다항식의 인수분해 방법을 구체적으로 살펴보자. 인수분해할 다항식이 n개의 문자로 되어있는 경우에, Viete 정리를 이용하여 이들 문자를 근으로 갖는 n차 다항식을 생각한다. 예를 들어, 다항식 $a^2 + 2ab + b^2$을 인수분해한다고 하면, Viete 정리를 이용하여 a, b를 근으로 가지는 이차방정식 $p(x) = x^2 - (a+b)x + ab$을 생각한다. 그러고 나서, $p(a) = p(b) = 0$라는 것으로부터, 등식

$$a^2 - (a+b)a + ab = 0,\ b^2 - (a+b)b + ab = 0$$

을 유도한다. 이제, 얻어진 등식들을 적당히 변형시키고 연립하여 $a^2 + 2ab + b^2$가 얻어지도록 한다. 즉, $a^2 - (a+b)a + ab = 0$을 $a^2 + ab = (a+b)a$로 변형시키고, $b^2 - (a+b)b + ab = 0$을 $b^2 + ab = (a+b)b$로 변형시켜 서로 더하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a+b)a + (a+b)b \\ &= (a+b)(a+b) \\ &= (a+b)^2 \end{aligned}$$

유사한 방법으로, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$도 유도할 수 있다. 이때에는, $a^2 - (a+b)a + ab = 0$을 $a^2 + ab = (a+b)a$로 변형시키고, $b^2 - (a+b)b + ab = 0$을 $b^2 + ab = (a+b)b$로 변형시킨 다음에, 첫 번째 등식에서 두 번째 등식을 뺀다. 그러면, 다음을 얻을 수 있다.

$$a^2 - b^2 = (a+b)a - (a+b)b = (a+b)(a-b)$$

살펴본 예를 통해, Viete 정리를 이용한 다항식의 인수분해 과정을 다음과 같이 정리할 수 있다.

단계 1. Viete 정리를 이용하여 인수분해하려는 다항식에 포함된 미지수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$를 근으로 가지는 n차 다항식 $p(x)$를 생각한다.

단계 2. $p(x_1) = 0$, $p(x_2) = 0$, $\cdots$, $p(x_n) = 0$를 이용하여, n개의 다항식을 유도한다.

단계 3. 단계 2에서 얻어진 n개의 다항식을 적절히 변형시키고 연립하여, 등식의 좌변에 인수분해하려는 처음 다항식을 유도하고, 우변의 식을 인수분해하여 곱의 꼴로 나타낸다.

1) Viete François (1540-1603) 프랑스의 수학자.

살펴본 다항식 $a^2+2ab+b^2$와 a^2-b^2의 인수분해에서 한 가지 주목할 것은 미지수의 개수(a, b 두 개임)와 다항식의 차수(2차 다항식임)가 같다는 점이다. 다항식에서 미지수의 개수와 차수가 다른 경우를 생각할 수 있다. 예를 들어, 다항식 a^3+b^3을 생각하자. 다항식 a^3+b^3을 Viete 정리를 이용하여 인수분해하는 경우에는 단계 1, 단계 2를 a^2-b^2의 경우와 똑같이 수행하고, 단계 3에서 다항식 a^3+b^3이 유도되도록 등식을 적절히 변형시키면 된다. 즉, a와 b를 근으로 가지는 이차방정식 $p(x)=x^2-(a+b)x+ab$을 생각하고(단계 1), $p(a)=p(b)=0$로부터, 등식 $a^2-(a+b)a+ab=0$, $b^2-(a+b)b+ab=0$을 얻는다(단계 2). 이제, $a^2-(a+b)a+ab=0$의 양변에 a를 곱하면, $a^3=(a+b)a^2-a^2b$가 되고, $b^2-(a+b)b+ab=0$의 양변에 b를 곱하면 $b^3=(a+b)b^2-ab^2$이 된다(단계 3). 첫 번째 식에서 두 번째 식을 더하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= (a+b)a^2-a^2b+(a+b)b^2-ab^2 = (a+b)(a^2+b^2)+ab(a+b)(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2) \end{aligned}$$

유사한 방법으로, $a^3=(a+b)a^2-a^2b$으로부터 $b^3=(a+b)b^2-ab^2$을 빼면, 잘 알려진 등식 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)$이 유도된다.

