

쿨롱 마찰력 추정과 보상을 통한 역진자 시스템의 제어 성능 개선

論 文
55D-11-3

Estimation and Compensation of the Coulomb Friction in an Inverted Pendulum

朴德基* · 左東京** · 洪錫教†
(Duckgee Park · Dongkyoung Chwa · Suk-Kyo Hong)

Abstract - When the nonlinearities, such as friction and backlash, are not considered in the controller design, undesirable oscillations can occur in the steady-state response of a control system. This paper deals with a method to reduce oscillations that often appear in the steady-state response of a pendulum system, which is controlled by a state feedback controller based on the linearized system model. With an assumption that the oscillations shown in the steady-state are caused by the Coulomb friction, we improve the performance of stabilization and tracking by estimating and compensating for the Coulomb friction in the pendulum system. Experimental results show that the control performance can be improved sufficiently by the proposed method, when it is applied to an inverted cart pendulum which is a multi-variable unstable system. Furthermore, we could see that the Coulomb friction model used in the estimation of the friction is valid in applying the suggested method.

Key Words : Coulomb friction, nonlinear observer, friction compensation, inverted pendulum

1. 서 론

시스템의 수학적 모델이 실제 시스템의 특성을 완벽하게 표현하기 위해서는 모델 자체가 매우 복잡하고 해석하기 까다로운 비선형 모델로 정의되는 것이 일반적이다. 하지만 제어기를 설계할 경우 시스템의 비선형 모델을 직접 다루기 보다는 특정한 조건하에서 선형화한 선형 모델을 이용하는 방법이 보다 널리 쓰인다. 특정 조건하에서 선형화가 가능한 비선형성과는 달리, 쿨롱 마찰력(Coulomb friction)이나 입력의 포화(saturation), 백래쉬(backlash), 히스테리시스(hysteresis)와 같은 강한 비선형 요소들은 비연속적인 특성으로 인해 주어진 시스템의 선형화를 어렵게 한다[1]. 이러한 강한 비선형성들은 특정 동작점에서 선형화가 이루어지기 어렵기 때문에, 많은 경우 선형화 단계에서 무시되고 있다. 특히 위에서 언급된 비선형성들 가운데 쿨롱 마찰력의 경우 이를 무시한 채 선형화한 시스템 모델을 사용하여 제어 시스템을 구현하게 되면, 실제 응답에 리밋 싸이클(limit cycle)이나 스틱-슬립(stick-slip)현상, 매우 큰 정상 상태 추종 오차(steady-state tracking error)등의 원치 않는 응답이 발생하기도 한다[2]-[4]. 이렇게 시스템 응답에 악영향을 미치는 쿨롱 마찰력을 정의하거나 추정, 분석, 보상하는 방법에 관한 연구는 비단 제어시스템 설계뿐만 아니라

기계 설계 및 분석 등의 분야에 있어서도 다양한 방식으로 진행되고 있다.

기계시스템 관점에서의 마찰력에 대한 연구는 마찰력 모형을 개선하거나 이미 제안된 마찰력 모델을 이용하여 특정 시스템의 마찰력을 잘 표현할 수 있는 계수를 실험적으로 찾아내는 기법 등에 초점이 맞춰지기도 한다[6],[7]. 다양한 분야의 마찰력에 관한 연구에서 공통적으로 중요시 되는 점이 있다면, 바로 시스템에 영향을 주는 마찰력이 과연 어떤 형태의 모형인가 하는 것이다. 고전적인 마찰력 모형에서는 단순히 속도에 선형적으로 비례하는 마찰력 요소와 속도의 방향에 종속되는 요소 등을 포함하는 모형을 사용하였지만, 이런 개념의 마찰력 모형으로는 스틱-슬립 같은 현상을 설명하기 힘들다[2],[8]. 따라서 최근 연구에서는 점성 마찰력(viscous friction)과는 달리, 물체가 마찰력을 일으키는 면과의 상대 속도가 저속인 구간에서 속도에 반비례하는 마찰력이 발생하는 Stribeck 효과와 마찰력의 비대칭적 특성을 설명하기 위해, LuGre 모형이나 Dahl 모형 등의 다이내믹 마찰력 모형(dynamic friction model)을 이용하기도 한다[5],[7]-[9]. 이러한 연구에서 사용되는 마찰력 모델의 계수들은 실제 실험을 통하여 구하기도 하지만[6],[7], 관측기를 이용한 추정 기법을 통해 구해내기도 한다[3],[10],[11]. 그러나 실제 실험적인 방법을 통해 마찰력 모델의 계수를 알아내는 방법은 여러 가지 실험 환경적인 측면에서 유용하지 못한 경우가 많다. 또한 관측기를 이용하여 마찰력 모델의 계수를 추정하는 연구에서 다루는 시스템은 많은 경우 마찰력의 영향이 속도에 대한 1차 운동 방정식으로 표현되는 단일입출력 시스템으로 제한이 되었다. 또한 시스템에 존재하는 마찰력을 오로지 쿨롱 마찰력만으로 가정하여 추정함으로써,

* 正 會 員 : 亞 洲 大 電 子 工 學 部 博 士 課 程

** 正 會 員 : 亞 洲 大 電 子 工 學 部 助 教 授 · 工 博

† 교 신 저 자 , 正 會 員 : 亞 洲 大 電 子 工 學 部 教 授 · 工 博

E-mail : skhong@ajou.ac.kr

接 受 日 字 : 2006年 9月 4日

最 終 完 了 : 2006年 10月 9日

시스템에 실제적으로 존재하는 점성 마찰력 등의 다른 마찰력 요소들이 고려되지 않았다[10],[11].

