

축차관측기를 사용한 슬라이딩 모드 제어

Reduced Order Observer Based Sliding Mode Control

최 한 호*
(Han Ho Choi)

Abstract : This paper presents an LMI-based method to design a reduced order observer based sliding mode controller for a class of uncertain systems. Using LMIs we derive an existence condition of a reduced order observer and a sliding mode control law. And we give explicit formulas of the gain matrices. Finally, we give a numerical design example, together with a design algorithm.

Keywords : Linear Matrix Inequality(LMI), observer, uncertain system, sliding mode

I. 서론

최근 여러 저자들에게 의하여 슬라이딩 모드 관측기 설계 방법이 제안되었다[1-4]. 그 가운데 [1]의 방법은 설계를 위해 기호연산(Symbolic manipulation)을 위한 소프트웨어를 요구하여 이득행렬을 구하기 어려운 단점을 지녔다. [2]와 [3]의 방법은 주어진 시스템을 canonical form으로 변환하기 위한 변환행렬을 구해야하고 이를 사용하여 주어진 시스템을 canonical form으로 변환해야 하므로 다소 복잡하고 간접적인 방법이다. 이를 고려하여 canonical form으로 변환해야 할 필요가 없는 슬라이딩 모드 관측기 설계방법이 [4]에 제시되었다. [4]에서는 LMI를 사용하여 안정한 슬라이딩 동작을 보장하는 슬라이딩 모드 관측기의 존재조건이 구해졌다. 그러나 [1-4]에서는 full order 관측기만 고려되었다. 이를 고려하여 본 논문에서는 축차관측기에 기반한 슬라이딩 모드 제어기 설계 문제를 고려한다. LMI를 사용하여 축차관측기와 슬라이딩 모드 제어기의 존재조건을 구하고 이득 행렬의 공식을 제시한다. 대상시스템이 [1-4]의 방법이 적용가능하면 본 논문에서 제안된 방법을 통해 보다 간단한 축차관측기에 기반한 슬라이딩 모드 제어기를 설계할 수 있음을 보였다. 결국 제시된 방법을 사용하면 [1-4]의 관측기를 사용할 때보다 낮은 차수의 제어기를 설계할 수 있어 보다 경제적이며 간단한 제어기 설계가 가능한 장점을 얻을 수 있다. 제시된 방법의 효용성을 보이기 위해 예제를 제어기 설계알고리즘과 함께 제시한다.

II. 대상 시스템과 예비 결과들

본 논문에서는 다음과 같은 동역학 방정식으로 표현 가능한 시스템을 다룬다[3].

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[u(t) + \xi(t)], \quad y(t) = Cx(t) \quad (1)$$

여기에서 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^p$ 로 각각 상태, 입력, 출력을 가리키며 다음을 만족시킨다고 가정한다.

A1: $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$ 로 상수들이다.

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2006. 4. 19., 채택확정 : 2006. 9. 5.

최한호 : 동국대학교 전기공학부(hhchoi@dongguk.edu)

A2: $\text{rank}(C) = p \geq m = \text{rank}(B)$

A3: 알려진 상수 ρ 에 대해 $\|\xi(t)\| \leq \rho$ 가 만족된다.

가정 A1, A2는 [1-4]에서도 쓰였음에 유의하라. [1-4]에서는 A3보다 더 일반적인 가정이 쓰였으나 여기에서는 해석을 간단히 하기 위해 우리는 불확실성이 상수에 의해 제한된다고 가정한다.

다음의 보조정리들은 제안된 방법을 유도하고 이와 비교를 위해 논술하는 것이다.

보조정리 1 [1]: 다음 형태의 full order 슬라이딩 모드 관측기를 고려하자.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - \hat{y}) + Bv, \quad \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (2)$$

여기에서 $L \in R^{n \times p}$ 로 설계해야 할 이득행렬이고 v 는 설계해야 할 비선형 벡터이다. 어떤 $m \times p$ 행렬 F 에 대하여 다음의 (3)과 (4)를 만족시키는 양한정 행렬 P 가 존재한다고 가정하자.

$$P(A - LC) + (A - LC)^T P < 0, \quad P > 0 \quad (3)$$

$$B^T P = FC \quad (4)$$

그러면 (2)의 full order 슬라이딩 모드 관측기를 사용하여 관측오차 벡터 $e = \hat{x} - x$ 를 시간이 무한대로 감에 따라 0으로 수렴하도록 할 수 있다.

