대한수학교육학회지 <학교수학> 제 8 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.8, No.3, 265-290. Sep. 2006

엑셀의 활용이 일차함수 문제해결에 미치는 효과

이 광 상*·조 민 식**·류 희 찬***

본 연구의 목적은 엑셀의 활용이 일차함수의 문제해결에 어떤 영향을 미치는가를 알아보는데 있다. 엑셀을 활용한 교수실험 전과 후에 학생들의 함수에 관한 문제해결에서의 변화를 알아보기 위해 사전·사후 문제해결검사를 실시하였다. 문제해결검사 분석은 정확한 과정-대상관점, 근접한 과정-대상관점, 부정확한 과정-대상관점으로 범주화해 이루어졌다. 문제해결검사 분석 결과 , 교수실험에 참여한 학생들 모두 일차함수에 관한 문제해결관점이 바람직한 방향으로 변화되었다. 엑셀을 활용한 탐구학습환경이 지필환경의 제한점을 보완할 수 있다는 시사점을 도출하였다.

Ⅰ. 서 론

학교수학에서 함수적 사고는 학생들이 미래 사회의 일원으로서 살아가는 데 그 소양으로 필요한 경우가 많으므로, 함수에 관한 학습은 큰 의의를 가질 뿐만 아니라, 수학의 여러 가지 분야에서 중요한 역할을 하게 됨을 강조하고 있다. 이러한 중요성에 맞추어 학생들의 함수에 대한 이해를 증진시키기 위해 제 7차 교육과정에서는 실생활과 관련된 비례관계를 이용하여 변화하는 양을 나타내는 변수 x, y의 관계를 다룬 후에 함수를 정의하고 있다. 제 6차교육과정에서 집합의 대응관계로 함수를 정의했던 정적인 정의구조를 탈피해 독립변수와 종속변수 사이의 역동적인 관계로 함수를 정의하고 있는 것이다.

하지만, 함수의 정의를 비례관계를 통해 역동적으로 도입했음에도 불구하고 학생들은 여전히 함수를 어려워하고 있다. 그 이유 중 하나는 함수의 표상을 다양하게, 역동적으로 탐구할 수 있는 학습기회의 부족으로 함수의 개념 형성에 어려움을 겪기 때문이다. 이러한 탐구학습 기회의 부족은 학생들이 일차함수 $y=ax+b$에서 매개변수 a와 b가 독립적이라는 것을 이해하지 못하고 어떤 특정한 상수로 생각하게 할 수 있다(Moschkovich et al.,1993, p.75). 따라서, 학생들은 일차함수 $y=ax+b$에서 매개변수 a와 b의 역할을 이해하지 못한 채 기울기는 a이고 y절편은 b라고 기계적으로 암기할 수밖에 없다. 학생들이 이러한 오류를 범하지 않도록 하기 위해서는 $y=ax+b$의 그래프를 a와 b의 값의 변화에 따라 표와 그래프가 어떻게 변화하는지 직접 탐구하는 학습환경을 조성할 필요가 있다.

Moschkovich et al.(1993)은 함수개념을 이해

* 서산농공업고등학교(damchan@hanmail.net)
** 한국교원대학교(mscho@knue.ac.kr)
*** 한국교원대학교(hclew@knue.ac.kr)

하는 관점을 과정관점과 대상관점으로 분류하면서 함수 개념의 과정-대상관점은 함수의 표상인 대수식, 표, 그래프와 연결되어 있다고 주장하였다. 첫째, 과정 관점에서 함수는 x값과 y값을 연결하는 것으로 인식되고, 둘째, 대상관점에서는 함수의 개념과 함수의 세 가지 표상인 대수식, 표, 그래프를 전체(entities)로 인식하는 것으로 규정하였다. 예를 들어 "점 (1, 4)를 지나고 $y=2x-5$에 평행한 직선의 방정식을 구하라."는 문제를 해결할 때, 일반적인 직선의 방정식 $y=ax+b$를 이용하여 구할 것이다. $y=2x-5$의 그래프와 평행이라는 조건을 활용하여 a의 값이 2라고 결정하는 것이 대상관점에 해당되고, 점(1, 4)를 $y=2x+b$의 식에 대입하여 b의 값 2를 구하는 절차가 과정관점에 해당된다. 즉, 두 가지 관점으로 $y=2x+2$의 식을 구할 수 있다. 이와같이 일차함수의 문제해결에서 과정-대상관점의 형성은 매우 중요하다.

그런데, 지필환경에서는 일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서 a와 b의 역할을 다양하게 탐구할 수 있는 기회의 제한으로 $y=ax+b$ 그래프의 성질을 대상관점으로 이해하는 데 어려움을 겪을 수 있다. 이 같은 지필 교육과정의 한계점을 극복하기 위해서는 교과서 이외의 다양한 학습매체의 활용이 필요하다. 그 중 스프레드시트의 한 종류인 엑셀은 다양한 정보를 표와 그래프로 조직하고 처리하는 데 매우 효율적이기 때문에 수학적인 개념과 패턴을 발견할 수 있으며, 수학과 다른 과목을 통합하는 모델링 활동에 널리 활용되고 있다(류희찬, 2004).

Garay(2001)는 스프레드시트를 활용한 다중 표상을 사용한 실험연구에서 스프레드시트의 사용은 일차함수에 대한 학업성취도를 향상시켰고, 수학에 대한 긍정적인 태도가 형성되었다는 연구결과를 발표하였다. Wilson et al. (2004)은 중등과정의 1학년 학생들을 대상으로 실시한 스프레드시트 기반의 교수 프로그램과 면담에서 얻은 자료로부터 스프레드시트 환경이 학생들의 수학적 일반화(generalization)의 형성을 지원한다고 주장하였다.

우리나라에서는 엑셀의 그래픽 기능과 계산 기능을 이용한 함수나 통계 지도, 변수개념 이해, 수학적 모델링에 대한 연구들이 활발히 이루어지고 있으나, 엑셀의 동적인 기능을 활용한 함수의 과정-대상관점 형성에 대한 연구는 이루어지고 있지 않다.

이에 본 연구에서는 중학교 2학년을 대상으로 엑셀을 통한 교수실험을 실시하여 학생들의 문제해결의 변화를 과정-대상관점으로 분석하고자 한다. 이러한 분석을 통하여 지필교육과정을 보완할 수 있는 엑셀의 탐구학습 활용 방안을 모색하는 것이 본 연구의 목적이라 할 수 있다.

II. 일차함수의 과정-대상관점과 엑셀의 활용

1. 함수의 과정-대상관점과 문제해결

Moschkovich et al.(1993)은 함수 개념의 과정-대상관점은 함수의 표상인 대수식, 표, 그래프와 연결되어 있다고 주장했다. 그들은 과정-대상관점과 함수의 표상을 융통성 있게 연결할 수 있는 틀을 제시했는데, 그 틀은 하나의 관점 내에서 표상들 사이를 이동할 수 있고, 하나의 표상 내에서 과정-대상관점 사이를 이동할 수 있다는 것을 보여준다. 이 틀을 도식화하면 [그림 II-1]과 같다. 이 틀에 의하면, 함수의 문제유형에 따라 과정-대상관점과 대수식,

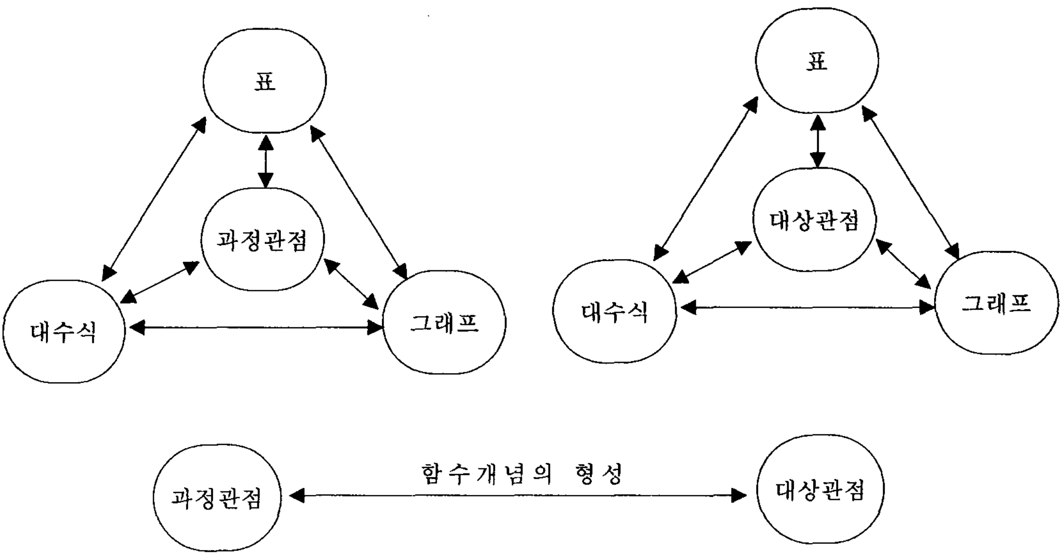
표, 그래프가 서로 연결되어 있고, 세 가지 함수의 표상의 조작은 과정-대상관점 형성에 영향을 줄 수 있음을 보여준다.

함수의 과정관점에서 주목해야 할 것은 함수의 두 변수 x값과 y값 사이의 관계를 파악하는 것이다. x값과 y값 사이의 관계는 대수식이나 그래프와 표에서 나타날 수 있다. 과정관점에서는 일차함수의 대수식에서 x, y의 값과 그들 사이의 관계 또는 그래프를 이루는 좌표평면의 점들에 초점을 둔다. 예를 들어, "일차함수 $y=-3x+5$에 대하여 $x=3$일 때 y의 값을 구하라."는 문제가 제시되었을 때, 학생들은 과정관점에서 주어진 식에 $x=3$을 대입해 y의 값을 구할 수 있다.

대상관점이란 함수의 표상(대수식, 그래프, 표)을 전체(대상)로 인식할 수 있는 것을 말한다. 예를 들면, "(0, 4)를 지나는 직선들은 무수히 많다. 이 직선들을 모두 포함하는 방정식을 구해보아라."는 문제가 제시되었을 때, 이 문제는 대상관점으로 해결해야 한다. 위의 문제에서 고려해야 할 사항은 일차함수 $y=ax+b$ 식에서 기울기 a와 y절편 b이다. 함수의 그래프가 모두 (0, 4)를 지나므로 y의 절편은 4로 일정하고 기울기는 변한다고 볼 수 있다. 그러나, (0, 4)를 지나는 그래프들을 일차함수 $y=ax+4$의 유형으로 생각할 수 있는 대상관점이 없다면, $y=x+4$ 또는 $y=4$ 등의 하나의 식으로 나타낼 수밖에 없을 것이다. 학생들이 기울기와 y절편의 관계를 심상에 형성하려면 일차함수 $y=ax+b$ 식에서 a와 b의 값의 변화에 따른 표와 식, 그래프를 다양하게 탐구할 수 있는 기회가 제공되어야 한다.