앞선 연구들과 달리 이 논문에서는 불안정 다변수 시스템에 존재하는 마찰력 요소 중 쿨롱 마찰력이 시스템의 응답에 미치는 영향에 대해서 분석하고, 이 쿨롱 마찰력의 영향을 제거하는 방법에 대해서 연구한다. 한편 점성 마찰력은 시스템 모델에서 이를 포함하도록 함으로써 쉽게 고려될 수 있다. 이를 위해 불안정 다변수 시스템의 연구에 널리 이용되는 역진자 시스템의 정상 상태 응답에서 보이는 리밋 싸이클을 제거하기 위해 시스템에 존재하는 쿨롱 마찰력을 비선형 관측기를 통하여 추정하고, 추정된 쿨롱 마찰력을 선형 제어를 이용하여 보상함으로써 역진자 시스템의 제어 응답 성능을 개선하고자 한다. 또한 이를 위해서 앞서 언급한 LuGre 모형이나 Dahl 모형과 같은 복잡한 마찰력 모형 대신 비교적 단순한 마찰력 모델을 이용하여도 충분히 만족할 만한 결과를 얻을 수 있음을 모의실험과 수리형 역진자 시스템을 이용한 실험을 통하여 증명한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 고전적인 마찰력 모형을 이루는 요소 중에 쿨롱 마찰력에 대해 간단히 살펴보고, 쿨롱 마찰력이 불안정한 다변수 시스템에서 미치는 영향에 대해서 생각해본다. 특히 주어진 역진자 시스템에서 쿨롱 마찰력에 의해 리밋 싸이클이 나타나는 이유와 그 영향에 대해 고찰해본다. 3장에서는 구체적으로 역진자 시스템의 쿨롱 마찰력 추정을 위한 마찰력 관측기를 유도하고, 추정된 쿨롱 마찰력을 보상함으로써 추종 응답 성능을 향상시키는 방법을 제안하고 모의실험을 통하여 제안된 방법의 타당성을 검증한다. 4장에서는 2장과 3장의 내용을 바탕으로 실제 불안정 다변수 시스템인 역진자 시스템을 이용하여 제안된 방법의 유용성을 확인하기 위한 실험 내용과 실험 결과를 수록한다. 마지막으로 5장에서는 제안된 쿨롱 마찰력 보상 방법의 결과에 대하여 논의한다.

2. 쿨롱 마찰력과 역진자 시스템

2.1 마찰력 모델

고전적인 마찰력 모델에서 주로 고려되는 마찰력 요소는 그림 1에서와 같이 쿨롱 마찰력(Coulomb friction or dry friction), 점성 마찰력(viscous friction), 정지 마찰력(static friction) 등이 있다[8]. 정지 마찰력은 쿨롱 마찰력이나 점성 마찰력에 비해서 정상 상태에서 시스템에 미치는 영향이 상대적으로 작기 때문에 이 논문에서는 고려하지 않는다. 반면 점성 마찰력의 경우 시스템에 감쇄효과를 주는 주요인으로서 때에 따라서는 시스템의 안정성 등에 긍정적인 영향을 주는 무시할 수 없는 마찰력 요소이다. 이러한 점성 마찰력은 물체의 속도에 대해 선형적인 특성을 갖기 때문에 시스템의 선형 동역학 모델에 포함시킬 수 있다. 속도에 대해 선형적으로 비례하는 힘을 발생시키는 점성 마찰력과는 달리, 쿨롱 마찰력은 속도의 크기에는 상관없이 속도의 방향에 대해서만 중속되어 일정한 크기의 힘으로 발생되기 때문에 실험 모델에 포함시킬 수가 없다. 따라서 시스템의 응답에 가장 큰 영향을 미치는 쿨롱 마찰력을 알아내기 위한 다른 노력이 필요하다.

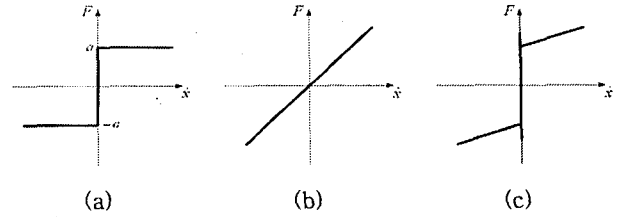


그림 1 마찰력과 속도의 관계: (a)쿨롱 마찰력 (b)점성 마찰력 (c)쿨롱 마찰력+점성 마찰력+정지 마찰력

Fig. 1 Relation between friction and velocity: (a)Coulomb friction (b)viscous friction (c)Coulomb friction+viscous friction+static friction

그림 1 (a)에서 볼 수 있듯이 쿨롱 마찰력은 물체의 속도 \dot{x} 의 크기에 관계없이 오로지 속도의 방향에 따라서 일정하게 고정된다. 이때 질량 m 을 갖는 물체의 운동 방정식을 물체의 위치 x 에 대하여 표현한다면 쿨롱 마찰력 $F_c(\dot{x})$ 의 영향은 식(1)과 식(2)와 같이 표현할 수 있다.

$$m\ddot{x} = u - F_c(\dot{x}) \quad (1)$$

$$F_c(\dot{x}) = a \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (2)$$

식(1)과 식(2)에서 x 는 물체의 위치이고, u 는 마찰력을 제외한 나머지 힘들의 합, a 는 물체의 무게와 마찰계수에 의해 정해지는 0 보다 큰 상수다. 여기서 $\dot{x} > 0$ 이면 $\operatorname{sgn}(\dot{x}) = 1$, $\dot{x} < 0$ 이면 $\operatorname{sgn}(\dot{x}) = -1$ 이고, $\dot{x} = 0$ 이면 $\operatorname{sgn}(\dot{x}) = 0$ 이다. 단, 식(2)에서 만일 $\dot{x} = 0$ 이고 $|u| \leq a$ 일 때는 시스템에 가해지는 입력 u 와 크기는 같고 방향이 반대인 마찰력이 발생되며 물체는 정지 상태를 유지하게 된다.

