

매크로 탄성 계수에 미치는 마이크로 크랙의 영향 평가

강성수*, 김홍건⁺

(논문접수일 2006. 7. 5, 심사완료일 2006. 8. 9)

An Evaluation of the Effect of Micro-cracks on Macro Elastic Moduli

Sung-Soo Kang*, Hong Gun Kim⁺

Abstract

A meso-scale analysis method using the natural element method, which is a kind of meshless method, is proposed for the analysis of material damage of brittle microcracking solids such as ceramic materials, concrete and rocks. The microcracking is assumed to occur along Voronoi edges in the Voronoi diagram generated using the nodal points as the generators. The mechanical effect of microcracks is considered by controlling the material constants in the neighborhood of the microcracks. The macro elastic moduli of anisotropic as well as isotropic solids containing a number of randomly distributed microcracks are calculated in order to demonstrate the validity of the proposed method.

Key Words : Computational Mechanics(전산역학), Brittle Fracture(취성 파괴), Meshless Method(무요소법), Natural Element Method(자연요소법), Material Damage(재료 손상), Microcrack(마이크로 크랙), Elastic Moduli(탄성 계수)

1. 서론

과거 10년간 큰 발전을 거듭한 무요소법⁽¹⁾은 문자 그대로 격자 또는 요소를 필요로 하지 않는 수치해석 수법이다. 절점을 분포시키는 것만으로 해석 대상의 모델링이 가능하며, 입력 데이터 작성의 소모가 크게 경감되는 장점이 있다. 그 대표적인 예로서, Belytschko 등의 EFGM(Element-Free Galerkin Method)⁽²⁾과 Sukumar 등의 자연요소법(Natural

Element Method: NEM)⁽³⁾ 등을 들 수 있다. 이러한 수법은 크랙 선단에 대해 정밀한 모델링이 쉽기 때문에, 진전거동을 포함한 크랙 해석에 적합하지만, 다수의 마이크로 크랙 또는 마이크로 보이드를 동반하는 손상해석으로의 적용 예는 아직 없다.

한편, 연속체 손상역학에서의 마이크로 크랙 밀도 방정식, 마이크로 크랙 밀도와 매크로 탄성 계수의 관계식 등을 수치적으로 평가하기 위해, 계산 불연속체 역학 모델에 의한 메

* 전주대학교 기계자동차공학과
+ 교신저자, 전주대학교 기계자동차공학과 (hkim@jj.ac.kr)
주소: 560-759 전북 전주시 완산구 효자동3가 1200번지

소해석 수법이 제안되었다^(4,5). 메소 해석이라 함은, 해석 대상이 되는 모델의 크기를 기준으로 매크로 스케일과 마이크로 스케일의 중간 레벨에서 수행되어짐을 의미하는데, 상대 변위에 저항하는 스프링 계에 의해 결합된 강체 요소로 구성되는 계산 불연속체 역학 모델을 이용하여, 취성고체의 마이크로 크랙킹 거동을 메소스케일(이 경우는 마이크로 크랙 수치의 스케일)로 직접적으로 해석하였다. 요소분할에는 Voronoi 분할이 이용되고, 개개의 마이크로 크랙의 발생, 진전, 개구·폐쇄가 일일이 고려되기 때문에, 이 방법에 의한 계산 결과는 가상 실험 데이터로서, 연속체 손상역학 모델의 평가 및 개량 등에 이용할 수 있다. 이 수법은 물리적 의미가 명확하고, 정식화 프로그래밍도 쉽다는 것이 장점이지만, 강체요소·스프링 계라고 하는 수학적 입장에서 볼 때 근사도가 낮은 모델링을 하고 있기 때문에, 스프링 계수의 합리적인 결정, 해의 계통적 정도 향상, 이방성의 고려 등이 난점으로 지적되고 있다. 또한, 마이크로 크랙의 개구·폐쇄 특성과 관련된 실험 연구로서, Yoon은 실용 재료인 기계 구조용 탄소강을 사용하여 미소크랙의 길이나 결합의 크기를 변화시켜 피로강도에 미치는 영향을 정성적⁽⁶⁾ 및 정량적⁽⁷⁾으로 평가하였다.