2. 엑셀을 활용한 일차함수 $y=ax(a\neq0)$ 의 그래프 탐구

$y=ax(a\neq0)$의 그래프 탐구에서는 매개변수 a의 역할을 이해하는 것이 중요하다. 즉, a의 값 대신 다양한 수를 대입하면서 식과 표와 그래프의 관계를 역동적으로 학습할 수 있는 기



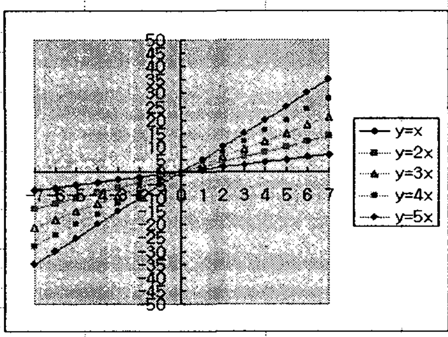
[그림 II-1] 함수의 과정-대상관점과 표상간의 연결 모델

회가 필요하다. 엑셀을 활용하여 $y=ax(a\neq0)$의 그래프를 탐구한다면 다음과 같은 절차로 효과적인 학습을 할 수 있다. 우선 학생들이 엑셀을 활용해 $y=ax(a\neq0)$의 그래프에서 a의 값이 양인 몇 개의 수를 적용해 표와 그래프를 탐구할 기회를 제공한다. 아래의 [그림 Ⅱ-2]는 엑셀을 활용해 $y=x$, $y=2x$, $y=3x$ $y=4x$, $y=5x$의 표와 그래프를 구현한 것이다.

학생들은 탐구활동을 통해 일차함수 $y=x$, $y=2x$, $y=3x$, $y=4x$, $y=5x$의 그래프는 제1사분면과 3사분면을 지난다는 것을 직관적으로 파악하고, x, y값의 증가량을 비교해보면서 정비례 관계라는 것을 이해할 수 있다. 마찬가지 방법으로 $y=ax(a\neq0)$의 그래프에서 a의 값이 음인 몇 개의 수를 적용해 표와 그래프를 탐구하면서 학생들은 a의 값이 음수이면 제2사분면과 4사분면을 지나고 a의 절대값이 클수록 y축에 가까워진다(x축과 멀어진다)는 사실을 각 그래프들을 비교하면서 쉽게 파악할 수 있다.

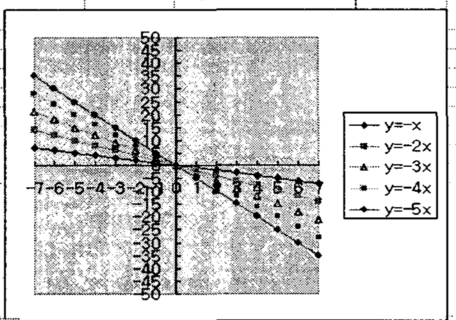
$y=ax(a\neq0)$ 그래프에서 a의 값이 양과 음일 때의 몇 개의 수를 적용해서 표와 그래프의 특징을 탐구한 다음에는 a의 값을 다양하게 적용하면서 표와 그래프의 변화를 관찰할 필요가 있다. 엑셀환경에서는 스핀버튼을 활용해 a의 값에 따른 표와 그래프의 변화를 역동적으

x	y=x	y=2x	y=3x	y=4x	y=5x
-7	-7	-14	-21	-28	-35
-6	-6	-12	-18	-24	-30
-5	-5	-10	-15	-20	-25
-4	-4	-8	-12	-16	-20
-3	-3	-6	-9	-12	-15
-2	-2	-4	-6	-8	-10
-1	-1	-2	-3	-4	-5
0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25
6	6	12	18	24	30
7	7	14	21	28	35



[그림 Ⅱ-2] 일차함수 $y=x$, $y=2x$, $y=3x$, $y=4x$, $y=5x$의 그래프

x	y=-x	y=-2x	y=-3x	y=-4x	y=-5x
-7	7	14	21	28	35
-6	6	12	18	24	30
-5	5	10	15	20	25
-4	4	8	12	16	20
-3	3	6	9	12	15
-2	2	4	6	8	10
-1	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0
1	-1	-2	-3	-4	-5
2	-2	-4	-6	-8	-10
3	-3	-6	-9	-12	-15
4	-4	-8	-12	-16	-20
5	-5	-10	-15	-20	-25
6	-6	-12	-18	-24	-30
7	-7	-14	-21	-28	-35

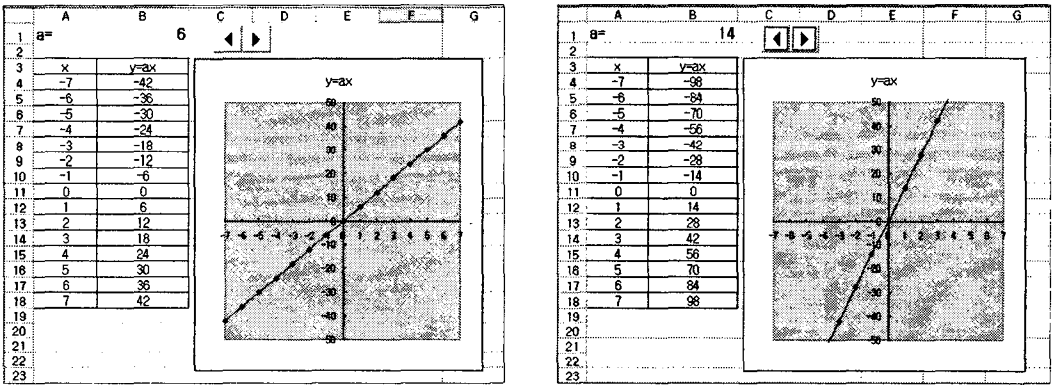


[그림 Ⅱ-3] 일차함수 $y=-x$, $y=-2x$, $y=-3x$, $y=-4x$, $y=-5x$의 그래프

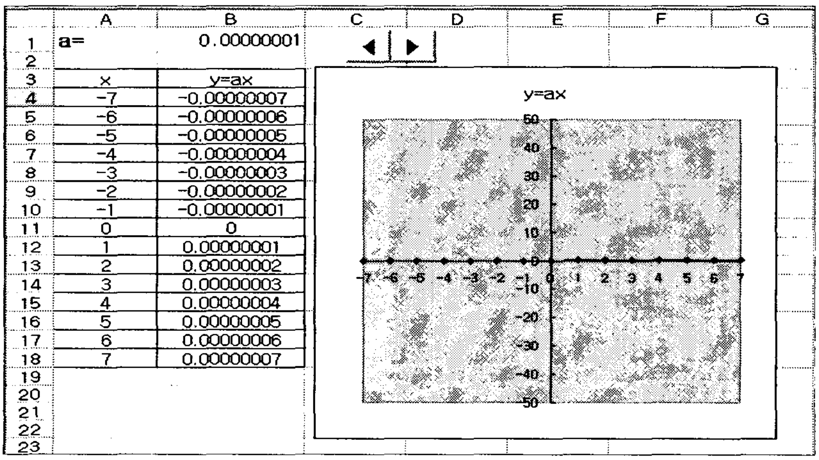
로 탐구할 수 있는 장점을 갖고 있다. [그림 II-4]는 B1의 값을 스핀버튼 ◀▶ 을 조작함으로써 표와 그래프의 변화를 관찰하는 내용이다.

이와 같이 식과 표와 그래프를 통합적으로 관찰하고 탐구할 수 있는 기회의 제공은 학생들이 $y=ax(a\neq0)$그래프의 일반적인 성질을 이해하는데 도움을 주고, $y=ax(a\neq0)$의 그래프를 전체적으로 인식하는 대상관점으로의 사고를 가능하게 할 수 있다. [그림 II-5]는 엑셀을 활용해 일차함수 $y=0.00000001x$의 표와 그래프를 탐구하는 내용이다.

교과서에서 $y=ax(a\neq0)$ 그래프의 성질을 다룰 때, a값 대신에 제한된 전형적인 몇 개의 숫자(1, 2, −1, −2)를 대입해 그래프를 그리고, 이어서 $y=ax(a\neq0)$그래프의 성질을 일반화시킨다. 하지만, 위의 그림과 같은 탐구활동내용은 a값을 다양하게 조작하면서 표와 그래프의 변화를 관찰할 수 있음을 시사한다. 즉, a값을 상당히 작게 하면서 "그래프의 모양이 어떻게 될까?"라는 'what if'전략을 사용할 수 있다. 따라서, 학생들은 교과서에서 경험해보지 못한 아주 작은 수를 통해 a값이 0에 가까워지면 그래프는 x축에 가까워진다는 사실을 직관적



[그림 II-4] 스핀버튼을 활용한 $y=ax(a\neq0)$의 그래프 탐구



[그림 II-5] $y=0.00000001$의 표와 그래프

으로 확인할 수 있다.

정리하면, 엑셀 탐구활동은 학생들이 $y=ax$ $(a\neq0)$의 그래프의 성질에서 매개변수 a의 역할과 의미를 파악하는 데 도움을 줄뿐만 아니라 $y=ax(a\neq0)$의 그래프의 일반적인 성질을 대상화하는 데 도움을 줄 수 있다.

III. 연구 방법

1. 연구 방법 및 대상

본 연구에서는 엑셀의 활용이 중학교 2학년 학생들의 일차함수의 문제해결에 어떠한 영향을 미치는가를 알아보았다. 이를 위해 질적 사례연구 방법을 택하였다. 사례연구를 택한 이유는 사례연구가 상황, 과정, 사람, 연구의 초점에 따라 다양하게 적용할 수 있으며, 결과보다는 과정에, 특정 변수보다는 전체의 연관성에, 확증보다는 발견에 관심을 두고 있기 때문에 교육문제에 관련된 연구에 적합(Macmillan & Schumacher, 1993; Merriam, 1988, 허미화(역), 1994, 재인용)하기 때문이다.