2.2 역진자 모델 동역학 방정식

2.2.1 쿨롱 마찰력이 존재하지 않는 역진자 시스템의 안정화

이 소절에서는 쿨롱 마찰력이 존재하지 않는 일반적인 비선형 역진자 시스템에 대해서 간단히 살펴보기로 한다. 불안정한 시스템의 안정화 방법에 관한 연구에 널리 사용되는 일반적인 실험 장치인 역진자 시스템은 진자(pole)의 기울어

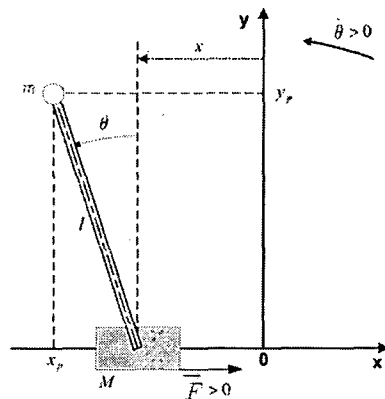


그림 3 역진자 시스템의 모형도.

Fig. 2 Diagram of an inverted pendulum model

진 각도와 그 각속도, 그리고 수레(cart)의 위치와 그 속도에 대해 식(3), 식(4)와 같은 비선형 동역학 방정식으로 표현된다.

$$\vec{F} = (M+m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 - ml\cos\theta \cdot \ddot{\theta} \quad (3)$$

$$(I+ml^2)\ddot{\theta} = mgl\sin\theta + ml\cos\theta \cdot \ddot{x} - b_p\dot{\theta} \quad (4)$$

여기서 I 는 진자의 회전 관성 모멘트이고, b 와 b_p 는 각각 수레와 진자의 점성 마찰 계수(viscous friction coefficient)로써 점성 마찰력이 시스템의 모델에 포함되어 있다.

위의 동역학 방정식으로 표현된 역진자 시스템을 $\theta = 0^\circ$ 근처에서 선형화한 선형 모델을 이용하여 $\underline{x} = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$ 로 정의된 상태변수를 원하는 값으로 추종하도록 상태 궤환(state feedback) 안정화 제어를 구성할 수 있다. 원하는 성능 지수를 만족하도록 하는 궤환 이득을 $\underline{K} = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4]$ 라 하면, $\vec{F} = -\underline{K}\underline{x}$ 가 역진자 시스템의 입력으로 가해지게 된다. 따라서 상태 궤환 제어가 적용된 역진자 시스템의 비선형 동역학 방정식은 식(5)와 식(6)으로 바뀌게 된다.

$$-\underline{K}\underline{x} = (M+m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 - ml\cos\theta \cdot \ddot{\theta} \quad (5)$$

$$(I+ml^2)\ddot{\theta} = mgl\sin\theta + ml\cos\theta \cdot \ddot{x} - b_p\dot{\theta} \quad (6)$$

식(5)와 식(6)으로 표현된 선형 안정화 제어를 포함한 비선형 역진자 시스템의 평형점은 모든 상태 변수의 변화가 없는 상태, 즉 $\dot{\underline{x}} = 0$ 인 상태이므로 평형점은

$$-K_1x - K_3\theta = 0 \quad (7)$$

$$\sin\theta = 0 \quad (8)$$

을 만족하는 상태변수의 값이다. 그러므로 역진자 시스템은 $x = 0[m]$, $\theta = 0^\circ$ 에서 평형점을 갖는다.(단, 여기서 $\theta = \pm 180^\circ$ 은 고려하지 않는다.) 쿨롱 마찰력이 존재하지 않은 역진자 시스템은 선형 제어기에 의해 진자의 불안정 평형점이었던 $\theta = 0$ 에서 안정화 되고 원하는 수레의 위치를 $x = 0$ 으로 할 수 있게 된다.

2.2.2 쿨롱 마찰력이 존재하는 역진자 시스템의 특성

앞의 상황과는 달리, 실제 역진자 시스템에 수레와 미끄러짐 면에서 무시하지 못할 정도의 쿨롱 마찰력이 존재한다고 가정한다면, 식(3)과 식(4)의 비선형 모델은 \vec{F} 대신 $u - F_c(\dot{x})$ 를 대입하여 다음과 같이 쿨롱 마찰력 $F_c(\dot{x})$ 를 포함하는 동역학 방정식으로 표현된다.

$$u - F_c(\dot{x}) = (M+m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 - ml\cos\theta \cdot \ddot{\theta} \quad (9)$$

$$(I+ml^2)\ddot{\theta} = mgl\sin\theta + ml\cos\theta \cdot \ddot{x} - b_p\dot{\theta} \quad (10)$$

식(9)에서 u 는 시스템 입력으로 수레에 가해지는 힘이다. 실제로는 수레와 미끄러짐 면 사이의 쿨롱 마찰력 외에도 진

자의 회전축에 존재하는 쿨롱 마찰력이 식(10)에도 포함되어야 하지만 수레의 마찰력에 비해 전체 시스템에 미치는 영향이 미약하여 이 부분은 고려하지 않는다.

쿨롱 마찰력이 존재하는 역진자 시스템에 대해 앞서 이용한 선형 제어를 그대로 적용하여 안정화를 시도한다면 역진자 시스템의 평형점은 원래 우리가 했던 예상과 다르게 된다. 시스템에 안정화 입력 $u = -\underline{K}\underline{x}$ 을 가했을 때, 평형점은

$$-K_1x - K_3\theta - F_c(\dot{x}) = 0 \quad (11)$$

$$\sin\theta = 0 \quad (12)$$

으로 주어진다. 식(12)에 의해 진자는 마찰력이 없을 때와 마찬가지로 0° 에서 평형점을 갖지만, 수레의 위치 평형점은 더 이상 $0[m]$ 가 아니다. 즉, $\theta = 0^\circ$ 를 계속 유지하고 있다면 수레는 식(2) 및 식(11)로부터 $x \leq \left| \frac{a}{K_1} \right|$ 을 만족하는 어떤 위치에서도 더 이상 변화가 없는 평형 상태를 유지할 수 있게 된다. 이 상황에서 수레의 위치 오차에 비례하는 입력이 시스템에 가해지고 있지만, 마찰력에 의해 수레의 위치는 변하지 않고 수레는 일정한 위치 오차를 보이며 정지하게 된다. 계속해서 수레의 위치와 진자의 각도는 모두 그대로 유지되어 모든 상태 변수의 변화가 없어야 하지만, 실제 실험에서는 시스템이 갖는 불확실성과 실험 환경에 의한 외란 등에 의해 시스템의 상태 변수들은 평형 상태를 오래 유지하지 못하고, 진자의 움직임이 발생하여 수레의 위치를 이동시킬 정도의 입력이 발생하여 다시 새로운 평형점에 도달하게 된다. 즉, 진자는 여전히 $\theta = 0^\circ$ 에서 평형점을 갖지만 수레는 $x \leq \left| \frac{a}{K_1} \right|$ 를 만족하는, 또 다른 위치에서 평형 상태로 접어들게 된다. 이렇게 시간이 계속 지나면 수레와 진자가 각기 일정한 진폭을 가지고 왕복을 계속 반복하는 정상 상태에 놓이게 된다.