본 연구에서는, NEM을 마이크로 크랙킹을 중심으로 한 재료손상 거동에 적용함으로써, 상술한 문제점을 해소한 새로운 이차원 메소해석 수법을 제안한다. NEM에서도 형상함수의 정의에 Voronoi 다각형이 이용되고 있어, 계산 불연속체 역학 모델에 의한 메소해석 수법과의 대응을 고려할 때 적합하다. NEM은 해석 영역에 유한개의 절점을 배치하고, 이를 모점으로 하는 Voronoi 다각형, Delaunay 삼각형 및 그 외접원에 기초한 형상함수가 정의되고 에너지 적분이 이루어진다. Voronoi 분할은 주어진 절점분포에 따라 자동적으로 결정되기 때문에 NEM은 무요소법으로 분류되기도 한다.

2. NEM의 개요 및 메소손상해석으로의 적용

2.1 Voronoi 분할과 Delaunay 삼각형

Voronoi 분할은 계산 기하학적 개념이며, 이차원의 경우, 평면에 배치된 유한개의 모점의 세력권을 나타내는 다각형 영역 분할도이다. 모점은 평면내의 임의 위치에 설정할 수 있으며, Voronoi 다각형의 각 변, 즉 Voronoi 변은 그 양변의 모점의 수직이등분선이 된다. Fig. 1은 모점(흑환점), Voronoi 다각형(점선), Delaunay 삼각형(실선) 및 그 외접원(일점쇄선)을 나타낸다. Voronoi 다각형의 정점인 Voronoi 점은 인접한 3개의 모점으로 이루어지는 Delaunay 삼각형

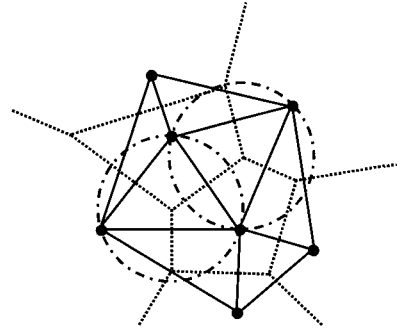


Fig. 1 Voronoi diagram, Delaunay triangles and natural neighbor circumcircles for a set of seven nodes

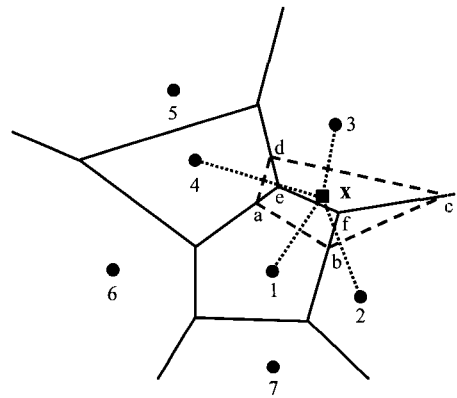


Fig. 2 Construction of natural neighbor coordinates

의 외접원의 중심이 된다. Voronoi 분할도는 다결정체의 형상모델로서 종종 이용된다. 즉, Voronoi 변은 결정립계에 대응하고 있고, 불특정 방향으로 다수 발생하는 마이크로 크랙의 좋은 모델이 된다.

2.2 형상함수와 변위함수

임의의 점 x 가 Delaunay 삼각형(n_j, n_k, n_l)의 외접원의 내부에 있을 경우, 절점 n_j, n_k, n_l 은 x 의 근방절점(natural neighbors)이라고 정의된다. 여기서, 이차 Voronoi 다각형 T_{ij} 를 식 (1)과 같이 정의한다. T_{ij} 는 n_j 에 가장 가깝고, 다음으로 n_j 에 가까운 절점들의 집합이다.

$$T_{ij} = \{x \in \mathbf{R}^2 : d(x, x_j) < d(x, x_k) < d(x, x_l) \forall K \neq I, J\} \quad (1)$$