본 연구를 위해 충남 서산시에 소재한 A중학교 2학년 학생 5명을 연구대상으로 하여 교수실험을 실시하였다. 연구에 참여한 학생들은 수학교과 담임교사의 추천을 받은 학생 중에서 연구에 참여하기를 희망하는 학생들로 구성되었다. 교수실험이 동계방학 중 오후에 실시되었기 때문에 오후 일정이 자유로운 학생, 가정에 컴퓨터가 있고 컴퓨터를 어느 정도 사용할 수 있는 학생을 대상으로 선정하였다. 학생들의 수학에 대한 학업성취도는 상 수준인 학생이 2명, 중 수준인 학생이 2명, 하 수준에 해당하는 학생이 1명이다. 5명의 학생 중 두 명은 남학생, 세 명은 여학생이다. 이 학생들은 초등학교 때 엑셀의 기초적인 내용을 배운 적이 있지만, 함수와 관련하여 표를 만들고 그래프를 그린 경험은 없었다. 다음은 학생들의 함수에 관한 기본적 지식을 면담을 기초로 정리한 것이다.

인경은 함수단원의 학습에 대한 기본적인 지식이 부족하였다. 예를 들면, "함수의 정의가 무엇인지, 변수가 무엇인지 말해보겠니?"라는 질문에 '함수란 단지 x, y값을 구하는 것'이라 답변하였고, 함수를 배울 때 그래프 그리는 것이 어렵다고 답하였다.

석민은 함수의 정의에 대해 '한 값에 따라 다른 값이 달라지는 것'이라고 대답하였다. "변수란 무엇인가?"의 질문에 '함수를 변화시킬 수 있는 것'이라고 답을 했지만, 변수를 어떻게 나타내는 지는 확실히 모르고 있었다. "함수식에서 x, y는 무엇을 뜻하는 것이지?"라는 질문에 '미지수'라고 답하였다.

선애는 "함수의 정의가 무엇이지?"라는 질문에 답변을 못해, 연구자가 "함수하면 떠오르는 것은 무엇이지?"라고 다시 질문했을 때 '방정식'이라고 대답하였다. 또한, 변수가 무엇인지에 대해 잘 모른다고 대답했고, "함수의 식 $y=ax+b$에서 x, y를 무엇이라고 하는가?"의 질문에 '미지수?'라고 답변하였다.

영훈이는 '함수의 정의'에 대한 연구자의 질문에 "말 그대로 공식이랑 나와 있는 문제가 원하는 값을 대입해서 푸는 것."이라고 답변하였다. "변수가 무엇이지?" 라는 물음에 '기울기와 y절편'이라 답하고, "$y=ax+b$의 식에서 x, y를 무엇이라 생각하는가?"에 대한 질문에 '미지수'라고 대답하는 것으로 보아 이 학생도 변수의 의미를 제대로 이해하지 못하고 있었다.

지혜는 '함수의 정의'가 무엇인지에 대한 질문에도 다른 학생과는 달리 "x값에 따라 y의

값이 오직 하나 나오는 것이므로 x값에 대응하는 y값을 구하는 것이다."라고 답한 것으로 보아 함수의 정의를 분명히 이해하고 있었다. " 변수를 무엇이라 생각하는가?"에 대한 질문에는 'x에 관한 어떠한 식에서 조건에 따라 변하는 수'라고 답을 했고, 변수와 상수, 미지수의 관계도 분명하게 파악하고 있었다. 하지만, "함수단원 학습에서 식을 그래프로 나타낼 때, 그래프를 보고 어떤 식을 구할 때가 어렵다."고 말하였다.

2. 연구 절차

가. 교수 실험

본 연구의 목적을 위해, 5명의 학생이 7차시에 걸쳐 엑셀을 활용한 교수실험에 참여하였다. 교수실험에 참여한 지도교사는 현재 교육경력이 13년인 남자 교사로서, 중학교에서 수학을 가르치고 있으며 엑셀을 활용해 함수단원을 지도한 경험은 없지만 기본적인 엑셀 조작은 가능하였다. 연구에 참여한 5명의 학생은 개인별로 탐구활동을 했으며, 지도교사는 학생들의 활동 과정에서 학습조력자로서 활동하였고, 연구자는 관찰자와 참여자로서 활동하였다.

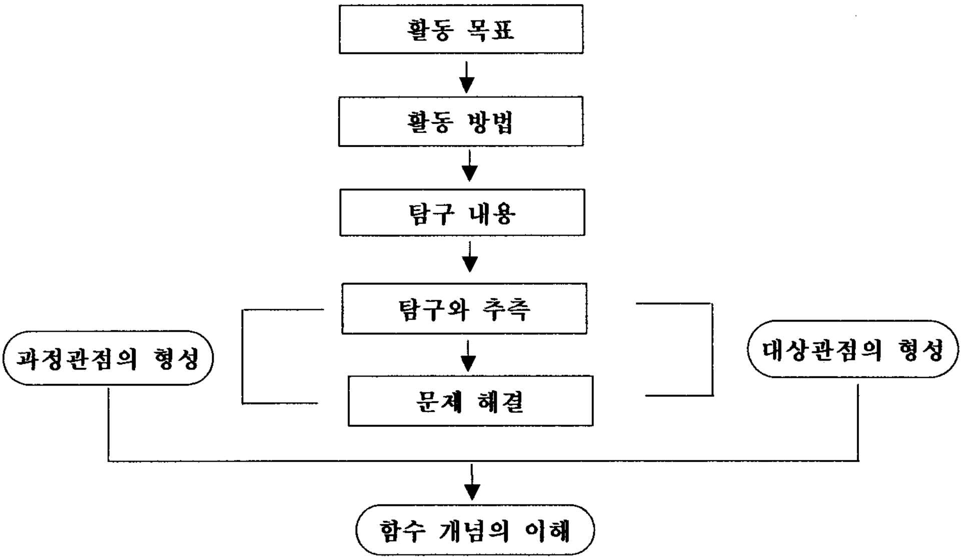
교수실험에는 지도교사, 연구자, 학생 5명이 항상 참여하였고, 학생 5명에게 노트북이 각각 한 대씩 주어졌다. 비디오카메라를 설치하여 지도교사의 교수 내용과 학생들의 제스처 등에 초점을 두고 녹화하였으며, 책상 위에는 녹음기를 두어 언어적 의사소통에 초점을 두고 녹음하였다. 교수실험을 진행하기 전에 학생들의 함수에 관한 사전지식 정도를 파악하기 위해 사전 문제해결 검사와 면담을 실시하였다. 또한, 학생들은 교수실험을 하기 전에 엑셀의 계산기능, 표 그리기, 그래프 그리기 등의 기본적인 기능을 익혔다.

엑셀 활동지는 제7차 교육과정의 7-가, 8-가 함수단원 내용을 기초로 전문가와의 협의를 거쳐 구성하였다. 교수실험 주제는 엑셀기능 익히기, Starburst 만들기[1], $y=ax$ 그래프 탐구, $y=ax+b$ 그래프 탐구, 기울기 탐구, $x=p$와 $y=q$ 그래프 탐구, 그래프와 연립방정식의 해, 일차함수의 활용으로 구성하였다.

교수실험의 일반적인 진행과정은 다음과 같다. 지도교사는 매 차시마다 학습에 관련된 기본적인 엑셀 기능에 대해 설명하고 학생들의 수행정도를 점검하였다. 학생들이 엑셀의 사용 또는 문제해결의 어려움에 부딪혔을 때, 지도교사 또는 연구자가 약간의 힌트를 제공함으로써 학생 스스로 해결할 수 있도록 유도하였다. 또한 연구자는 지도교사와 학생들의 행동을 관찰하면서 특징적인 장면을 필드노트에 기록하고, 학생들이 도움을 청할 때는 참여자로서 조언해 주었다. 엑셀 활동지는 학생들이 함수관련 문제를 해결할 때 과정-대상관점을 효과적으로 연결할 수 있도록 탐구와 추측, 문제해결 순으로 구성하였다. 학생들은 활동이 끝난 후 엑셀 활동지에 탐구내용을 기록하여 연구자에게 제출하고, 매 차시 교수실험이 끝나면 학생들이 활동하면서 발견한 사실들, 인지적인 갈등을 파악하기 위해 활동내용을 중심으로 개별면담을 하였다. 7차시의 교수실험이 끝난 후에는 함수에 관한 문제해결관점이 어떻게 변화했는지 알아보기 위해 사후 문제해결검사를 했다. 교수실험 연구 일정 및 활동지의 구성 내용을 정리하면 <표 Ⅲ-1>, [그림 Ⅲ-1]과 같다.

---

1) Starburst는 Moschkovich et al.(1993, p.89)이 제시한 것으로 $y=ax(a\neq0)$의 그래프의 유형을 탐구하는 과제이다. 본 연구에서의 Starburst 만들기는 학생들이 원점을 지나는 18개의 그래프를 엑셀을 활용해 만드는 것을 말한다.



[그림 Ⅲ-1] 엑셀을 활용한 활동지의 구성

<표 Ⅲ-1> 연구 일정 및 내용

순서	주 제	학습 내용
1	▸사전 검사	• 사전 검사 - 문제해결 검사 - 사전 면담
2	▸엑셀 프로그램 사용법	• 표 작성 요령 • 그래프를 나타내는 방법 • 기타 다양한 엑셀 기능 활용 방법
3	▸Starburst 활동	• Starburst 활동을 통해 일차함수 그래프의 성질 파악하기
4	▸ $y=ax$의 그래프 탐구	• $y=ax(a\neq 0)$의 그래프를 다양하게 나타내기 • 매개변수 a와 그래프의 관계 이해하기
5	▸ $y=ax+b$ 그래프 탐구	• $y=ax+b(a\neq 0)$의 그래프를 다양하게 나타내기 • 매개변수 a, b와 그래프의 관계 이해하기
6	▸일차함수의 기울기 탐구	• 일차함수의 표, 그래프, 식의 관찰에서 기울기와 a의 관계 이해하기
7	▸ $x=p, y=q$ 그래프 탐구	• $x=p$ 그래프의 성질 탐구 • $y=q$ 그래프의 성질 탐구
8	▸그래프와 연립방정식의 해의 관계 탐구	• 두 일차함수의 그래프를 통해 연립방정식의 해를 구하고, 그 관계 이해하기
9	▸일차함수의 활용	• 일차함수 활용문제를 엑셀을 이용하여 해결하기
10	▸ 사후 검사	• 사후 검사 - 문제해결 검사 - 사후 면담

나. 검사도구

1) 문제해결검사 내용

본 연구에서는 교수실험 전과 후의 학생들의 함수에 관한 문제해결 관점의 변화를 알아보기 위해 사전 문제해결검사와 사후 문제해결검사를 실시하였다. 사전 문제해결검사와 사후 문제해결검사 문항은 동형문제로 구성하였고, 문제해결검사 내용은 현장 교사 및 지도교수의 조언을 통하여 내용타당도를 검증하였다. 모든 문항은 중학교 2학년 수준에서 해결할 수 있는 내용 중에 함수의 과정-대상관점의 문제해결 성향을 알 수 있는 것으로 구성했고, 모두 서술형으로 제시하였다. 문제해결 검사 내용은 <표 Ⅲ-2>와 같다.