그림 3의 실험 결과에서 나타났듯이 쿨롱 마찰력이 무시된 선형 시스템을 이용하여 설계된 제어기를 실제 쿨롱 마찰력이 존재하는 역진자 시스템에 적용하면, 비선형 시스템의 전형적인 특성 중 하나인 리밋 싸이클(limit cycle) 현상이 나타난다.

선형 시스템을 기반으로 설계된 선형 제어기로는 리밋 싸이클을 제거할 방법이 없지만, 만일 수레의 속도에 종속되는 쿨롱 마찰력을 알고 있다면 매우 간단한 보상 방법으로 리

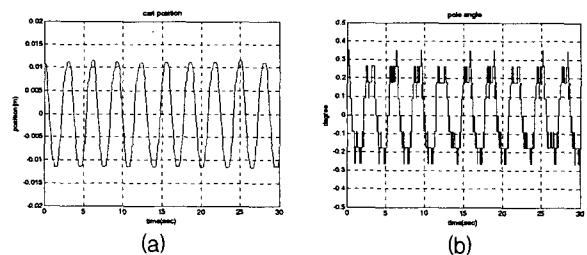


그림 3 선형 제어기를 이용한 쿨롱 마찰력이 포함된 역진자 시스템의 조정 실험 결과: (a)수레위치 (b)진자각도
Fig. 3 The results of regulation experiment of an inverted pendulum with Coulomb friction by a linear controller

및 싸이클 현상을 없앨 수 있다. 즉, 우리가 알고 있는 쿨롱 마찰력을 $\hat{F}_c(\dot{x})$ 라 할 때, 이를 선형 제어기의 입력에 보상하여 제어 입력을

$$u = -Kx + \hat{F}_c(\dot{x}) \quad (13)$$

으로 하면 된다. 식(13)의 쿨롱 마찰력이 보상된 선형 제어 입력에 의한 새로운 평형점은

$$-K_1x - K_3\theta - F_c(\dot{x}) + \hat{F}_c(\dot{x}) = 0 \quad (14)$$

$$\sin\theta = 0 \quad (15)$$

로 바뀌게 된다. 선형 제어기에 정확히 알고 있는 마찰력을 보상해 준다면 $-F_c(\dot{x}) + \hat{F}_c(\dot{x}) = 0$ 이 되어 평형점은 $x = 0[m]$, $\theta = 0^\circ$ 가 된다. 즉 식(13)의 제어 입력을 이용하면, 식(9)는 식(5)로 변하게 되어 마치 쿨롱 마찰력이 없는 역진자 시스템을 선형 제어기를 통해서 제어하는 것과 같은 효과를 얻을 수 있다. 이를 위해서 다음 절에서는 쿨롱 마찰력을 추정하는 관측기 설계 방법을 제시한다.

3. 역진자 시스템에서의 쿨롱 마찰력 추정과 보상

3.1 쿨롱 마찰력이 추가된 역진자 시스템의 선형 모델

역진자 시스템을 안정화하기 위해서 보다 구현하기 쉬운 선형 제어기를 사용하는 목적과 부합하여, 관측기 설계를 위해서도 제어기 설계 때와 마찬가지로 시스템의 선형 모델을 사용한다. 다만 단순 선형화시 무시되어 원하지 않은 응답을 야기하는 쿨롱 마찰력을 추정하기 위하여 쿨롱 마찰력이 추가된 선형 모델을 사용한다. 식(3)과 식(4)로 표현된 비선형 동역학식을 $\theta = 0^\circ$ 에서 선형화한 후, 쿨롱 마찰력 $F_c(\dot{x})$ 를 추가하여 정리하면

$$\ddot{x} = \frac{-(I+ml^2)bx - mlb_p\dot{\theta} + m^2l^2g\theta + (I+ml^2)u - (I+ml^2)F_c(\dot{x})}{(M+m)I + Mml^2} \quad (16)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)mgl\theta - (M+m)b_p\dot{\theta} - ml\dot{x} + ml u - ml F_c(\dot{x})}{(M+m)I + Mml^2} \quad (17)$$

으로 선형화시 무시되었던 쿨롱 마찰력을 역진자 시스템의 선형 모델에 추가함으로써 쿨롱 마찰력을 포함하는 선형 모델을 완성할 수 있다. 엄밀히 말하면 식(16)과 식(17)은 쿨롱 마찰력의 비선형성으로 인해 선형 모델이라 정의하긴 어렵지만 편의상 선형 모델이라고 언급한다.