여기서, $d(x, x_i)$ 는 유클리드 공간 R^2 에 있어서의 거리로 의미한다. 여기서, 적분점 x 와 근방절점 I 에 의해 만들어지

는 Voronoi 다각형 T_{X^i} 의 면적을 $A_i(\mathbf{x})$ 라고 하면, 근방절점 I 에 대한 형상함수는 식 (2)와 같이 정의된다.

$$\phi_I(\mathbf{x}) = A_i(\mathbf{x})/A(\mathbf{x}) \quad (2)$$

여기서, I 는 $1 \rightarrow n$, $A(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n A_i(\mathbf{x})$ 이고, n 은 \mathbf{x} 의 근방절점의 총수가 된다. 예를 들어, Fig. 2에 있어서, 근방절점 1에 대한 형상함수는 다음과 같다.

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \frac{A_{abfe}}{A_{abcd}} \quad (3)$$

따라서, 적분점 \mathbf{x} 의 변위함수 $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ 는 근방절점에서의 변위 \mathbf{u} 와 형상함수 $\phi_i(\mathbf{x})$ 를 이용하여 다음의 식과 같이 주어진다.

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i \quad (4)$$

2.3 메소손상해석으로의 적용

여기서는 마이크로 크랙을 포함한 고체의 매크로 탄성 계수 평가에 대한 것으로 한정한다. 즉, 구성요소(constitutive element)로서의 정방형 영역 내부에 미리 불특정 방향으로 다수의 마이크로 크랙을 분포시켜, 단축인장 매크로 응력 상태하의 변형을 해석함으로써, 매크로 탄성 계수(영의 계수와 프와송비)와 마이크로 크랙 밀도와의 관계를 수치적으로 평가한다. 본 연구에서는 이차원 문제, 즉 모든 마이크로 크랙면이 동일 좌표축(z축)으로 평행한 경우를 다룬다. 이 경우의 마이크로 크랙 밀도를 다음 식으로 정의한다⁽⁴⁾.

$$\xi = \sqrt{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} \frac{l_i^3}{8L^3} \quad (5)$$

여기서, L 은 정방형 영역의 변의 길이이고, N_T 는 마이크로 크랙의 총수이며, l_i 는 각 마이크로 크랙의 길이이다. 마이크로 크랙은 Fig. 3에서 보는 것과 같이, 계산 불연속체 역학 모델에 의한 메소해석과 유사하게, Voronoi 다각형의 변상에 존재한다고 가정한다.

계산 불연속체 역학 모델에 있어서, 이 위치에 강제 요소 간을 결합하는 스프링 계를 배치하고 있고, 이러한 스프링 계수를 제어함으로써, 폐쇄와 표면 마찰 등을 포함한 마이크로 크랙의 역학적 효과를 나타내고 있다. NEM을 이용한 본 연구에서는, 다음과 같이 마이크로 크랙의 역학적 영향을 표현한다. 즉, Fig. 4와 같이 각 마이크로 크랙에 대해

인접 절점으로부터 만들어지는 2개의 Delaunay 삼각형(Δ_{123} , Δ_{134})이 정해진다. 이러한 삼각형 내부의 계 6개의 수치 적분점(가우스 적분점)에서의 응력·변형을 관계를 형성하는 탄성 계수 행렬의 값을 제어함으로써, 각 마이크로 크랙의 역학적 효과를 표현하고자 한다. 전체 좌표계에 있어서의 등방성 탄성 계수 행렬 $[D_1]$ 및 이방성 탄성 계수 행렬 $[D_2]$ 는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$[D_1] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[D_2] = \frac{E_2}{(1-n\nu_2^2)} \begin{bmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-n\nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (7)$$