2) 문제해결검사 분석 기준

학생들의 함수에 관한 문제해결 관점은 Moschkovich, et al.(1993)의 과정-대상관점의 정의를 참고하여 다음과 같이 세분화하였다.

가) 정확한 과정관점(correct process perspective)
함수에 관련된 문제해결에서 x와 y의 값을 구하는 과정관점을 정확하게 적용해 문제를 해결한 경우를 말한다.

나) 근접한 과정관점(near process perspective)
함수에 관련된 문제해결에서 x와 y의 값을 구하는 과정관점을 적용했지만 문제해결과정의 오류가 있는 경우를 말한다.

다) 부정확한 과정관점(incorrect process perspective)
함수에 관련된 문제를 해결하는 과정에서 x와 y의 값을 구하는 과정관점을 적용하지 못한 경우를 말한다.

라) 정확한 대상관점(correct object perspective)
함수에 관련된 문제해결에서 대수식, 표, 그래프를 대상관점에서 정확하게 적용해 문제를 해결한 경우를 말한다.

마) 근접한 대상관점(near object perspective)
함수에 관련된 문제해결에서 대수식, 표, 그래프를 대상관점에서 적용했지만 문제해결과정에서 오류가 있는 경우를 말한다.

바) 부정확한 대상관점(incorrect object perspective)
함수에 관련된 문제를 해결하는 과정에서 대수식, 표, 그래프를 대상관점에서 적용하지 못한 경우를 말한다

이후로는 정확한 과정관점을 CP(correct process), 정확한 대상관점을 CO(correct object), 근접한 과정관점을 NP(near process), 근접한 대상관점을 NO(near object), 부정확한 과정관점을 IP(incorrect process), 부정확한 대상관점을 IO(incorrect object)로 쓰기로 한다. 학생들의 각 문제에 대한 분석은 크게 과정관점과 대상관점으로 이루어졌다. 과정관점에서는 CP, NP, IP의 3단계로, 대상관점에서는 CO, NO, IO의 3단계로 분류해 분석했다. 각 문제에 대한 분석 기준은 <표 Ⅲ-3>에 제시하였다.

Ⅳ. 교수실험 및 문제해결검사 분석

1. 교수실험 분석 : $y=ax+b(a\neq 0)$의 그래프 탐구

가. 탐구 상황

학생들은 먼저 $y=2x$, $y=2x+3$의 표와 그래프를 엑셀을 활용하여 나타내고 두 그래프의 특징을 발견한다. 이어서 $y=-2x$와 $y=-2x+3$의 표와 그래프를 비교하면서 그 특징을 발견한다. 마지막으로 $y=ax+b(a\neq 0)$ 식의 표와 그래프를 동적도구인 스핀버튼을 활용해 a, b

의 값을 다양하게 조작하면서 그래프의 변화를 살펴보고, $y=ax(a\neq0)$와 $y=ax+b(a\neq0)$ 그래프 사이에 어떤 관계가 있는지 탐구한다.

나. 교수실험 분석

다음은 $y=ax+b$의 그래프에서 a값의 변화에 따라 표와 그래프가 어떻게 변하는지 관찰하면서 발견한 사실들에 대한 면담내용이다.

발췌문 1 : $y=ax+b$ 그래프에서 매개변수 a의 의미 발견

1 연구자: 오늘 배운 내용 중 핵심부분인데, $y=ax+b$의 그래프에서 b의 값을 같게 하고 a의 값을 변화시켰을 때 발견한 사실은?

2 석민: 어, a의 값을 이렇게 움직이면서 기울기가 변하는 것을 볼 수 있었고요. 이것을 음수로 하면(엑셀 화면에 음수를 입

<표 Ⅲ-2> 문제해결검사 분석 기준

문 제	관 점	분석 기준
1	CP	원점 이외의 좌표를 식 또는 평행선 사이의 거리를 이용해 구함.
	NP	원점 이외의 좌표를 식 또는 평행선 사이의 거리를 이용했지만, 잘못 구함.
	IP	과정관점으로 문제를 해결하지 못하거나 반응이 없음.
	CO	평행한 조건과 원점을 활용해 그래프를 그리고 식을 구함.
	NO	평행한 조건을 활용했지만, 원점을 활용하지 못하거나 식을 잘못구함.
	IO	대상관점으로 문제를 해결하지 못하거나 반응이 없음.
2	CP	직선의 기울기를 0, 0.1, 0.2,…1과 같이 나타냄.
	NP	직선의 기울기를 1개 이상 나타냄.
	IP	과정관점으로 문제를 해결하지 못하거나 반응이 없음.
	CO	직선의 기울기를 $0\leq a\leq1$으로 나타냄.
	NO	직선의 기울기를 부등식으로 나타내지 못함.
	IO	대상관점으로 문제를 해결하지 못하거나 반응이 없음.
3	CP	직선의 방정식을 $y=x+2$, $y=2$, … $x=0$과 같이 나타냄.
	NP	직선의 방정식을 1 개 이상 나타냄.
	IP	과정관점으로 문제를 해결하지 못하고나 반응이 없음.
	CO	직선의 방정식을 $y=ax+2$의 꼴로 나타냄.
	NO	직선의 방정식을 $y=ax+b$의 꼴로 나타내는 과정에서 오류가 있음.
	IO	대상관점으로 문제를 해결하지 못하거나 반응이 없음.
4	CP	y의 값을 정확하게 구함.
	NP	y의 값을 구하는 방법은 맞지만 계산을 잘못함.
	IP	y의 값을 계산하지 못함.
	CO	$y=x+7$의 식을 발견하고, $y=x+n$으로 나타냄.
	NO	$y=x+7$의 식을 발견했지만, $y=x+n$으로 나타내지 못함.
	IO	대상관점으로 문제를 해결하지 못하거나 반응이 없음.
5	CP	방정식에 대입, 또는 기울기를 활용하여 정확하게 A, B, C, D의 좌표를 구함.
	NP	과정관점으로 A, B, C, D의 좌표를 1문제 이상 3문제 미만 맞힘.
	IP	과정관점으로 문제를 해결하지 못하거나 반응이 없음.
	CO	방정식과 그래프의 관계를 활용하여 문제를 해결함.
	NO	방정식과 그래프의 관계를 활용하는 과정에서 오류가 있음.
	IO	대상관점으로 문제를 해결하지 못하거나 반응이 없음.

력함.), 기울기가 양수일 때는 1, 2, 3사분면을 지났는데, 또 음수일 때는 1, 2, 4사분면을 지나요.

3 연구자: 이것은 무슨 뜻이지(a 값이 0일 때를 가리키며)?

4 석민: 이것은 a값이 0이면 x와 평행하다.

5 지혜: b의 값을 4로 같게 하고 기울기를 계속 증가시키면(스핀버튼을 활용해 a의 값을 변화시킴) y절편은 4로 일정하게 지나고 기울기가 증가하면 y축에 가깝게 기울기가 커지고요. 또 감소하면 x축에 가깝게 기울기의 크기가 작아진다는 것을 알 수 있었어요.

6 연구자: 또 발견한 내용은?

7 지혜: 또 a를 양수에서 변화시키면 1, 2, 3사분면을 지나면서 증가하는데, 음수일 경우에는 1, 2, 4사분면을 지나면서 기울기의 크기가 변한다는 것을 알 수 있었어요. 그리고 a가 0이면 x축에 평행하다는 것도 알았어요.

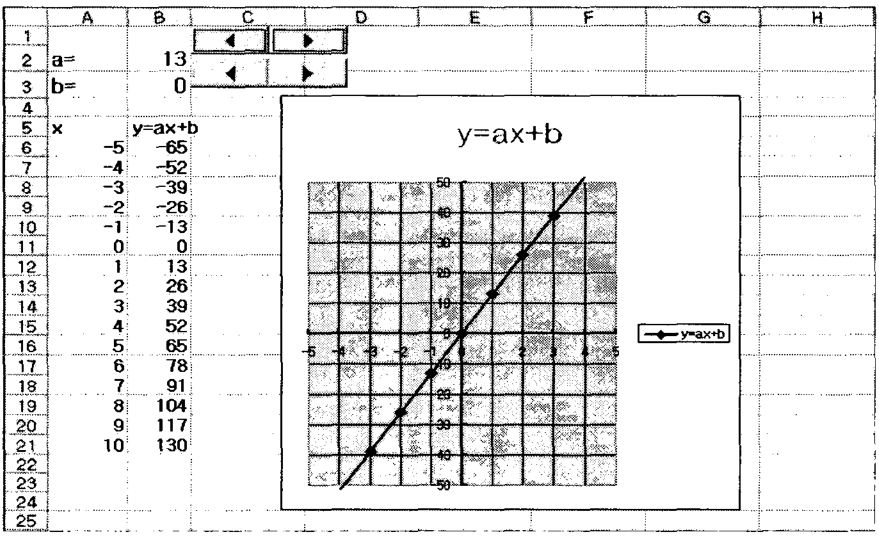
위의 면담에서 석민은 a 값을 변화시켰을 때 기울기가 변하는 것을 관찰하였고, a가 양수일 때는 1, 2, 3사분면을 지나고, 음수일 때는 1, 2, 4사분면을 지난다는 것을 발견했고(2열), 면담 중에 엑셀을 조작하면서 a값이 0이면 x축과 평행하다는 것도 알게 되었다. 반면에, 지혜는 a값을 변화시켰을 때, 그래프는 y절편을 일정하게 지나고 기울기의 변화와 y축과의 위치관계뿐만 아니라 지나는 사분면까지도 상세하게 설명하고 있고(5열, 7열), 스스로 a가 0일 때 x축과 평행하다는 것을 발견했다(7열). 즉, 학생들은 $y=ax+b$의 그래프에서 a값에 따른 표와 그래프의 변화를 관찰하면서 a의 역할에 대한 의미를 대상화하고 있음을 알 수 있다.

다음은 영훈이가 $y=ax+b$의 그래프에서 b의 값을 변화시키면서 발견한 사실이다.

<u>발췌문 2 : $y=ax+b$의 그래프에서 매개변수 b의 의미 발견</u>

1 연구자: $y=ax+b$의 그래프에서 b의 값을 변화시켰을 때 어떤 사실을 발견했지?