기술한 것과 같은 Viete 정리를 이용한 인수분해 방법은 모든 종류의 다항식에 대해 적용할 수 있는 것은 아니다. 위의 단계 1, 2, 3에서와 같이, n개의 식 $p(x_1)=0$, $p(x_2)=0$, $\cdots, p(x_n)=0$에 사칙연산을 이용하여 얻어지는 다항식의 인수분해는 Viete 정리를 이용한 방법으로 쉽게 얻어질 수 있다. 이때, $p(x)$의 계수가 모두 문자 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 대한 기본대칭식이고 $p(x_1)=0$, $p(x_2)=0$, $\cdots, p(x_n)=0$는 모두 n차 동차식이므로, 식을 전개하여 적당히 묶으면 각 항을 모두 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 관한 기본대칭식으로 표현이 가능하며, 동차식인 경우에 Viete 정리를 이용한 인수분해를 생각할 수 있다.

3. Viete 정리를 이용한 다항식의 인수분해

Viete 정리를 이용한 인수분해 방법으로 몇몇 다항식을 인수분해하여 보자. 특히, 등식들의 변형방법에 주목하여, 주어진 다항식들의 인수분해를 고찰해보자.

예제 1. 다항식 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$를 인수분해 하여라.

풀이. 우선, a, b, c를 근으로 갖는 3차 다항식 $p(x)$를 다음과 같이 생각해야 한다.

$$p(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$$

이제, $p(a)=0$, $p(b)=0$, $p(c)=0$를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc=0,$$

$$b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc=0,$$

$$c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc=0.$$

이제, 첫 번째 등식의 양변을 각각 a,b,c로 나누고 변형하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} a^2 &= (a+b+c)a-(ab+bc+ca)+bc \\ &= (a+b+c)a-(ab+ca) \end{aligned}$$

같은 방법으로, 두 번째 등식과 세 번째 등식으로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$b^2=(a+b+c)b-(ab+bc),$$

$$c^2=(a+b+c)c-(ca+bc)$$

이제 얻어진 세 등식을 더하면, 다음을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 = {} & (a+b+c)(a+b+c) \\ & -2(ab+bc+ca) \end{aligned}$$

이로부터, 구하는 인수분해 $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2$를 얻게 된다. □

특히, 예제 1에서는 $p(a)=0$, $p(b)=0$, $p(c)=0$로부터, a,b,c에 대한 3차식이 얻어졌다. 그러나, 인수분해를 해야 하는 다항식이 a,b,c에 대한 2차식이므로, 등식들

$$a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc=0,$$

$$b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc=0,$$

$$c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc=0.$$

각각을 a,b,c로 나누어, 주어진 인수분해 문제를 해결하였다.

예제 2. 다항식 $a^3+b^3+c^3-3abc$를 인수분해 하여라.

풀이. a,b,c를 근으로 갖는 3차 다항식 $p(x)$를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} p(x) = {} & x^3-(a+b+c)x^2 \\ & +(ab+bc+ca)x-abc \end{aligned}$$

이제, $p(a)=p(b)=p(c)=0$으로부터, 다음을 알 수 있다.

$$a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc=0,$$

$$b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc=0,$$

$$c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc=0$$

이제, 이들 등식을 더하면,

$$a^3+b^3+c^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)(a+b+c)-3abc=0$$

이므로, 구하는 인수분해를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \ \square$$

예제 2에서는 a,b,c를 근으로 갖는 3차 다항식 $p(x)$를 생각하여, 다항식 $a^3+b^3+c^3-3abc$의

인수분해를 구하였다. 만약, $a,\ -b, c$를 근으로 갖는 3차 다항식 $p(x)$를 생각하면, 다음과 같은 인수분해를 얻을 수 있다.

$$a^3-b^3+c^3=(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ac)$$

그리고, $a,\ -b,\ -c$를 근으로 갖는 3차 다항식 $p(x)$를 생각하면, 인수분해

$$a^3-b^3-c^3-3abc=(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca)$$

를 얻을 수 있다.