3.2 쿨롱 마찰력 추정을 위한 비선형 관측기

앞 장에서 쿨롱 마찰력 추정의 필요성과 보상 방법에 관해 다루었다. 쿨롱 마찰력 추정은 비선형 관측기를 통해 달성될 수 있다. 역진자 시스템에 존재하는 쿨롱 마찰력 추정에 사용할 비선형 관측기는 기존의 연구 [10],[11] 등에서

쿨롱 마찰력 추정에 흔히 사용되는 형태로서 다음과 같다.

$$\hat{a} = z - k|\dot{x}|^\mu \quad (18)$$

여기서 \hat{a} 는 식(2)의 쿨롱 마찰력의 계수 a 의 추정 값이다. 쿨롱 마찰력 추정을 위한 관측기를 식(18)로 정의하면 식(16)과 식(17)의 역진자 시스템에 존재하는 쿨롱 마찰력을 추정하기 위한 관측기의 동역학 방정식은 식(19)와 식(20)으로 완성된다.

$$\dot{z} = \frac{k\mu|\dot{x}|^{\mu-1}}{(M+m)I + Mml^2} [-(I+ml^2)bx - mlb_p\dot{\theta} + m^2l^2g\theta + (I+ml^2)u - (I+ml^2)\hat{F}_c(\dot{x})] \text{sgn}(\dot{x}) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_c(\dot{x}) &= \hat{a} \text{sgn}(\dot{x}) \\ &= (z - k|\dot{x}|^\mu) \text{sgn}(\dot{x}) \end{aligned} \quad (20)$$

정리 1: 식(19)와 식(20)의 동역학식을 갖는 마찰력 관측기 (18)은 식(16)과 식(17)로 주어진 역진자 시스템 모델에 대해 마찰력 추정치 \hat{a} 를 생성하고, 이 값은 시간이 지남에 따라 실제 마찰력 a 로 수렴한다.

증명: 실제 마찰력과 관측기에 의해 추정된 마찰력과의 추정 오차를 $\tilde{a} = a - \hat{a}$ 로 정의하면

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}} &= 0 - \dot{\hat{a}} \\ &= -\dot{z} + k\mu|\dot{x}|^{\mu-1} \text{sgn}(\dot{x}) \cdot \ddot{x} \\ &= -k\mu|\dot{x}|^{\mu-1} \frac{(I+ml^2)}{(M+m)I + Mml^2} (F_c(\dot{x}) - \hat{F}_c(\dot{x})) \text{sgn}(\dot{x}) \\ &= -k\mu|\dot{x}|^{\mu-1} \frac{(I+ml^2)}{(M+m)I + Mml^2} (a \text{sgn}(\dot{x}) - \hat{a} \text{sgn}(\dot{x})) \text{sgn}(\dot{x}) \\ &= -k\mu|\dot{x}|^{\mu-1} \frac{(I+ml^2)}{(M+m)I + Mml^2} (a - \hat{a}) \\ &= -k\mu|\dot{x}|^{\mu-1} \frac{(I+ml^2)}{(M+m)I + Mml^2} \tilde{a} \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 세 번째 등식은 식(16), (19)를 이용하여 구할 수 있다. 관측기 계수와 지수항을 각각 $k > 0$, $\mu > 0$ 로 정한다면 식(21)로 주어진 관측기의 추정 오차는 시간이 지남에 따라 결국 0으로 수렴하게 된다. 이것은 관측기의 추정치 $\hat{F}_c(\dot{x})$ 가 역진자 시스템의 실제 쿨롱 마찰력 $F_c(\dot{x})$ 로 수렴한다는 것을 의미한다. [증명 끝]

부연 1: 식(19)와 식(20)을 살펴보면, 마찰력 관측기에서 변수 z 가 마치 마찰력을 출력으로 갖는 동역학 시스템의 상

태 변수와 같은 역할을 한다고 볼 수 있다. 특히 식(19)의 우변 항은 역진자 시스템의 상태 변수의 조합으로 구성되어 있기 때문에, 마찰력 관측기는 측정치의 오차에 관측기 이득을 곱하여 추정 결과를 내는 일반적인 선형 관측기와 비슷한 구조를 가지고 있다.

3.3 추정된 마찰력의 보상

식(16)과 식(17)로 새롭게 정의된 시스템에서 마찰력을 고려하지 않고 설계된 선형 제어기에 추정된 마찰력을 보상한 상태 궤환 제어 입력은

$$u = -Kx + \hat{F}_c(\dot{x}) \tag{22}$$

의 형태로 결론을 내릴 수 있다. 만일 수레를 특정 위치에서 안정화하고자 한다면 식(23)의 제어 입력은 원하는 수레의 위치 x_d 에 대해

$$u = -K[x - x_d \quad \dot{x} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T + \hat{F}_c(\dot{x}) \tag{23}$$

로 수레가 원하는 위치를 추종하도록 설계할 수 있다.

3.4 모의실험

역진자 시스템을 안정화할 때 발생하는 리밋 싸이클이 쿨롱 마찰력의 존재에 기인한다는 가정과 제안된 보상 방법의 타당성을 모의실험을 통하여 확인해 볼 수 있다. 앞의 2장에서 논의되었던 쿨롱 마찰력에 의한 역진자 시스템의 리밋 싸이클 현상을 확인하기 위해 식(2)로 정의된 쿨롱 마찰력 모형에서 상수 $a=0.8$ 로 설정한다. 쿨롱 마찰력을 제외한 역진자 시스템의 계수들은 실험 장치의 실제 값을 이용한다. 또한 수레의 위치와 진자의 각도에 대하여 각각 평균 $0[m]$, 0° 와 표준편차 $0.0003[m]$, 0.002° 의 측정 잡음(measurement noise)을 가했다.

쿨롱 마찰력을 포함하는 식(9)로 표현된 비선형 역진자 시스템을 선형 제어기로 안정화를 시도한 모의실험 결과는 그림 4와 같다. 선형 제어기에 의해 역진자 시스템의 안정화가 이루어지긴 하지만, 예상한 바와 같이 선형화 단계에서 무시되었던 쿨롱 마찰력의 영향으로 모든 상태 변수가 0으로 수렴하지 않고 진동하는 것을 볼 수 있다.

쿨롱 마찰력의 추정을 위한 마찰력 관측기는 지수항 $\mu=1$, 이득은 $k=10$ 로 설정하였다. 앞 절에서 제안하였듯이 선형 제어기에 추정된 쿨롱 마찰력을 보상하는 방법으로 역진자 시스템의 안정화를 시도한 모의실험 결과는 그림 5에 나타난 바와 같이 쿨롱 마찰력에 의해 발생한 리밋 싸이클이 없어진 것을 확인할 수 있다.