2 영훈: 음, y축의 방향으로 평행이동 하였고요. 다른 좌표들도 함께 전부다 평행이



[그림 Ⅳ-1] 석민의 $y=ax+b$ 그래프 탐구

동 했으니까, 다른 좌표 모두 y값이 증가하였고요. b의 값이 높아질 때는 y축의 위 방향으로 평행이동 하였고 b의 값이 낮아질 때는 그래프가 y축의 아래 방향으로 움직였어요. 마지막으로 그래프의 기울기는 a의 값이 고정되어 있으니까 변화하지 않는다는 것을 관찰할 수 있었어요.

3 연구자: 그래프의 평행이동이 무엇을 뜻하는지 예를 들어 설명하면?

4 영훈: $y=2x$의 그래프와 $y=2x+2$의 그래프가 있을 때 y축의 방향으로 $y=2x+2$의 그래프가 $y=2x$의 그래프보다 2만큼 더 위에 있었어요.

위의 예에서 영훈은 그래프와 표를 종합적으로 비교하면서 (2열) b값의 변화와 y값의 관계를 파악했고, b값만큼 좌표도 일정하게 변화된다는 것을 발견했다. 그리고 평행이동에 대한 의미도 그래프와 표를 보면서 분명히 이해하고 있음을(4열) 알 수 있다.

이러한 탐구결과는 영훈이가 엑셀 탐구활동을 통해 b의 역할을 대상관점으로 이해하고 있음을 나타낸다.

다음은 학생들이 $y=ax+b$에서 a, b의 값을 다양하게 조작하고 탐구하면서 발견한 사실에 대한 면담 내용이다.

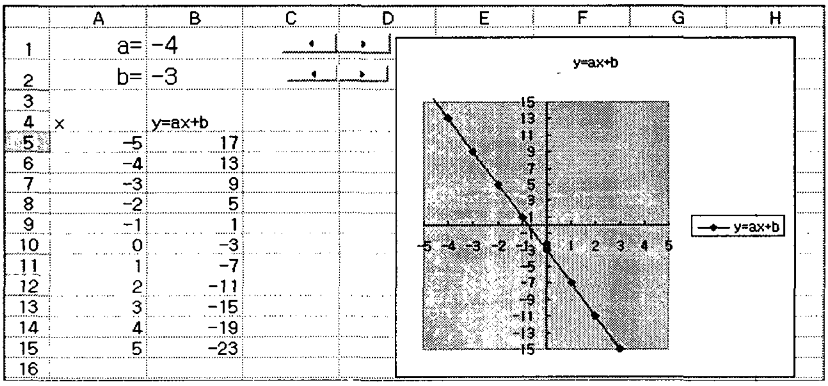
<u>발췌문 3 : $y=ax$와 $y=ax+b$ 사이의 관계 발견</u>

1 연구자: 오늘은 $y=ax$와 $y=ax+b$ 그래프 사이에 어떠한 관계가 있는지 엑셀을 통해 탐구해보았는데, 발견한 사실을 말해 볼까?

2 석민: 음, a값이 변함에 따라 a의 값은 기울기의 변화에 관계하고, b의 값은 평행이동에 관계해요. $a>0$이고 $b>0$일 때 그래프는 제 1사분면, 제 2사분면, 제 3사분면을 지나고, $a>0$이고 $b<0$일 때는 제 1, 3, 4사분면을 지나요, 그리고 $a<0$이고 $b>0$일 때는 제 1, 2, 4사분면을 지나고, $a<0$이고 $b<0$일 때는 제 2, 3, 4사분면을 지나요. 그리고 또 b가 0이면 그래프는 원점을 지나고 a의 값이 0이면 x축에 평행해요. 그리고 둘 다 0이면 x축이 돼요.

3 인경: 아까 했던 것인데요. b를 0으로 하고 a를 올렸을 때 a가 클수록 y쪽으로 향하게 변하고, 어, a를 0으로 하고 b를 올렸을 때는 바로 위로 올라간다. 그것이 b의 값이 y의 값에 영향을 미치는 것 같다고 생각했는데, 영향을 미친다로 바꿀래요.

4 선애: 두 그래프는 평행하는 기울기가 같고, a의 값에 따라 1, 3사분면과 2, 4사분면



[그림 Ⅳ-2] 영훈의 b값에 따른 그래프 탐구

에 있어요. 그리고 a의 값이 마이너스인 경우에는 $y=-2x$일 때 $y=-2x+3$은 $y=-2x$의 그래프보다 위에 있고요. a의 값이 플러스일 경우에는 $y=2x$와 $y=2x+3$은 $y=2x$ 그래프보다 아래쪽에 있어요. 그리고 a값이 0이면 x축에 평행하다는 것도 발견했어요.

5 지혜: $y=ax$ 그래프는 원점을 지나는 직선의 그래프라는 것을 알 수 있었구요. 또 $y=ax$ 그래프 같은 경우는 그 기울기 a의 값에 따라서 그래프가 지나는 사분면이 달라지고, $y=ax+b$의 그래프는 $y=ax$의 그래프를 b만큼 평행이동 시킨 그래프라는 것을 알 수 있었고요. y절편 값에 따라서 지나는 사분면이 달라진다는 것을 알 수 있었어요.

6 영훈: b의 값이 변함에 따라 $y=ax+b$의 그래프는 $y=ax$의 그래프에서 b의 값만큼 평행이동을 했고요. a의 값이 변해도 두 그래프는 평행해요. 이 말은 a의 값이 같이 변하니까, 두 그래프는 평행하다는 말이에요. 그리고 a가 음수이고 b가 양수일 때는 1, 2, 4사분면을 지났고요. a가 양수이고 b가 양수일 때 1, 2, 3사분면을 지났어요. a가 음수 b가 음수일 때는 2, 3, 4사분면을 지났고요. a가 양수이고 b가 음수일 때는 1, 3, 4사분면을 지났어요.

인경은 활동 전 진단평가에서 $y=ax$와 $y=ax+b$ 그래프 사이의 관계에 대한 질문에 'b를 +한 것'이라 썼지만, 그 의미는 이해하지 못했다. 하지만 3열을 보면 엑셀을 활용하여 a, b의 값을 다양하게 조작하면서 a의 값이 클수록 y축에 가까워지고, b의 값은 평행이동과 관계된다는 사실을 이해했음을 알 수 있다. 석민은 a, b의 부호와 값에 따라 그래프의 방향과 지나는 사분면을 분석적으로 제시하면서, 추가로 a의 값이 0일 때는 x축과 평행하고 a, b의 값이 0이면 x축이 된다는 사실도 발견했다(2열). 선애, 지혜, 영훈이도 a, b의 값을 다양하게 조작해보고 그에 따른 표와 그래프의 역동적인 상황을 관찰해봄으로써 $y=ax$와 $y=ax+b$ 사이의 관계를 전체적으로 이해하고 있음을 알 수 있다(4열, 5열, 6열).

위의 발췌문에서 살펴보았듯이, 엑셀을 활용한 과정관점에서의 탐구활동이 $y=ax$와 $y=ax+b$의 그래프의 관계를 대상관점으로 이해하는 데 도움이 되었음을 알 수 있다.

2. 문제해결검사 분석

엑셀을 활용한 교수실험 전후에 학생들의 함수에 관한 문제해결관점을 파악하기 위해 사전-사후 문제해결검사[2]를 실시하였다. 문제해결검사는 Moschkovich, et al.(1993)의 과정-대상관점의 정의를 참고하여, 각 문항별로 과정관점의 문제해결은 CP(correct process), NP(near process), IP(indirect process)로, 대상관점의 문제해결은 CO(correct object), NO(near object), IO(indirect object)로 분류해 분석하였다. 분석은 학생들이 지필로 작성한 검사지와 연구자와의 면담내용을 중심으로 이루어졌다.

가. 문제1)의 반응 분석

1) 사전검사

문제1)은 학생들이 그래프와 식의 관계를 어떠한 관점으로 적용하는지 알아보는 문제이다. 사전검사에서, 석민은 평행하면 기울기가 같다는 것을 이용해 그래프를 그렸지만, 원점을 지난다는 것을 활용하지 않고 세 좌표 (1, 2), (2, 4), (3, 6)를 이용하여 그래프를 그렸다.

2) 사전-사후 문제해결검사 내용은 부록에 제시하였음.

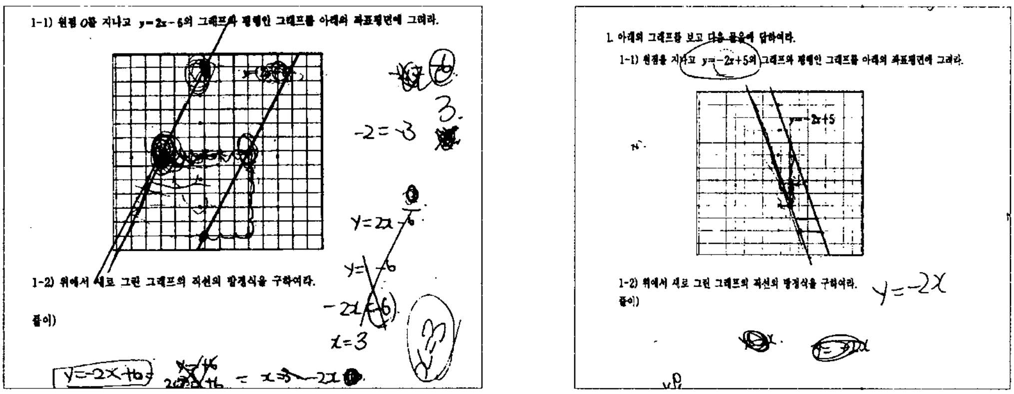
반면에 선애는 평행하면 기울기가 같다는 것과 원점을 지난다는 것을 활용해 그래프를 그렸다. 또한 지혜와 영훈은 $y=-2x+6$과 평행한 그래프를 그렸지만, 원점을 지난다는 것을 적용하지 못했다. 인경이는 원점에서 같은 거리에 있는 점을 활용해 그래프를 그리고, 방정식은 $y=-2x+6$으로 나타냈다. 즉, 그래프의 기울기가 양인데도 불구하고 식으로 나타낼 때는 음으로 나타낸 것으로 보아 그래프와 식의 관계를 잘 연결하지 못한 것을 알 수 있다.

2) 사후검사

인경은 사전검사에서 원점을 지나는 그래프를 그리지 못했으며, 식과 그래프의 관계도 이해하지 못했다. 인경은 원점에서 y절편까지의 거리를 이용해 구한 한 점의 좌표(1, -2)와 또 다른 한점의 좌표(2, -4)를 이용해 그래프를 그렸다.

[그림 Ⅳ-3]을 보면, 좌표(1, -2)를 구할 때는 원점을 이용했지만, 그래프를 그릴 때는 평행선 사이의 거리를 이용하여 한 점(2, -4)을 찾은 다음 그린 것을 알 수 있다. 이러한 사실은 $y=-2x+5$의 그래프는 $y=-2x$그래프를 y축 방향으로 5만큼 평행이동 한 것이라는 것을 이해하고 있음을 보여주는 것이다.