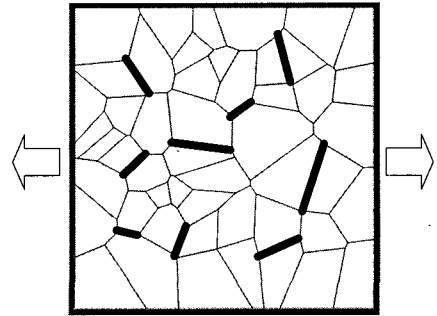


Fig. 3 Representation of microcracks

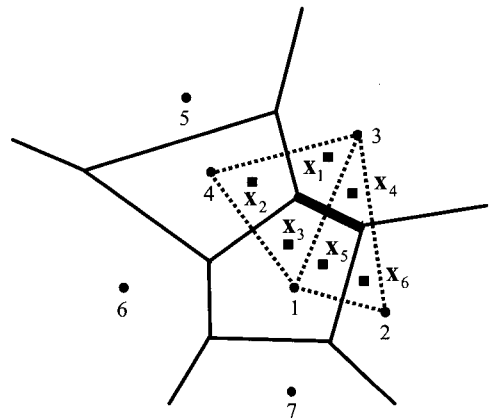


Fig. 4 Numerical consideration of a microcrack

여기서,

$$n = \frac{E_1}{E_2}, m = \frac{G_2}{E_2} = \frac{1}{2(1+\nu_2)} \quad (8)$$

이러한 탄성 계수 행렬 중의 탄성 계수를 조정함으로써, 마이크로 크랙의 역학적 효과를 근사한다. 즉, 개개의 마이크로 크랙의 역학적 효과를 그 근방에서 평균적으로 표현하고자 하는 것으로, 응력 특이성, 상호 간섭 등을 정밀하게 해석하고자 함을 목적으로 하지 않는다. 이 때, Fig. 4에서 마이크로 크랙에 가까운 4개의 적분점 $[x_1, x_3]$ 및 $[x_4, x_5]$ (이를 최근방 적분점이라 한다) 및 그 다음 가까운 적분점 $[x_2, x_6]$ (이를 근방 적분점이라 한다)에 대해 3장의 (a), (b)와 같이 탄성 계수 행렬을 조정함으로써 마이크로 크랙의 역학적 효과를 표현하였다.

3. 자연요소법(NEM)에 의한 메소손상해석

본 장에서는 불특정 방향으로의 분포를 가지는 다수의 마이크로 크랙을 포함한 정방형 고체에 단축인장 매크로 응력을 주어, 그 매크로 탄성 계수를 자연요소법(NEM)을 이용한 새로운 메소해석법에 의해 수치적으로 평가한다. Fig. 5(a)와 Fig. 5(b)는 각각 계산에 사용된 절점 배치도와 Voronoi 분할도를 나타낸다. 절점수, 곧 Voronoi 다각형 수는 1700이다. Fig. 6은 Voronoi 변 중에서 랜덤하게 선택한 마이크로 크랙 분포도이며, 마이크로 크랙의 수는 900(마이크로 크랙 밀도: 0.0353)이다.

3.1 등방성 고체의 매크로 탄성 계수

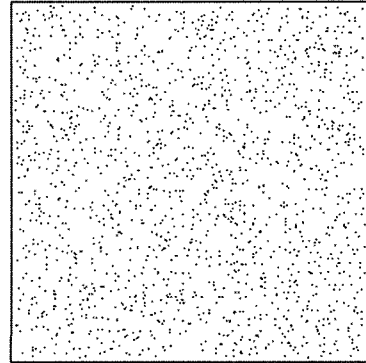
먼저, Budiansky와 O'Connell의 근사이론해석⁽⁸⁾과 같이, 마이크로 크랙을 포함하는 등방성 고체가 인장 매크로 응력을 받을 경우의 변형을, 마이크로 크랙의 폐쇄를 무시하여 계산하고, 마이크로 크랙 밀도와 매크로 탄성 계수의 관계를 구하였다. 이 경우, 인장 매크로 응력하의 탄성 계수와 압축 매크로 응력하의 탄성 계수의 구별이 없게 된다.