보조정리 2 [4]: 아래의 LMI를 만족시키는 해(X, Y, K)가 존재한다고 가정하자.

$$\begin{aligned} (UXU + C^T YC)A - KC + * < 0, \\ UXU + C^T YC > 0, \quad X = X^T, Y = Y^T \end{aligned} \quad (5)$$

여기에서 *는 대칭성을 이용하여 유추될 수 있는 행렬 블록을 의미하고, $U = I - B(B^T B)^{-1} B^T$ 이다. 그러면 (2)의 full order 슬라이딩 모드 관측기를 사용하여 관측오차 벡터를 안정하게 할 수 있다.

보조정리 3: LMI (5)를 만족시키는 (X, Y, K)가 존재하면 (3)과 (4)를 만족시키는 (P, L, F)가 존재한다. 반대로 (3)과 (4)를 만족시키는 해가 존재하면 LMI (5)를 만족시키는 해

가 존재한다.

증명: [6]에 주어진 projection lemma에 의해 (3)과 (4)는 다음식과 동치임을 알 수 있다.

$$P > 0, \theta^T(PA + A^T P)\theta < 0, \theta^T P B = 0 \quad (6)$$

여기에서 $\theta \in R^{n \times (n-p)}$ 는 $C\theta = 0, \theta^T \theta = I$ 를 만족시키는 행렬이다. 그러므로 (5)와 (6)이 동치임을 증명하면 된다.

(\Rightarrow) (5)를 만족시키는 해가 존재한다고 하자. 이를 이용하여 $P = UXU + C^T Y C$ 로 설정하면 (6)이 만족됨을 쉽게 알 수 있다.

(\Leftarrow) (6)을 만족시키는 해가 존재한다고 하자. 그러면 [3]의 결과에 의해 다음과 같은 구조를 갖도록 하는 역행렬이 존재하는 변환행렬 T_c 가 존재한다.

$$C_c = C T_c^{-1} = [0, T_1, T_2], B_c = T_c B = [0, 0, B_0^T]^T$$

여기에서 $[T_1, T_2] \in R^{p \times p}$ 는 orthogonal한 행렬이며 $B_0 \in R^{m \times m}$ 는 역행렬이 존재한다. 결국 (6)은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$P_c > 0, \theta_c^T(P_c A_c + A_c^T P_c)\theta_c < 0, \theta_c^T P_c B_c = 0 \quad (7)$$

여기에서 $A_c = T_c A T_c^{-1}, \theta_c = T_c \theta = [\theta_1^T, 0, 0]^T, P_c = T_c^{-T} P T_c^{-1}$ 그리고 $\theta_1 \in R^{(n-p) \times p}$ 의 full rank 행렬이다. 이는 P_c 가 다음의 구조를 갖음을 의미한다.

$$P_c = C_c^T Y_c C_c + U_c X_c U_c$$

여기에서 $U_c = I - B_c(B_c^T B_c)^{-1} B_c^T$ 이고 X_c, Y_c 는 적절한 차원을 갖는 대칭행렬이다. 결국 (6)의 해 P 는 $P = UXU + C^T Y C$ 형태를 취함을 알 수 있다. 그리고 (6)에 의해 다음이 항상 성립한다.

$$\theta^T(UXUA + A^T UXU)\theta < 0, \quad UXU + C^T Y C > 0, X = X^T, Y = Y^T \quad (8)$$

[6]에 주어진 projection lemma에 의해 (5)는 (8)과 동치임을 알 수 있다. ■

보조정리 4: 아래의 LMI를 만족시키는 해 E 가 존재한다고 가정하자.

$$E > 0, \Phi^T(AE + EA^T)\Phi < 0 \quad (9)$$

여기에서 $\Phi \in R^{n \times (n-m)}$ 는 $\Phi^T B = 0, \Phi^T \Phi = I$ 를 만족시키는 행렬이다. 그러면 다음의 상태궤환 슬라이딩모드 제어기는 시스템 (1)을 안정화시킨다.

$$u = -\gamma Sx - (\rho + \varepsilon) \frac{Sx}{\|Sx\|}$$

여기에서 $S = B^T E^{-1}$ 이고 ρ 는 A3에 정의되었고 ε 은 임의의 양수이고 γ 는 다음을 만족시키는 양수이다.