활동지와 면담내용을 살펴본 결과 석민, 영훈, 지혜는 $y=-2x+5$의 그래프와 평행한 그래프는 기울기가 같다는 사실을 활용해 원점과 (1, -2)를 이용해 그래프를 그리고 $y=-2x$식을 구했다. 그리고 선애는 평행하면 두 그래프 사이의 거리가 일정하다는 사실을 활용해 원점을 지나는 그래프를 그리고 식을 구했다. 따라서, 4명의 학생 모두 정확한 과정-대상관점(CP, CO)으로 문제를 해결했다고 할 수 있다. 문제 1)에 대한 문제해결 관점을 정리하면 <표 Ⅳ-1>과 같다.



[그림 Ⅳ-3] 인경의 사전, 사후검사 풀이 비교

<표 Ⅳ-1> 문제1)에 대한 문제해결 관점

학생 / 검사	석민	지혜	영훈	선애	인경
사전	CP, NO	CP, NO	CP, NO	CP, CO	IP, IO
사후	CP, CO	CP, CO	CP, CO	CP, CO	NP, NO

나. 문제2)의 반응 분석

1) 사전검사

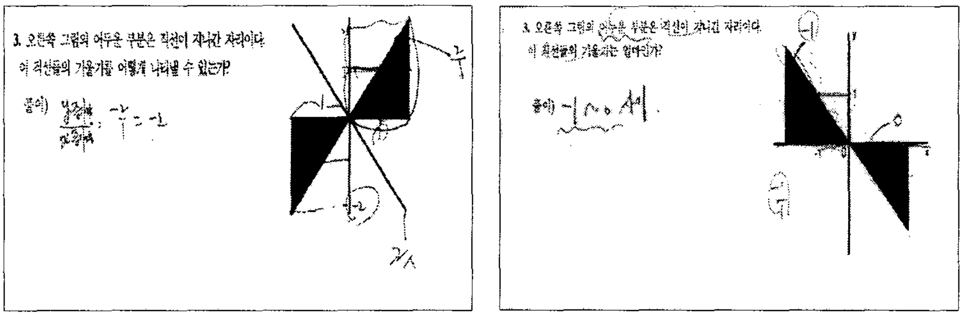
문제2)에서 직선은 $y=ax$의 유형이다. 따라서, 검게 칠한 영역의 기울기 a는 0과 1사이에 놓여 있어야 한다. 본 문제는 학생들이 일차함수 그래프들의 기울기를 어떻게 나타내는지를 알아보는 문제이다. 문제해결 검사 결과 석민은 정확한 대상관점(CO)으로 일차함수 그래프의 기울기 범위를 $0 \leq x \leq 1$로 나타냈지만, 영훈은 과정관점으로 $y=ax$의 식에 (1, 1)을 대입해 a의 값, 기울기가 1이라는 사실만을 발견했다. 지혜는 영훈과 마찬가지로 기울기를 -2로 계산했다. 하지만, 선애와 인경은 문제를 이해하지 못해 해결하지 못하였다.

2) 사후검사

사전검사에서는 석민을 제외한 다른 학생들은 대상관점으로 문제를 해결하지 못했지만, 사후검사에서는 학생들의 문제해결관점이 바람직한 방향으로 변화되었다.

인경은 원점을 지나는 그래프가 $y=ax$의 형태라는 것을 알고 $(-1, 1)$을 대입해 a의 값 -1을 구했다. 그러나 $(-1, 1)$을 이용해 $y=-x$ 식을 구하고 기울기를 -1로 나타냈지만, 직선이 지나간 자리의 기울기의 범위를 나타내지는 못했다. 석민, 지혜, 영훈은 그래프가 x축과 일치할 때는 기울기가 0이 된다는 사실과 $(-1, 1)$의 좌표를 이용하면 기울기가 -1이 된다는 사실을 이용해 일차함수 그래프들의 기울기를 $-1 \leq a \leq 0$ (석민), -1~0사이(지혜), $-1 \leq$기울기≤ 0 (영훈)으로 나타냈다. 특히, 지혜는 Starburst 활동이 기울기의 변화를 이해하는 데 도움이 되었다고 함으로써 엑셀 활동이 함수 학습에 중요한 역할을 했음을 알 수 있다. 선애는 $(-1, 1)$의 좌표를 활용해 기울기가 -1이라는 것을 알았지만, 그래프가 x축과 일치할 때 기울기가 0이라는 것은 확인하지 않고, 직선의 방정식 $y=-x+n$(n은 모든 수)으로 나타내었다.

문제2)에 대한 학생들의 문제해결 관점을 정리하면 <표 IV-23>과 같다.



[그림 IV- 4] 지혜의 사전, 사후검사 풀이 비교

<표 IV-2> 문제2)의 문제해결 관점

검사 \ 학생	석민	지혜	영훈	선애	인경
사전	CO	NP	NP	IP	IP
사후	CO	CO	CO	NP	NP

다. 문제3)의 반응 분석

1) 사전검사

문제3)에서 주목할 것은 "직선 모두는 (0, 2)를 지난다."는 것이다. 이 말은 직선의 집합은 (0, 2)를 지나는 직선을 회전한 것이라고 볼 수 있다. 이러한 일차함수의 그래프를 식으로 나타내면 $y=ax+2$이다.

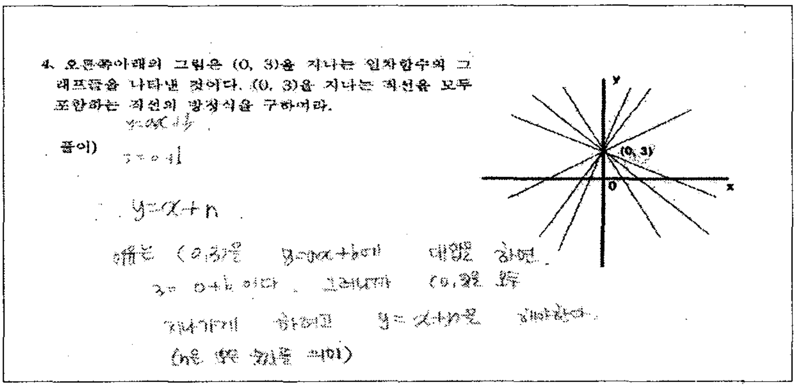
선애와 영훈은 과정관점에서 (0, 2)를 대입해 $y=ax+2$라는 식을 구했지만, $y=ax+2$가 (0, 2)를 지나는 그래프들의 식이라는 것을 이해하지 못했다. 그러나 지혜는 y절편을 이용해 $y=ax+2$가 (0, 2)를 지나는 그래프의 방정식이라는 것을 이해하고 있었다. 석민은 과정관점을 적용해 $x=0$라 답했고, 인경은 문제를 해결하지 못하였다.

2) 사후검사

문제3)은 y절편 (0, 3)을 지나는 일차함수 그래프를 식으로 나타내는 문제이다. 인경은 사전검사에서 이런 유형의 문제를 해결하지 못했지만, 엑셀 활동 후의 사후검사에서는 그래프에 대한 이해력이 발전되었다.

인경은 (0, 3)의 좌표를 활용해 그래프, 식을 전체로 나타내지 못했지만 $y=3x+3$으로 나타낸 것은 잠재적으로 $y=ax+b$ 식을 생각했다고 할 수 있다. 식을 전체로 나타낼 수 있는 방법을 모르기 때문에 a값 대신 적당한 수 3을 대입한 것이다. 이러한 추측은, 면담과정에서 기울기 a의 값은 변하지만 y절편은 변하지 않는다는 사실을 이해하고 스스로 $y=ax+3$ 식을 만든 것으로 확인할 수 있었다.

지혜와 영훈은 기울기 a와 y절편 3을 이용해 $y=ax+3$으로 나타낸 반면에, 석민과 선애는 대상관점으로 접근했지만 문제해결과정에서 오류가 있었다. 선애의 경우 사전검사에서는 문제를 해결하지 못했지만, 사후검사에서는 [그림 IV-5]과 같이 대상관점으로 접근하려는 시도를 한다는 것을 알 수 있다. 그러나, 아직까지는 일차함수의 그래프의 기울기와 y절편의 관계를 정확하게 이해하고 있지 못한 것을 알 수 있다.



[그림 IV-5] 선애의 문제3) 풀이 내용

<표 IV-3> 문제3)의 문제해결 관점

학생 / 검사	석민	지혜	영훈	선애	인경
사전	NP	CO	NP	NP	IP
사후	NO	CO	CO	NO	NP

문제3)에 대한 학생들의 문제해결 관점을 정리하면 <표 Ⅳ-3>와 같다.

라. 문제4)의 반응 분석

1) 사전검사

문제4)는 표를 보고 x, y의 관계를 발견할 수 있는지 알아보는 문제이다. 학생들의 활동지내용을 살펴본 결과 4명의 학생은 주어진 표에서 x, y사이의 관계를 잘 파악해서 $x=3$일 때 $y=10$이라는 값을 구했지만, 인경이는 $y=9$로 계산했다([그림 Ⅳ-6]의 내용은 9를 썼다가, 면담과정에서 10으로 고쳐쓴 것임). 지혜, 영훈, 선애는 $x=n$일 때 $y=n+7$이라고 정확한 응답을 하였다. 인경은 $x=n$일 때 y값을 묻는 질문에 $y=n+7$ 또는 $y=x+7$이라고 답하였고, 석민은 문제를 해결하는 과정에서 착오를 일으켜 $y=n-7$이라고 답하였다.

2) 사후검사

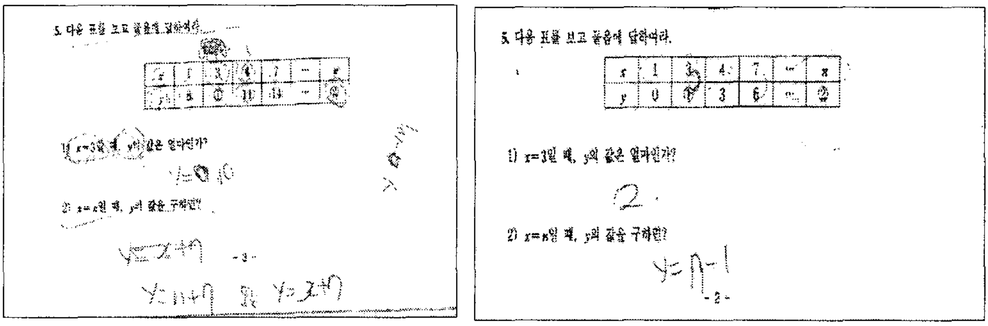
문제4)와 유사한 문제에 대한 사전검사에서 인경을 제외한 4명의 학생은 정확한 과정-대상 관점(CP, CO)으로 문제를 해결했다. 사후검사의 문제4)에 대한 문제해결에서는 5명의 학생 모두 주어진 표에서 x, y사이의 관계를 잘 파악해서 $x=3$일 때 $y=2$라는 값을 구했고, $x=n$일 때 x, y의 관계식을 구하는 문제도 $y=n-1$이라고 정확한 응답을 하였다. [그림 Ⅳ-6]을 보면 인경은 사전검사에서는 과정-대상 관점에서 오류가 있었지만, 사후검사에서는 문제를 정확하게 해결했다는 것을 확인할 수 있다.