각 마이크로 크랙의 역학적 효과를 표현하기 위해서, 시계산에 의해 국소적 탄성 계수를 다음과 같이 산정하였다.

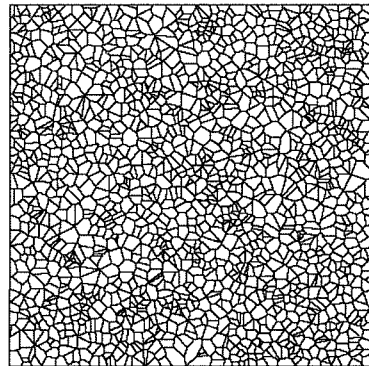
- (a) 최근방 적분점에서 : $[D_1] \rightarrow 0$
- (b) 근방 적분점에서 : $[D_1] \rightarrow 0.2 \times [D_1(\nu=0)]$

이 가정에 의해 계산된 Fig. 8의 계산결과가, 계산 불연속체 역학 모델에 의한 계산결과⁽⁴⁾와 정량적으로 양호하게 대응하고 있음을 근거로 하여 위와 같이 채택하였다. 즉, Fig.

7에서 보는 바와 같이, 탄성 계수 저감율이 0.1에서 0.5사이로 변함에 따른 영의 계수는 조금씩 증가하는 경향을 보이고 있지만, 반대로 프와송비의 전체적인 변화는 그다지 큰 차이



(a) Nodal grid



(b) Voronoi diagram

Fig. 5 Nodal grid and Voronoi diagram for 1700 nodes

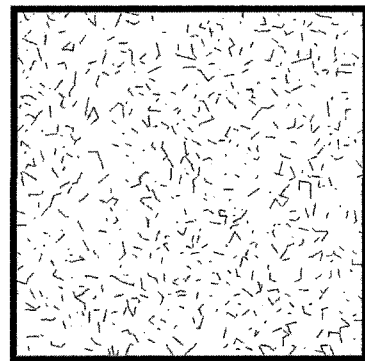
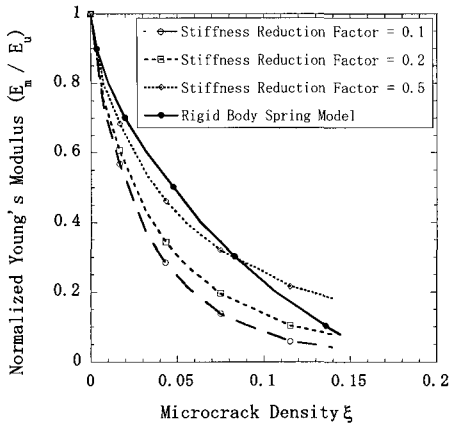
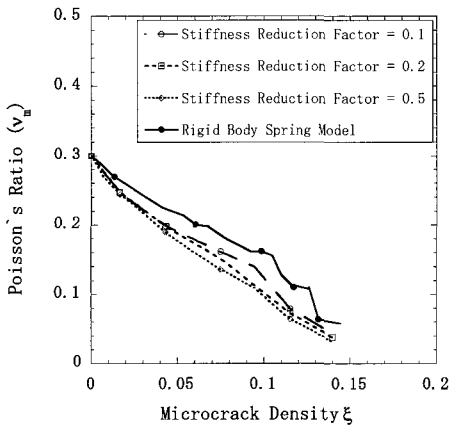