역진자 시스템에 수레 위치에 대한 추종 입력이 가해지는 상황에서 상태 궤환 제어기만으로 제어하는 경우와 마찰력 관측기를 통하여 추정된 쿨롱 마찰력을 보상한 모의실험 결과를 그림 6에서 비교하였다. 여기서 수레 위치에 대한 추종 입력 x_d 는 $\pm 0.05[m]$ 이다. 그림 6에서 쿨롱 마찰력을 보상한 경우, 정상 상태에서 진동이 제거되고 정확하게 추종 입력을 따르는 것을 확인할 수 있다.

모의실험을 통하여, 역진자 시스템에 존재하는 쿨롱 마찰력이 리밋 싸이클을 유발한다는 것과 마찰력 관측기를 이용하여 쿨롱 마찰력을 정확히 추정할 수 있다면, 추정된 쿨롱

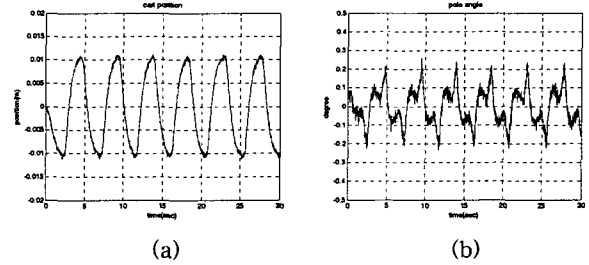


그림 4 상태 궤환 제어기를 이용한 역진자 시스템의 모의 실험 결과(조정 응답): (a)수레위치 (b)진자각도

Fig. 4 Simulation results of an inverted pendulum using a state feedback controller(regulation)

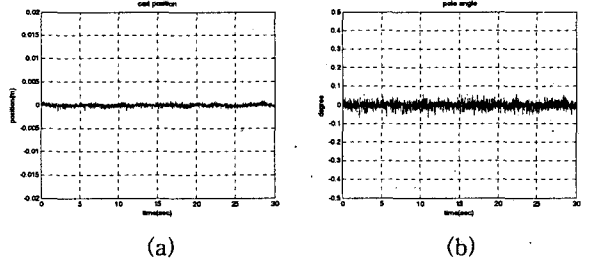


그림 5 추정된 쿨롱 마찰력에 의해 보상된 역진자 시스템의 모의실험 결과(조정 응답): (a)수레위치 (b)진자각도

Fig. 5 Simulation results of an inverted pendulum compensated by the Coulomb friction estimate (regulation)

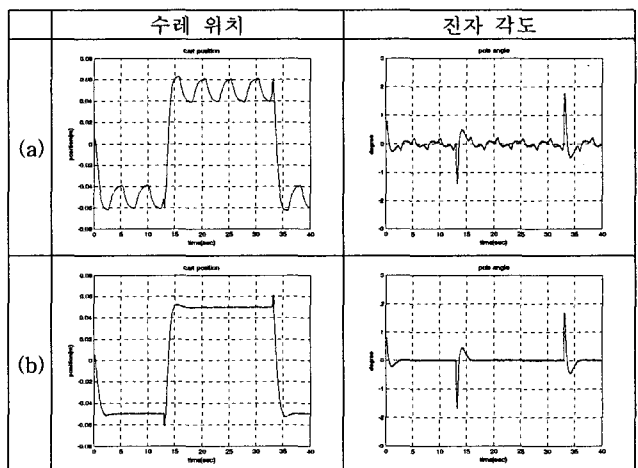


그림 6 수레 위치의 추종 입력에 대한 모의실험 결과 비교: (a)마찰력 보상이 없는 경우 (b)마찰력 보상한 경우

Fig. 6 Simulation results for the tracking performance with respect to the changing cart position: (a)without compensation (b)with compensation

마찰력을 보상함으로써 역진자 시스템의 제어 성능을 저하시키는 리밋 싸이클을 제거할 수 있음을 확인하였다.

4. 실험 및 결과

4.1 실험 장치 설정 및 제어기 설계

2장과 3장에서 논의되고 제안되었던 추종 성능 개선 방법의 유용성을 확인하기 위해 사용된 역진자 시스템은 Quanser사에서 제작된 IPO2 모델로서 그 실제 모습과 실험 환경은 그림 7과 같다. 이 논문에서 주로 고려한 쿨롱 마찰력은 수레에 고정된 모터의 회전축에 장착되어 있는 기어와 수레의 레일(rail)에서 발생한다.

이 실험에서 사용된 역진자의 물리적인 실제 값은 표 1에 나타낸 바와 같다.

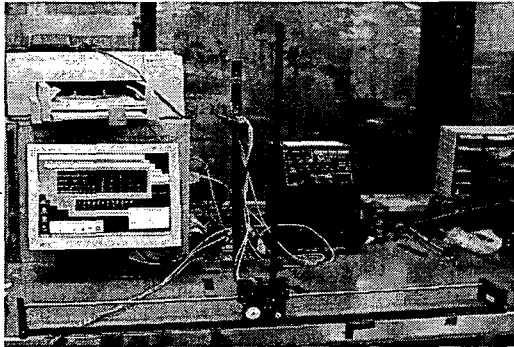


그림 7 역진자 실험에 사용된 실험 장치
Fig. 7 The apparatus used for the experiment of an inverted pendulum

표 1 역진자 계수의 실제 값
Table 1 values of coefficients of inverted pendulum

항 목	실제 값 (단위)	항 목	실제 값 (단위)
M	0.94 kg	b	5.4 Ns/m
m	0.23 kg	b_p	0.0024 Nms/rad
l	0.33 m	I	$7.8837 \times 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$

역진자의 안정화를 위한 상태 궤환 제어기의 이득 상수 K 는 수레의 위치와 진자의 각도에 대해 원하는 성능 지표를 만족하도록 LQR 기법을 통해 다음과 같이 구하였다.

$$K = [-50 \quad -50.26 \quad 180.163 \quad 28.49] \quad (24)$$

이를 통해 3.3절에서의 제어기를 역진자 시스템에 적용하였다.