한편, 예제 2에서는 $p(a)=p(b)=p(c)=0$으로부터, 얻어진 세 등식

$$a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc=0,$$
$$b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc=0,$$
$$c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc=0$$

을 서로 더하여, 다항식 $a^3+b^3+c^3-3abc$에 대한 인수분해를 얻었다. 이들 세 등식을 다른 방법으로 변형하면, 예제 3의 인수분해를 얻게 된다.

예제 3. 다항식 $2(a^3+b^3+c^3)+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-3abc$를 인수분해 하여라.

풀이. 예제 2와 같은 방법으로, 다음 세 등식을 얻었다고 하자.

$$a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc=0,$$
$$b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc=0,$$
$$c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc=0$$

이제, 각 등식에 2를 곱하여 이항하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$2a^3=2(a+b+c)a^2-2(ab+bc+ca)a+2abc,$$
$$2b^3=2(a+b+c)b^2-2(ab+bc+ca)b+2abc,$$
$$2c^3=2(a+b+c)c^2-2(ab+bc+ca)c+2abc.$$

첫 번째 등식에서 a^2b+a^2c를 이항하여 정리하면,

$$2a^3+a^2b+a^2c=2(a+b+c)a^2-(ab+ca)a$$

가 된다. 이제, 양변에서 abc를 빼면, 다음을 얻게 된다.

$$2a^3+a^2b+a^2c-abc=2(a+b+c)a^2-(ab+bc+ca)a$$

이와 같은 방법으로, $2b^3$, $2c^3$에 대한 식을 정리하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$2b^3+b^2a+b^2c-abc=2(a+b+c)b^2-(ab+bc+ca)b,$$
$$2c^3+c^2a+c^2b-abc=2(a+b+c)c^2-(ab+bc+ca)c$$

이제, 얻어진 세 등식을 더하여 정리하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$2(a^3+b^2+c^3)+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-3abc$$
$$=(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2)-(ab+bc+ca)(a+b+c)$$

$$= (a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-ab-bc-ca). \ \square$$

예제 4. 다항식 $a^4 + a^2b^2 + b^4$을 인수분해 하여라.

풀이. 주어진 다항식이 a, b에 대한 다항식이므로, a, b를 근으로 하는 2차의 다항식 $p(x) = x^2-(a+b)x+ab$을 생각하고, $p(a)=0, p(b)=0$를 다음과 같이 쓰자.

$$p(a) = a^2-(a+b)a+ab=0, \quad p(b) = b^2-(a+b)b+ab=0.$$

인수분해를 해야 하는 다항식이 a, b에 대한 4차식이므로, 얻어진 두 등식에 각각 a^2, b^2을 곱해서 정리해야한다고 생각할 수 있다. 그러한 경우에, 다항식 $a^4 + a^2b^2 + b^4$을 얻기가 쉽지 않다.

다른 접근 방법을 생각하자. 인수분해를 해야 하는 다항식 $a^4 + a^2b^2 + b^4$이 a^2, b^2에 관한 식이므로, a^2, b^2을 근으로 하는 2차 다항식 $p(x)=x^2-(a^2+b^2)x+a^2b^2$을 생각하자. 그러면, $p(a^2)=0, p(b^2)=0$으로부터, 다음을 얻을 수 있다.

$$a^4 - (a^2+b^2)a^2 + a^2b^2 = 0, \ b^4 - (a^2+b^2)b^2 + a^2b^2 = 0$$

얻어진 등식을 $a^4 + a^2b^2 = (a^2+b^2)a^2$, $b^4 = (a^2+b^2)b^2 - a^2b^2$와 같이 쓰고, 이들을 더하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 + b^4 &= (a^2+b^2)a^2 + (a^2+b^2)b^2 - a^2b^2 = (a^2+b^2)^2 - a^2b^2 \\ &= (a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab) \quad \square \end{aligned}$$

예제 4에서는 식을 구성하는 문자의 차수가 모두 짝수 차수이므로 a^2과 b^2을 근으로 갖는 2차 다항식 $p(x)$를 이용하여 인수분해를 하였다.

예제 5. $a^4 + b^4 + c^4 + (ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)$을 인수분해 하여라.