Fig. 6 Distribution of microcracks



(a) Macro Young's modulus

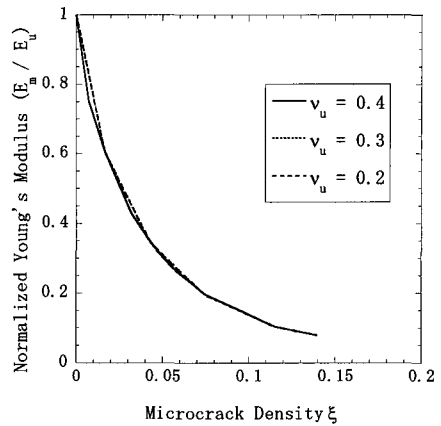


(b) Macro Poisson's ratio

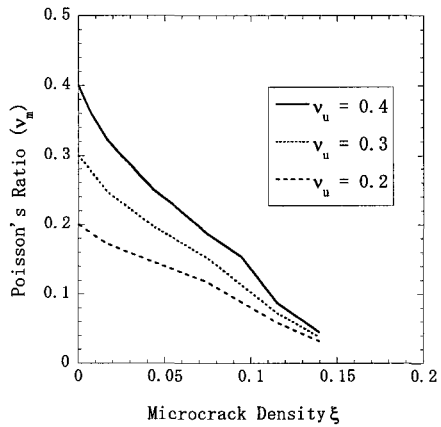
Fig. 7 Determination of stiffness reduction factor

는 아니지만 조금씩 감소하는 경향을 보이는 점에 주목하여, 근방 적분점에서의 탄성 계수 저감율을 0.2로 한 경우가 강체 스프링 모델에 의한 계산 결과와 총체적으로 양호한 대응을 나타낼 수 있다. 또한, 마이크로 크랙 밀도에 따른 프와송비의 변화를 볼 때 자연요소법을 이용한 메소해석 결과가 강체 스프링 모델에 의한 결과보다 다소 안정된 해를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 8은, 마이크로 크랙 밀도와 매크로 탄성 계수(영의 계수에 대해선 비손상체의 영의 계수로 표준화된 값)의 관계에 대한 계산 결과로서, 비손상체의 프와송비로서 $\nu=0.2, 0.3, 0.4$ 의 3종류의 값이 가정되었다. 이차원 모델과 삼차원 모델의 차이가 있기 때문에, 구해진 계산결과를 Budiansky



(a) Macro Young's modulus



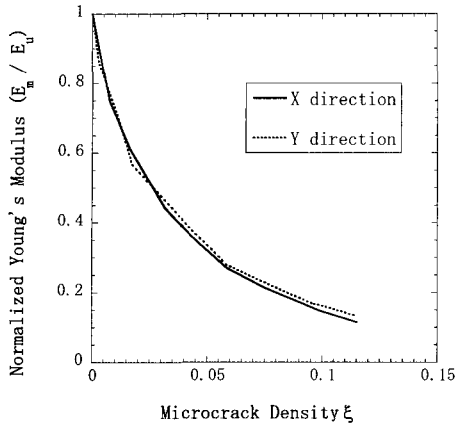
(b) Macro Poisson's ratio

Fig. 8 Macro elastic moduli versus microcrack density

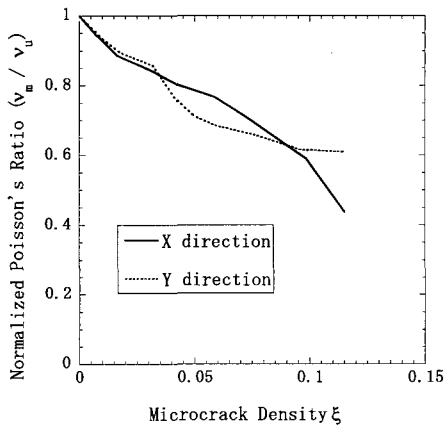
와 O'Connell의 근사이론해석 결과⁽⁸⁾와 직접 비교할 수 없지만, 영의 계수와 프와송비 모두 정성적 경향은 대응하고 있다. 즉, 양자 모두 마이크로 크랙 밀도의 증가에 따라 거의 같은 비율로 선형적으로 저하되고, 영의 계수의 저하율은 비손상체의 프와송비의 값에는 의존하지 않음을 알 수 있다.

3.2 이방성 고체의 매크로 탄성 계수

마이크로 크랙을 포함한 이방성 고체의, 인장 매크로 응력 상태에서, x, y 방향의 변형을 계산하여, 마이크로 크랙과 매크로 탄성 계수와의 관계를 구하였다. 아래와 같이 이방성 고체의 재료 상수를 이용하였다.