4.2 실험 결과 및 고찰

식(19)의 관측기 동역학식과 식(21)의 추정 오차 수식을 살펴보면 관측기 이득 k 와 지수항 μ 에 따라서 쿨롱 마찰력

의 추정 속도가 달라진다는 것을 알 수 있다. 추정 속도가 너무 빠르면 실험 시 발생하는 잡음과 외란 등에 지나치게 민감해지고, 반대로 너무 느린 추정 속도는 제어기의 추종 성능에 악영향을 미치게 된다. 따라서 다양한 k 와 μ 의 값에 대하여, 마찰력의 추정 결과와 추정된 마찰력을 이용한 제어기의 추종 성능 개선 정도를 비교한다.

실험 결과를 나타낸 그림 8에서 볼 수 있듯이 관측기의 지수 항에 대하여 $\mu=2$ 인 경우는 비교적 안정된 쿨롱 마찰력 추정 결과를 나타내지만, 추정 속도가 다소 느린 편이다. 그리고 이때 쿨롱 마찰력 추정과 보상 결과에 있어서 k 의 영향이 상대적으로 적다. 하지만 $\mu=1$ 인 경우를 살펴보면, 쿨롱 마찰력 추정 속도가 매우 빠르기 때문에 다소 불안정한 모습을 보이지만 쿨롱 마찰력 보상에 있어서는 매우 뛰어난 성능을 보여준다. 이 결과는 다양한 μ 값에 대해 공통적으로 나타나는 특징으로서, 쿨롱 마찰력 관측기의 수식에서 알 수 있듯이 μ 가 클수록 쿨롱 마찰력의 추정 수렴 속도가 느려지게 된다. 그 결과로 계속 진동하는 수레와 진자의 움직임에 대해 쿨롱 마찰력을 빠르게 추정하지 못하여 진동 성분을 제거하는 성능이 떨어지게 된다. 이에 반해 μ 의 값이 작을수록 빠른 추정 속도에 의해 비교적 정확한 쿨롱 마찰력을 보상한 결과 수레의 위치 응답에서의 진동과 진자의 각도 응답이 상당히 개선되는 것을 볼 수 있다. 즉, $\mu=1$ 일 경우, μ 값의 영향과 더불어 k 값의 영향을 명확히 볼 수 있는데 관측기 이득 k 도 지수항 μ 와 마찬가지로 큰 값일수록 쿨롱 마찰력 추정 속도를 빠르게 하고 수레의 위치와 진자의 각도에서 나타나는 진동의 폭을 효과적으로 줄인다. 쿨롱 마찰력의 보상 없이 단순 상태 궤환 제어기만 구성하였을 때, 수레는 대략 0.022[m]의 진폭으로, 진자는 0.6°의 진폭으로 진동하는 모습을 보이지만, $\mu=1$, $k=20$ 으로 관측기를 구성하여 쿨롱 마찰력을 보상하였을 때는 진동 폭이 각각 0.004[m]와 0.3°로 대폭 개선되었다. 단순히 조정 실험 시 응답에서 보이는 진폭의 개선 뿐 아니라, 쿨롱 마찰력을 보상하지 않은 상황에서는 일정한 주파수를 가지고 꾸준히 진동하는 반면, 쿨롱 마찰력을 보상한 후에는 진자가 0° 부근에서 정지하고 수레도 0[m]에 매우 가까운 위치에서 정지하는 모습이 자주 관찰된다. 이 사실은 쿨롱 마찰력의 영향이 효과적으로 보상되었음을 의미한다.

그림 9의 실험 결과는 수레의 위치를 $x_d = \pm 0.05$ [m]로 하는 추종 입력에 대한 응답의 성능 개선 결과를 나타내었다. 추종 응답의 경우 지나치게 민감한 쿨롱 마찰력 관측기를 사용하게 될 경우 새로운 추종 입력이 가해지는 순간, 불안정한 상태가 될 수 있기 때문에 안정성이 확보되고 적절한 마찰력 추정 결과를 보여주는 $\mu=1$ 과 $k=10$ 으로 마찰력 관측기를 구성한 상태에서의 입력 추종 실험 결과를 나타내었다. 추종 입력이 바뀌는 시점의 진자 각도의 변화를 보면, 갑작스런 추종 입력에 대하여 시스템으로 비교적 큰 제어 입력이 가해짐으로써 수레 위치와 진자 각도에 급격한 변화가 발생함을 알 수 있다. 하지만 앞선 조정 실험(regulation experiment)과 마찬가지로 수레와 진자의 진동 폭은 마찰력 보상이 없는 경우에 비해 모두 충분히 감소한 응답 성능 개선의 결과를 보여준다.