풀이. a, b, c를 근으로 갖는 다항식을 $p(x)$를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

이로부터, a, b, c에 대한 다음과 같은 등식을 얻을 수 있다.

$$a^3 - (a+b+c)a^2 + (ab+bc+ca)a - abc = 0,$$

$$b^3 - (a+b+c)b^2 + (ab+bc+ca)b - abc = 0,$$

$$c^3 - (a+b+c)c^2 + (ab+bc+ca)c - abc = 0$$

그런데, 이들 등식은 3차식이고, 증명하려는 등식은 4차식이다. 이때, 세 등식 식에 각각 a, b, c를 곱하고, 얻어진 식들을 더하면 4차식을 얻을 수 있다.

$$a^4 + b^4 + c^4 - (a+b+c)(a^3+b^3+c^3) + (ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2) - abc(a+b+c) = 0$$

이제, $a^4 + b^4 + c^4 + (ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)$을 남기고 이항하면, 구하는 다음과 같은 인수분해를 얻을 수 있다.

$$a^4+b^4+c^4+(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc) \qquad \square$$

예제 5에서는 다항식 $p(x)$가 3차식이고 인수분해 하려는 식이 4차식인 경우에 차수를 맞추기 위해 $p(a)$, $p(b)$, $p(c)$에 각각 a, b, c를 곱하는 방법을 살펴보았다. 예제 5의 인수분해에서 $a+b+c=0$이면 $a^4+b^4+c^4=-(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)$이 성립한다는 것도 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 여러 문자를 포함하는 다항식을 인수분해하는 한 방법으로, Viete 정리를 이용한 인수분해 방법을 제시하였다. Viete 정리를 이용한 다항식의 인수분해 과정은 다음과 같다.

단계 1. Viete 정리를 이용하여 인수분해하려는 다항식에 포함된 미지수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$를 근으로 가지는 n차 다항식 $p(x)$를 생각한다.

단계 2. $p(x_1)=0,\ p(x_2)=0,\ \cdots, p(x_n)=0$를 이용하여, n개의 다항식을 유도한다.

단계 3. 단계 2에서 얻어진 n개의 다항식을 적절히 변형시키고 연립하여, 등식의 좌변에 인수분해하려는 처음 다항식을 유도하고, 우변의 식을 인수분해하여 곱의 꼴로 나타낸다.

Viete 정리를 이용한 인수분해 방법은 모든 종류의 다항식에 대해 적용할 수 있는 것은 아니다. 위의 단계 1, 2, 3에서와 같이, n개의 식 $p(x_1)=0,\ p(x_2)=0,\ \cdots, p(x_n)=0$에 사칙연산을 이용하여 얻어지는 다항식의 인수분해는 Viete 정리를 이용한 방법으로 쉽게 얻어질 수 있다. 이때, $p(x)$의 계수가 모두 문자 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 대한 기본대칭식이고 $p(x_1)=0,\ p(x_2)=0,\ \cdots, p(x_n)=0$는 모두 n차 동차식이므로, 식을 전개하여 적당히 묶으면 각 항을 모두 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 관한 기본대칭식으로 표현이 가능하며, 동차식인 경우에 Viete 정리를 이용한 인수분해를 생각할 수 있다.

본 연구에서는 비정형적인 몇몇 다항식들을 제시한 인수분해 과정에 따라 Viete 정리를 이용하여 인수분해하였고, 이들 인수분해에 관련된 몇몇 특징들을 기술하였다.

참 고 문 헌

김응태 · 박승안 (2005). 현대대수학, 서울: 경문사.

신현용 (2006). 교사를 위한 현대대수학, 서울: 교우사.

Kolmogorov A. N. (1959). *O professii matematika.* Moskva: Izdat. Moskovskogo Universiteta.

Tumanov S. I. (1969). *Poiski resheniya zadachi.* Moskva: Prosveshenie.

A study on factorization of multi-variable polynomials using Viete's theorem

Lyou, Ikseung
Jeonbuk science highschool
E-mail: infgrp@hanmail.net

Shin, Hyunyong
Korea National University of Education
E-mail: shin@knue.ac.kr

Han, Inki
Gyeongsang National University
E-mail: inkiski@gsnu.ac.kr

In this paper we introduce a method of factorizing multi-variable polynomials using Viete's theorem and show some examples of factorizing multi-variable polynomials. We also discuss some aspects of this method.

* ZDM Classification : D54
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U99
* Key Words : Viete's theorem, multi-variable polynomials, factorization