(a) Macro Young's modulus



(b) Macro Poisson's ratio

Fig. 9 Macro elastic moduli versus microcrack density for anisotropic solids under tensile macrostress

$$\begin{aligned}
 E_u &= 3 \times 10^7 \text{ psi}, \nu_u = 0.3 : X \text{ direction} \\
 E_u &= 2 \times 10^7 \text{ psi}, \nu_u = 0.2 : Y \text{ direction}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

마이크로 크랙의 역학적 효과에 관해서는 마이크로 크랙을 등방성이라 가정하고, 국소적 탄성 계수를 다음과 같이 산정하였다.

(a) 최근방 적분점에서 : $[D_2] \rightarrow 0$

(b) 근방 적분점에서 : $[D_2] \rightarrow 0.2 \times [D_2(\nu_2=0)]$

Fig. 9는 인장 매크로 응력상태에서의 x방향 및 y방향의 매크로 탄성 계수 값의 변화를 나타내고 있다. x방향 및 y방향의 매크로 탄성 계수 변화는 거의 같은 경향을 보이고 있음이 확인되었다. 이러한 계산은 계산 불연속체 역학 모델에

의한 메소해석법으로는 곤란하다.

4. 결론

본 연구에서는, 자연요소법을 이용한 새로운 메소 손상해석 수법을 제안하여, 다수의 마이크로 크랙을 포함한 재료의 손상 해석에 적용하였다. 즉, 자연요소법에 의한 이산화 해석에 있어서, Voronoi 변 근방의 탄성 계수 행렬을 제어함으로써, Voronoi 변에 존재하는 마이크로 크랙의 역학적 효과를 표현하였다. 이 방법에 의해, 불특정 방향으로 분포한 마이크로 크랙을 포함한 등방성 및 이방성 고체의 매크로 탄성 계수를 계산하여, 전자에 대한 기존의 계산 불연속체 역학 모델에 의한 메소해석 결과와 정성적으로나 정량적으로 대응하는 것을 확인하였다. 계산 순서가 꽤 복잡하게 되고, 마이크로 크랙을 물리적으로 충실히 표현하고 있지는 않지만, 계산 불연속체 역학 모델에 의한 메소해석에서 요구되는 스프링 계수의 결정이 불필요하다는 점, 이방성 고체로의 적용이 용이하다는 점 등이 본 해석 수법의 특징이다.

참고 문헌

- (1) Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P., 1996, "Meshless Methods: An Overview and Recent Developments," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, No. 1, pp. 3-47.
- (2) Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., 1994, "Element-free Galerkin Methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 2, pp. 229-256.
- (3) Sukumar, N., Moran, B. and Belytschko, T., 1998, "The Natural Element Method in Solid Mechanics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, No. 5, pp. 839-887.
- (4) Toi, Y. and Che, J. S., 1994, "Computational Damage Mechanics models for Brittle Microcracking Solids based on Mesoscopic Simulations," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 48, No. 4, pp. 483-498.
- (5) Toi, Y. and Kiyosue, T., 1995, "Damage Mechanics Models for Brittle Microcracking Solids based on Three-dimensional Mesoscopic Simulations," *Engineering*

Fracture Mechanics, Vol. 50, No. 1, pp. 11~27.

- (6) Yoon, M. J., 1995, "Quantitative Evaluation of Fatigue Strength using a Surface Defective Low Carbon Steel," *Transactions of the Korean Society of Machine Tool Engineers*, Vol. 4, No. 4, pp. 42~49.
- (7) Yoon, M. J., 1997, "Evaluation of Fatigue Strength

and Characteristics of Fatigue Crack Closure in SM35C Steel," *Transactions of the Korean Society of Machine Tool Engineers*, Vol. 6, No. 1, pp. 45~50.

- (8) Budiansky, B. and O'Connell, R. J., 1976, "Elastic Moduli of a Cracked Solid," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 12, No. 2, pp. 81~97.