$$\gamma > 0.5 \lambda_{\max} [B_g^T (W - W\Phi(\Phi^T W\Phi)^{-1} \Phi^T W) B_g], \quad (10)$$

$$W = AE + EA^T, B_g = B(B^T B)^{-1}$$

증명: 리아푸노프 함수를 $V = x^T E^{-1} x$ 로 놓고 도함수를 구하면 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq 2x^T E^{-1} Ax + 2\|Sx\| \|Sx\| + 2x^T S u \\ &\leq x^T E^{-1} (W - 2\gamma B B^T) E^{-1} x - 2\varepsilon \|Sx\| \end{aligned}$$

[7]에 주어진 Lemma 3를 이용하면 (10)을 만족시키는 γ 에 대해 $W - 2\gamma B B^T < 0$ 임을 알 수 있다. 결국 이는 폐회로 가변구조시스템의 안정을 의미한다. ■

III. 주요 결과

(8)을 만족시키는 해가 존재한다고 하자. 그리고 그 해를 이용하여 $P = UXU + C^T Y C$ 로 설정하고 다음과 같은 변환행렬과 그에 대응하는 벡터를 정의하자.

$$M = \begin{bmatrix} \theta^T P \\ C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix} = Mx = \begin{bmatrix} \theta^T P x \\ Cx \end{bmatrix}$$

이는 다음이 성립함을 의미한다.

$$\begin{aligned} M^{-1} &= [\theta(\theta^T P \theta)^{-1}, P^{-1} C^T (C P^{-1} C^T)^{-1}], \\ x &= \theta(\theta^T P \theta)^{-1} w + P^{-1} C^T (C P^{-1} C^T)^{-1} y \end{aligned}$$

이들을 이용하여 시스템 (1)을 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{w} &= A_{11} w + A_{12} y \\ \dot{y} &= A_{21} w + A_{22} y + CB[u + \xi] \end{aligned} \quad (11)$$

여기에서 행렬 A_{ij} 는 다음처럼 주어진다.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \theta^T P A \theta (\theta^T P \theta)^{-1} \\ A_{12} &= \theta^T P A P^{-1} C^T (C P^{-1} C^T)^{-1} \\ A_{21} &= C A \theta (\theta^T P \theta)^{-1} \\ A_{22} &= C A P^{-1} C^T (C P^{-1} C^T)^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

그리고 다음을 만족시키는 $p \times (p-m)$ 차원의 행렬 Λ 를 정의하자.

$$\Lambda^T \Lambda = I, \Lambda^T C B = 0 \quad (\text{if } p = m, \Lambda = 0) \quad (13)$$

(8)의 해가 존재하면 다음을 만족시키는 (X, Y, I) 가 항상 존재한다.

$$\begin{aligned} \theta^T U X U A \theta - \Gamma \Lambda^T C A \theta - * &< 0, \\ U X U + C^T Y C &> 0, X = X^T, Y = Y^T \end{aligned} \quad (14)$$

(14)의 해를 이용하여 다음과 같은 변환행렬들과 벡터를 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} N &= [N_1, N_2], N^{-1} = \begin{bmatrix} \theta^T P - \Gamma \Lambda^T C \\ C \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} &= N^{-1} x = \begin{bmatrix} \theta^T P x - \Gamma \Lambda^T C x \\ C x \end{bmatrix}, x = N_1 z + N_2 y \end{aligned} \quad (15)$$

여기에서 $N_1 \in R^{n \times (n-p)}, N_2 \in R^{n \times p}$ 는 N^{-1} 를 구하고 이의 역행렬을 구해 계산하거나 다음을 풀어 쉽게 구할 수

있다.

$$N_1 \theta^T P - N_1 \Gamma A^T C + N_2 C = I \quad (16)$$

결국 (11)과 (15)를 사용하여 다음을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \overline{A}_{11} z + \overline{A}_{12} y \\ \dot{y} &= A_{21} z + (A_{22} + A_{21} \Gamma A^T) y + CB[u + \xi] \end{aligned} \quad (17)$$

여기에서 \overline{A}_{11} , \overline{A}_{12} 는 다음처럼 주어진다.

$$\begin{aligned} \overline{A}_{11} &= A_{11} - \Gamma A^T A_{21}, \\ \overline{A}_{12} &= A_{12} - \Gamma A^T A_{22} + \overline{A}_{11} \Gamma A^T \end{aligned} \quad (18)$$

(14)와 $P = UXU + C^T Y C$ 에 의해 다음의 리아푸노프 부등식이 항상 성립됨을 알 수 있다.

$$\overline{A}_{11} P_0 + P_0 \overline{A}_{11}^T < 0, \quad P_0 = \theta^T P \theta > 0 \quad (19)$$