문제4)에 대한 학생들의 문제해결관점을 정리하면 <표 Ⅳ-4>와 같다.

마. 문제5)의 반응 분석

1) 사전검사

문제5)는 Resnick(1987, p.158)의 문제를 재구성한 것이다. 위의 문제를 풀기 위해서는 그래프와 방정식을 연결하면서 과정관점과 대상관점을 적용해야 한다.

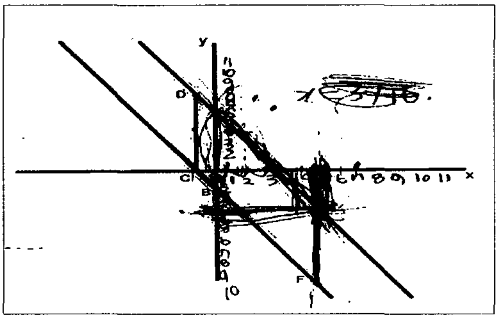


[그림 Ⅳ-6] 인경의 사전, 사후검사 풀이 비교

<표 Ⅳ-4> 문제4)의 문제해결 관점

검사 \ 학생	석민	지혜	영훈	선애	인경
사전	CP, NO	CP, CO	CP, CO	CP, CO	NP, NO
사후	**CP, CO**	**CP, CO**	**CP, CO**	**CP, CO**	**CP, CO**

석민과 지혜와 영훈은 그래프에 맞는 방정식을 고르는데 기울기와 y절편을 이용했다. 그런데, 인경과 선애는 그래프와 방정식의 관계를 연결하지 못했다. 특히, 인경의 경우 [그림 Ⅳ-7]과 같이 x, y축에 수를 표시하며 문제를 해결하는 시도는 그래프와 대수식을 연결할 수 있는 사고력이 부족하다는 것을 보여준다.

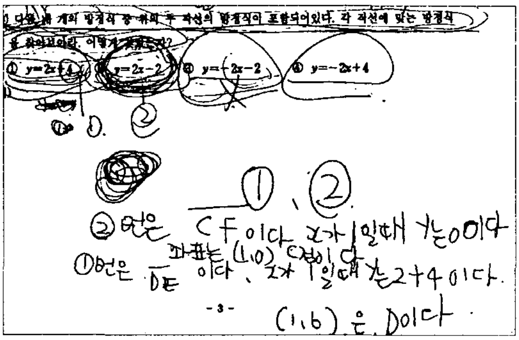


[그림 Ⅳ-7] 인경의 그래프

문제 5-2)는 두 방정식을 활용해 그래프 위의 좌표를 구하는 문제로 과정관점에서의 문제해결력이 요구된다. 문제 5-2)에 대한 문제해결 과정을 살펴보면, 석민과 지혜는 x절편과 y절편, 두 직선이 평행하다는 조건을 잘 활용하여 해당되는 방정식에 값을 대입해 A, B, C, D의 좌표를 효과적으로 구했다. 반면에 영훈은 A, B의 좌표는 y절편을 활용해 쉽게 구했지만, C, D의 좌표를 구할 때는 기울기를 이용하는 과정에서 D의 좌표를 잘못 구했다.

2) 사후검사

석민과 지혜는 사전검사와 마찬가지로 기울기와 y절편의 관계를 이용하여 해당되는 방정식을 찾았다. 그런데, 영훈은 사전검사에서 y절편과 기울기의 부호를 활용하여 답을 구했지만, 사후검사에서는 기울기가 양수이고 y절편이 양수일 때는 1, 2, 3사분면을 지나고, 기울기가 음수이고 y절편이 양수일 때는 1, 3, 4사분면을 지난다는 것을 활용하여 답을 구했다. 면담에서 영훈이는 엑셀을 활용한 $y=ax+b$의 그래프 탐구 활동이 그래프와 대수식을 연결하는 데 중요한 영향을 주었다고 소감을 말하였다. 선애는 사전검사와는 달리 문제해결에 대한 집중력을 보여주고 있지만, 그래프와 방정식간의 관계를 효과적으로 활용하지 못하였다.



[그림 Ⅳ-8] 인경의 문제 5-2) 해결

인경이는 [그림 Ⅳ-8]와 같이, 그래프와 방정식을 대상관점으로 해결하지는 못했지만 방정식에 좌표를 대입해 그 좌표를 지나는 그래프를 찾은 다음, 원래의 방정식과 연결하였다. 인경은 그래프에 해당되는 방정식의 y절편을 이용하여 A, B의 좌표는 쉽게 (0, 4)와 (0, -2)를 구했지만, 어림을 사용하는 경향이 있었다. 그리고 C(1, 0)와 D(1, 6)의 좌표를 구하는 과정에서도 어림을 사용했다는 것을 면담결과 확인할 수 있었다. 반면에 영훈은 방정식을 활용해서 좌표를 구하기보다는 y절편과 기울기를 활용했다. 영훈이는 C(1, 0)과 D(1, 6)의 좌표를 구할 때 A, B의 좌표와 기울기=(y의 증가량)/(x의 증가량)를 활용해 구했다.

석민과 지혜, 선애의 문제해결내용을 활동지와 면담을 중심으로 정리하면 다음과 같다. 석민과 지혜는 문제 5-2)에서 x절편과 y절편을

활용해 A, B, C의 좌표를 구하고 평행한 조건에 따라 C와 D의 x좌표가 같다는 것을 이용해 D의 좌표를 구했다. 그리고 선애는 방정식을 활용해 좌표 D(1, 6)은 정확하게 구했지만 A(4, 0), B(-2, 0), C(0, 1)의 좌표는 x좌표와 y좌표의 값을 바꾸어 놓았다.

문제5)에 대한 학생들의 문제해결 관점을 정리하면 <표 Ⅳ-5>와 같다.

엑셀을 활용한 교수실험 전후에 학생들의 문제해결관점을 종합해보면 <표 Ⅳ-6>과 같이 나타낼 수 있다.

전체적으로 사전검사 결과와 비교하면, 학생들이 대부분 함수에 관한 문제해결 관점이 바람직한 방향으로 변화되었다는 사실을 알 수 있다.

Ⅴ. 결 론

본 연구에서는 사례연구를 통하여 엑셀의 활용이 일차함수의 문제해결에 어떤 영향을 미치는가를 함수의 과정-대상관점으로 분석하였다. 중학교 2학년 학생 5명을 연구대상으로 하여 교수실험을 실시하였고, 학생들의 일차함수의 문제해결과정 분석은 검사지와 면담을 기초로 이루어졌다. 다음은 엑셀을 활용한 교수실험 분석결과를 정리한 것이다.

학생들은 엑셀 환경에서 $y=ax$나 $y=ax+b$식에서 매개변수 a, b의 값을 과정적 측면의 다양한 조작을 통해 변화시켰으며, 이를 통하여 변수의 개념을 대상관점에서 이해할 수 있었다. 그리고 엑셀을 통해 식과 표와 그래프를 다양하게 조작한 경험, 즉, 엑셀 환경의 추측과 피드백의 반복적인 과정은 함수의 과정관점과 대상관점 형성을 촉진시켰다. 교수실험이 진행될수록 학생들은 식과 표와 그래프를 동시에 관찰하는 것에 익숙해졌고, 귀납적인 관찰을 통해 일반적인 규칙을 발견하려는 성향을 보였다. 또한, 학생들은 엑셀 프로그램을 활용해 스스로 규칙을 정해 식을 만들고 표와 그래프를 나타내며 그 변화를 상당히 흥미롭게 탐구하였

<표 Ⅳ-5> 문제5)의 문제해결 관점

검사 \ 학생	석민	지혜	영훈	선애	인경
사전	CP, CO	CP, CO	NP, CO	IP, IO	IP, IO
사후	CP, CO	CP, CO	CP, CO	NP, IO	NP, IO

<표 Ⅳ-6> 사전, 사후 문제해결 관점 비교

문제 \ 학생	석민		지혜		영훈		선애		인경	
	사전	사후	사전	사후	사전	사후	사전	사후	사전	사후
1	CP, **NO**	CP, **CO**	CP, **NO**	CP, **CO**	CP, **NO**	CP, **CO**	CP, CO	CP, CO	**IP, IO**	**NP, NO**
2	CO	CO	**NP**	**CO**	**NP**	**CO**	**IP**	**NP**	**IP**	**NP**
3	**NP**	**NO**	CO	CO	**NP**	**CO**	**NP**	**NO**	**IP**	**NP**
4	CP, **NO**	CP, **CO**	CP, CO	CP, CO	CP, CO	CP, CO	CP, CO	CP, CO	**NP, NO**	**CP, CO**
5	CP, CO	CP, CO	CP, CO	CP, CO	**NP**, CO	**CP**, CO	**IP**, IO	**NP**, IO	**IP**, IO	**NP**, IO

다. 이와 같은 엑셀을 활용한 탐구활동은 교수실험에 참여한 5명 학생의 일차함수의 문제해결에도 영향을 주었다.

석민은 사전검사 결과, 과정관점에서 문제해결은 능숙했지만 대상관점에서의 문제해결은 미흡했다. 그러나, 사후검사의 문제1), 문제3), 문제4)의 반응결과를 보면 대상관점에서의 문제해결이 사전검사에 비해 향상되었음을 알 수 있다. 지혜도 석민과 마찬가지로 대상관점에서의 문제해결이 다소 부족했지만, 문제1), 문제2)의 반응결과를 보면 대상관점에서의 문제해결이 사전검사보다 향상되었다는 것을 확인할 수 있다. 또한, 영훈은 문제1), 문제2), 문제3), 문제5)의 반응결과를 살펴보면, 사전검사에 비해 과정-대상관점에서 상당히 향상된 것을 알 수 있다. 선애는 문제3)번에서 대상관점이 향상되었고, 문제2)과 문제5)에서 과정관점이 향상되었다는 것을 확인할 수 있다. 인경은 사전검사에 비해 사후검사에서는 상당히 향상되었다는 것을 알 수 있다. 인경이는 문제1), 문제2), 문제3), 문제4), 문제5)에 걸쳐 전반적으로 문제해결관점이 향상되었다. 이러한 문제해결 관점의 변화는 엑셀을 활용한 함수의 과정-대상관점 형성에 관한 교수실험이 함수에 관련된 문제해결력에 긍정적인 영향을 미쳤다는 것을 의미한다.