이는 \overline{A}_{11} 이 안정한 행렬임을 의미한다. 다음과 같은 $(n-p)$ 차의 추차관측기를 고려해보자.

$$\dot{\hat{z}} = \overline{A}_{11} \hat{z} + \overline{A}_{12} y, \quad \hat{x} = N_1 \hat{z} + N_2 y \quad (20)$$

그러면 오차벡터는 다음의 동역학을 따를 것이다.

$$\dot{\tilde{z}} = \overline{A}_{11} \tilde{z}, \quad e = N_1 \tilde{z} = N_1 (\hat{z} - z) \quad (21)$$

(19)에 의해 오차동역학 (21)은 exponentially 안정하다. 결국 보조정리 4와 위의 해석 그리고 [1]에서 언급된 separation principle을 참조하여 다음의 정리를 얻을 수 있다.

정리 1: 시스템 (1)을 고려하자. LMI (9)를 만족시키는 해 E 그리고 LMI (14)를 만족시키는 해 (X, Y, Γ) 가 존재한다고 가정하자. 추차 관측기 (20)의 행렬 \overline{A}_{11} , \overline{A}_{12} 가 (18)과 같이 주어진다고 가정하자. 그리고 다음처럼 추차관측기를 사용한 슬라이딩모드 제어기가 사용된다고 가정하자.

$$u = -\gamma S \hat{x} - (\rho + \varepsilon) \frac{S \hat{x}}{\|S \hat{x}\|} \quad (22)$$

여기에서 $S = B^T E^{-1}$ 이고 ρ 는 A3에 정의되었고 ε 은 임의의 양수이고 γ 는 (10)을 만족시키는 양수이다. 그러면 전체 제어시스템은 안정하다.

주 1: 보조정리 3에 의해 (3)과 (4)는 LMI (5)와 동치임이 밝혀졌다. 이는 [1]의 방법이 적용가능하면 [4]를 적용할 수 있음을 의미한다. 또한 보조정리 3의 증명과정을 참조하면 [2]와 [3]에 주어진 슬라이딩 모드 관측기의 존재 조건이 만족되면 LMI (5)의 해가 존재함을 알 수 있다. (5)는 (8)과 동치이고 (8)의 해가 존재하면 LMI (12)의 해가 존재하므로 결국 우리는 [14]의 방법이 적용 가능하면 (20)의 $(n-p)$ 차 추차관측기를 설계하여 [14]에 의한 n 차 full order 관측기를 대체할 수 있음을 알 수 있다.

주 2: [6]을 참조하면 LMI (9)는 (A, B) 쌍이 안정가능

하기만 하면 해 E 가 존재함을 알 수 있다. 그리고 [2-3]과 정적 출력궤환 슬라이딩모드제어기 설계방법[8]을 참조하면 $FC(sI - A + LC)^{-1}B$ 를 최소위상으로 만드는 행렬 F, L 이 존재하고 가정 A2가 성립하고 $\text{rank}(CB) = m$ 이면 LMI (14)의 해가 존재함을 알 수 있다.

주 3: (8)을 만족시키는 해 (X^*, Y^*) 가 주어졌을 때 임의의 $\Pi \geq 0$ 에 대하여 $X = X^*, Y = Y^*$ 그리고 $\Gamma = \theta^T A^T C^T \Pi$ 는 LMI (14)를 만족시킴을 알 수 있다. 즉 (14)의 해는 (8)을 풀어 X, Y 를 구하고 Γ 는 $\Gamma = \theta^T A^T C^T \Pi$, $\Pi \geq 0$ 를 이용해서 구할 수 있다.

주 4: 논술된 결과들은 다음의 설계 알고리즘의 형태로 정리될 수 있다. ① θ, Φ, Λ, U 를 구한다. ② LMI (9)와 (14)의 해를 찾는다. ③ 구해진 해를 이용해 $P = UXU + C^T Y C$ 로 하여 (12), (16), (18)의 공식으로부터 추차관측기 (20)을 얻는다. ④ $S = B^T E^{-1}$ 로 하고 (10)을 이용해 γ 를 구하고 제어기 (22)를 얻는다.

IV. 수치적 예

(1)은 5000피트에서의 F4E 팬텀 전투기 동역학 모델을 표현할 수 있다. 데이터는 다음과 같다[9].

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -0.990 & 17.410 & 96.150 \\ 0.265 & -0.851 & -11.390 \\ 0 & 0 & -30.000 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} -97.780 \\ 0 \\ 30.000 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

초기값은 $x(0) = [0, 5, 0]^T$ 이고 $\xi(t) = \sin 2\pi t$ 이라고 가정하였다. 그러므로 $\rho = 1$ 로 할 수 있겠다. 주 4에 주어진 설계알고리즘에 따라 다음과 같은 제어기와 1차의 추차 관측기를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= -2.412 \hat{z} + [34.29, 399.8]y, \\ \hat{x} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.014 \end{bmatrix} \hat{z} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -0.307 & -0.168 \end{bmatrix} y \\ u &= -12.3S \hat{x} - 1.01 \frac{S \hat{x}}{\|S \hat{x}\|} \end{aligned} \quad (24)$$

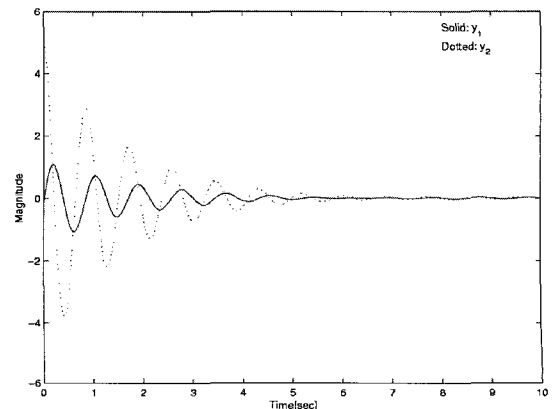


그림 1. 출력 궤적.

Fig. 1. Output trajectories.

여기에서 $S = [-1.123, 0.035, 0.487]$ 이다. 시뮬레이션 시에 $\hat{x}(0) = 0$ 로 했다. 그리고 채터링 현상을 줄이기 위하여 제어기 입력의 불연속적 벡터 $S\hat{x}/\|S\hat{x}\|$ 는 $S\hat{x}/(\|S\hat{x}\| + 0.01)$ 로 대체하였다. 그림 1은 출력결과를 보여주고 있다. 만약 [1-4]의 방법을 사용했다면 3차의 full order 슬라이딩 모드 관측기가 사용되었어야 했을 것이다.

V. 결론

본 논문에서 불확실성을 갖는 다변수 시스템을 위한 출력관측기를 이용한 슬라이딩모드 제어기 설계 문제가 고려됐다. 관측기와 제어기가 존재할 조건을 LMI 형태로 제시하였고 LMI 존재 조건의 해를 이용하여 관측기와 제어기 이득의 공식을 유도하였다. 본 논문의 결과를 이용하면 [1-4]의 방법들에 비해 경제적이며 간단한 제어기 설계가 가능한 장점을 얻을 수 있다. 그리고 제안된 방법은 LMI에 기반을 두었기 때문에 LMI로 표현 가능한 성능지수들을 설계할 때 고려해 넣을 수 있는 융통성을 제공한다[6].

참고문헌

- [1] B. L. Walcott and S. H. Zak, "Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications," *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 18, no. 1, pp. 88-104, 1988.
- [2] C. Edwards and S. K. Spurgeon, "On the development of discontinuous observers," *Int. J. Control*, vol. 59, pp. 1211-1229, 1994.
- [3] C. P. Tan and C. Edwards, "An LMI approach for designing sliding mode observers," *Int. J. Contr.* vol. 74, no. 16, pp. 1559-1568, 2001.
- [4] 최한호, "슬라이딩 모드 관측기 설계를 위한 선형행렬 부등식 접근법," 제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지, 제11권, 제1호, pp. 9-12, 2005
- [5] P. Gahinet, A. Nemirovski, and A. J. Laub, "LMI Control Toolbox User's Guide," *Natic, MA: The Math-Works Inc.*, 1995.
- [6] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in system and Control Theory," *Philadelphia, SIAM*, 1994.
- [7] T. Iwasaki and R. E. Skelton, "All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence condition and state space formulas," *Automatica*, vol. 30, pp. 1307-1317, 1994.
- [8] S. H. Zak and S. Hui "On variable structure output feedback controllers for uncertain dynamic systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, no. 10, pp. 1509-1512, 1993.
- [9] U. Shaked, "An LPD approach to robust H_2 and H_∞ static output-feedback design," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 48, pp. 866-872, 2003.



최한호

1966년 8월 25일생. 1988년 2월 서울대학교 제어계측공학과(공학사). 1990년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사). 1994년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학박사). 2003년 3월~현재 동국대학교 전기

공학과 교수. 관심분야는 가변구조제어이론, 마이콤 기반 제어, 가상현실 및 로봇틱스.