본 연구의 교수실험 결과는 엑셀을 활용한 탐구학습 환경이 지필환경을 보완할 수 있음을 시사한다. 직관적, 역동적, 탐구적인 기능을 가지고 있는 엑셀은 학생들의 함수의 과정-대상관점 형성을 지원해 주는 비계(scaffolding)역할을 수행할 수 있을 것으로 판단된다. 따라서, 현재의 지필환경에서의 탐구활동을 지원할 수 있는 탐구용 소프트웨어의 활용이 필요하다고 할 수 있다. 아직까지는 교과서에서 컴퓨터의 활용 예를 일부 제시하는 정도로 다루고 있지만, 실제로 정적인 지필환경과 동적인 교육공학의 환경을 통합한 새로운 교육과정의 구성에 대한 연구가 이루어질 필요가 있다.

참고문헌

류희찬 (2004). 수학교육에서 탐구형 소프트웨어의 활용방안. **청람수학교육, 14**, 1-15. 한국교원대학교 수학교육연구소.

신동선, 류희찬(1998). **수학교육과 컴퓨터**, 경문사.

Garay, A. (2001). *Using multiple coordinated representations in a technology-intensive setting to teach linear functions at the college level.* University Of Illnois At Urbana-Champaign(0090). Ed.D.

Kieran, C. (1993). Functions, graphing, and technology: Integrating research on learning and instruction. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp.189-238). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associations, Publishers.

Macmillan, J. H., & Schumacher, S. (1993). *Research in Education: Conceptual Introduction*(3rd ed.). Harper Collins College.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in Education : A qualitative approach.* San Fransisco: Jossey-Bass. 허미화(역) (1994). **질적사례연구법**. 서울: 양서원.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. H., & Acavi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter(Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions*(pp.69-100). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associations, Publishers.

Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran(Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*(Vol.III, pp. 162-169). Montreal, Quebec: Universite de Montreal.

________. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

Sutherland, R. & Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 353-383.

Sutherland, R., Healy, L., & Pozzi, S. (2001). Reflections on the role of the computer in the development of algebraic thinking. *Perspectives on school algebra* (pp.231-247). Kluwer academic Publishers.

Van Dyke, F., & Craine, T. (1999). Equivalent Representations in the Learning of Algebra. *Algebraic thinking, grade k-12*(pp.215-219). Readings from NCTM's school-based journals and other publications.

Wilson, K., Ainley, J. & BILLS, l. (2004). Spreadsheet generalising and paper and pencil generalising. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the PME, 4,* 441-448.

The Effects on Problem Solving of Linear Function Using Excel

Lee, Kwang Sang (Seosan Agricultural Technical High School)
Cho, Min Shik (Korea National University of Education)
Lew, Hee Chan (Korea National University of Education)

The purpose of this study is to search an effective teaching & learning program by examining how much does Excel affect on problem solving of linear function. This study was based on qualitative case study. Teaching experiment was performed for seven periods with five students in 8th graders. Pre and posts tests were attempted to analyze the changes of student's ability on problem solving of linear function. The analysis of tests were performed in category with correct process-object perspective, near process-object perspective, incorrect process-object perspective. According to this study, the subjects showed an improvement on problem solving perspective of linear function. This meant that lessons using Excel had influenced on the problem solving of linear function. We noticed that exploring the learning environment with Excel could supplement paper-and-pencil environment. We believed that Excel with an intuitive ,dynamic and explorative skills can play a role in scaffolding to support problem solving of linear function.

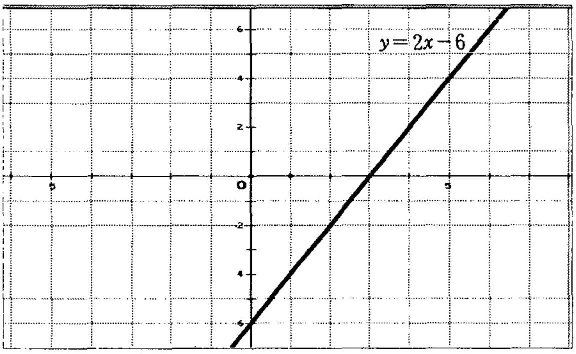
* key words : correct process-object perspective(정확한 과정-대상관점), near process-object perspective(근접한 과정-대상관점), incorrect process-object perspective(부정확한 과정-대상관점), Excel environment(엑셀 환경), explorative process(탐구 과정), scaffolding(비계)

논문접수 : 2006. 7. 30
심사완료 : 2006. 9. 15

부록 1. 사전 문제해결 검사

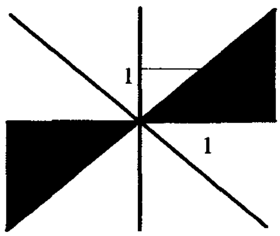
1. 아래의 그래프를 보고 다음 물음에 답하여라.

1-1) 원점 0를 지나고 $y=2x-6$의 그래프와 평행인 그래프를 아래의 좌표평면에 그려라.

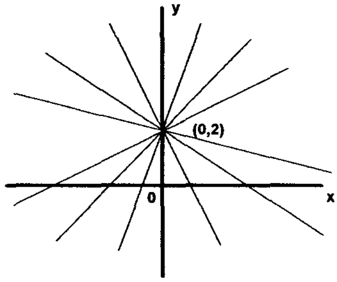


1-2) 위에서 새로 그린 그래프의 직선의 방정식을 구하여라.

2. 오른쪽 그림의 어두운 부분은 직선이 지나간 자리이다. 이 직선들의 기울기를 어떻게 나타낼 수 있는가?



3. 오른쪽 그림은 (0, 2)를 지나는 일차함수의 그래프들을 나타낸 것이다. (0, 2)를 지나는 직선을 모두 포함하는 직선의 방정식을 구하여라.



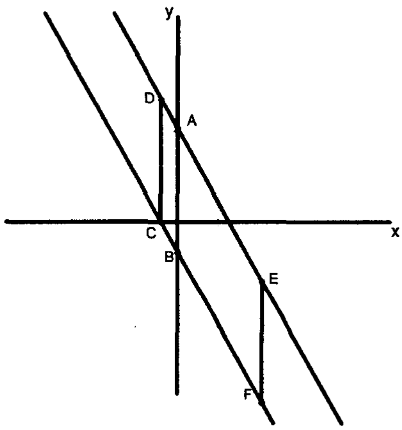
4. 다음 표를 보고 물음에 답하여라.

x	1	3	4	7	…	n
y	8	①	11	14	…	②

1) $x=3$일 때, y의 값은 얼마인가?

2) $x=n$일 때, y의 값을 구하면?

5. 오른쪽 그림을 보고 물음에 답하여라.



5-1) 다음 네 개의 방정식 중 위의 직선의 방정식이 포함 되어있다. 각 직선에 맞는 방정식을 찾아보아라.

① $y=2x+6$　　② $y=2x-2$

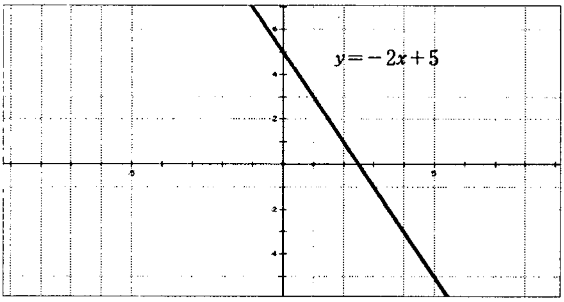
③ $y=-2x-2$　　④ $y=-2x+6$

5-2) 선분 CD와 선분 EF가 y축에 평행할 때, 점 A, B, C, D의 좌표를 구하여라.

부록 2. 사후 문제해결검사

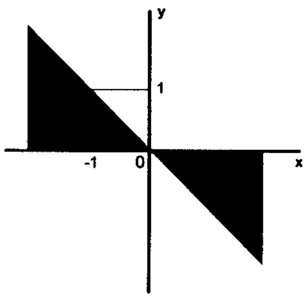
1. 아래의 그래프를 보고 다음 물음에 답하여라.

1-1) 원점을 지나고 $y=-2x+5$의 그래프와 평행인 그래프를 아래의 좌표평면에 그려라.

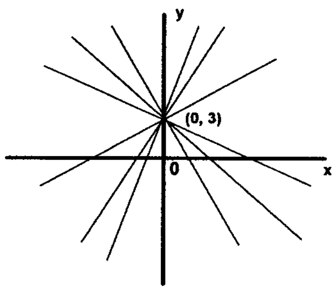


1-2) 위에서 새로 그린 그래프의 직선의 방정식을 구하여라.

2. 오른쪽 그림의 어두운 부분은 직선이 지나간 자리이다.
이 직선들의 기울기는 얼마인가?



3. 오른쪽아래의 그림은 (0, 3)을 지나는 일차함수의 그래프들을 나타낸 것이다. (0, 3)을 지나는 직선을 모두 포함하는 직선의 방정식을 구하여라.



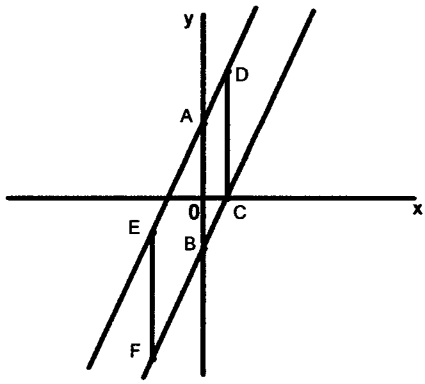
4. 다음 표를 보고 물음에 답하여라.

x	1	3	4	7	…	n
y	0	①	3	6	…	②

1) $x=3$일 때, y의 값은 얼마인가?

2) $x=n$일 때, y의 값을 구하면?

5. 오른쪽 그래프를 보고 물음에 답하여라.



5-1) 다음 네 개의 방정식 중 위의 두 직선의 방정식이 포함되어있다. 각 직선에 맞는 방정식을 찾아보아라. 어떻게 찾았는가?

① $y=2x+4$ ② $y=2x-2$

③ $y=-2x-2$ ④ $y=-2x+4$

5-2) 선분 CD와 선분 EF가 y축에 평행할 때, 점 A, B, C, D의 좌표(x, y)를 구하여라.