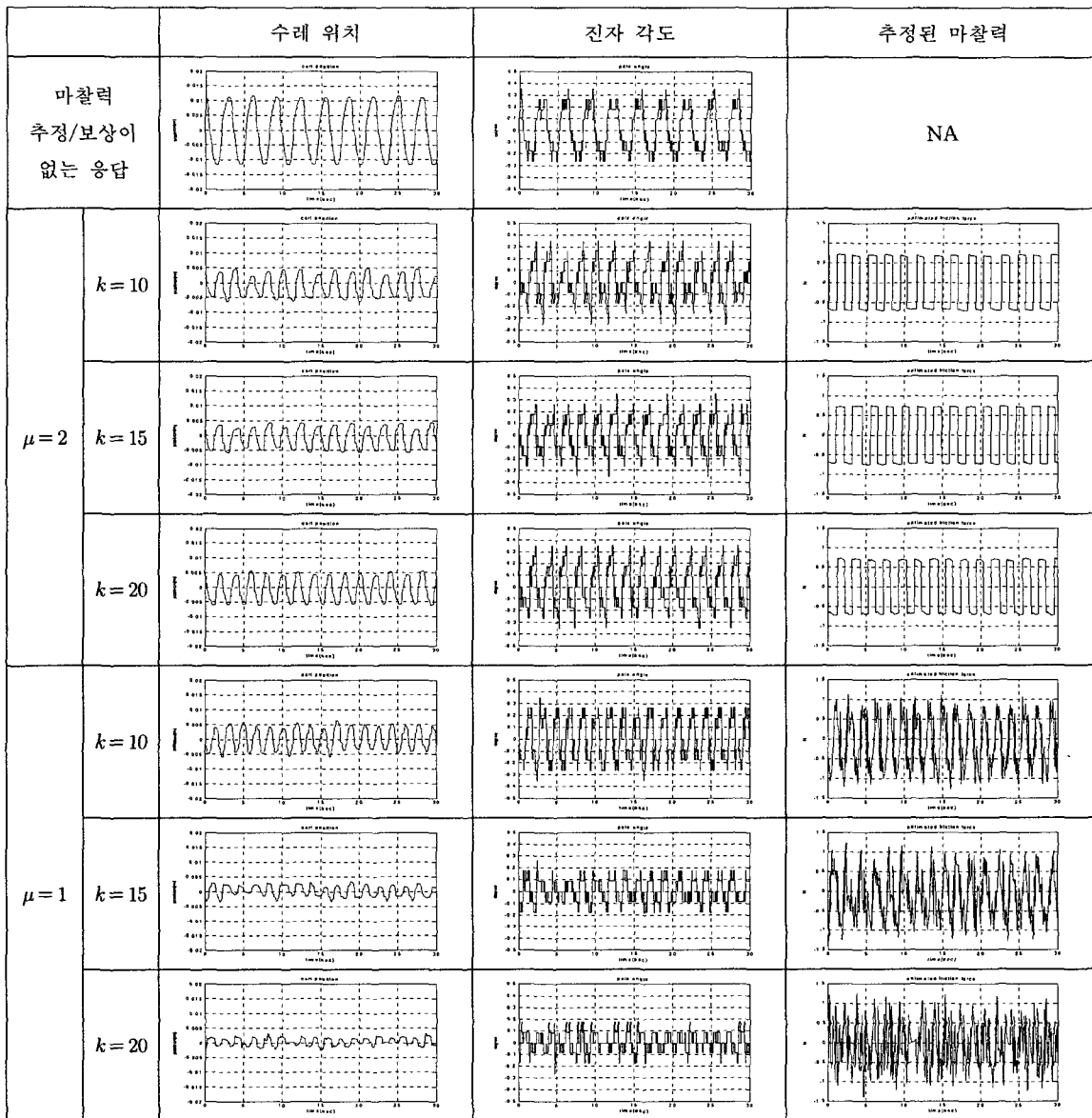


그림 8 마찰력 추정과 보상에 따른 역진자 시스템의 응답 특성(조정 실험)

Fig. 8 Regulation performance of inverted pendulum by estimation and compensation of the friction

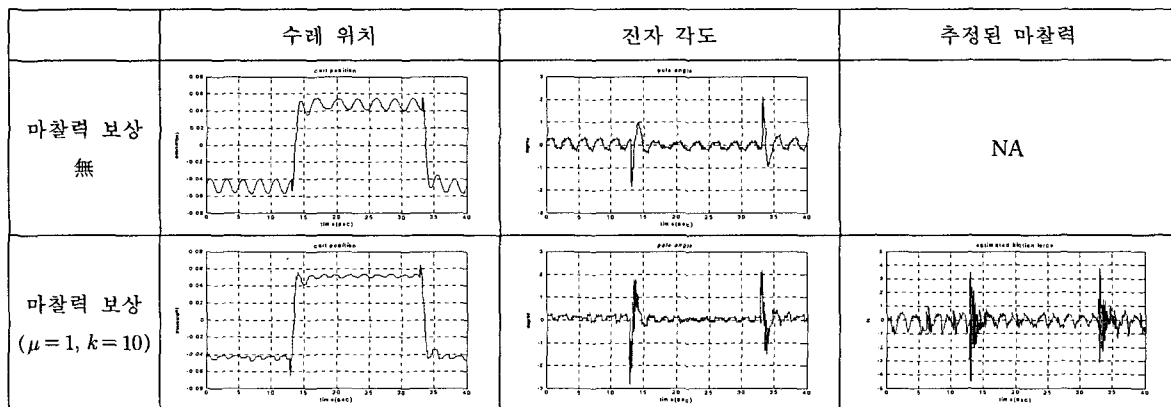


그림 9 마찰력 보상 제어기의 추종 응답 성능 비교

Fig. 9 Tracking performance of the system without and with a friction compensator

5. 결 론

이 논문에서는 쿨롱 마찰력이 무시된 선형 모델을 이용하여 설계된 선형 제어기로 실제 시스템을 제어하고자 할 때 발생할 수 있는 문제 중, 리밋 싸이클(limit cycle) 현상의 개선에 대해 다루었다. 단일 입출력 시스템에 존재하는 마찰력을 다루었던 다른 연구들과는 달리 불안정 다변수 시스템에 존재하는 쿨롱 마찰력을 비선형 관측기를 이용하여 추정하고 간단한 선형 제어기에 추정된 쿨롱 마찰력을 보상함으로써, 추종 응답 성능이 만족할 만큼 개선된다는 사실을 실험을 통하여 확인하였다. 이 연구에서 사용된 마찰력 관측기는 여러 연구들을 통하여 비교적 단순한 동역학 시스템에서는 성공적으로 쿨롱 마찰력을 추정함이 알려져 있으나, 이 논문을 통하여 불안정한 다변수 시스템에 적용하였을 때 만족스러운 성능으로 쿨롱 마찰력을 추정한다는 것을 확인할 수 있었다. 또한 마찰력을 점성 마찰력과 쿨롱 마찰력으로 구분하여 점성 마찰력을 선형 모델에 포함시켰다. 이 과정을 통해, 마찰력 요소 중에서 추정해야 할 마찰력을 오로지 쿨롱 마찰력만으로 한정하였기 때문에 보다 정확한 마찰력 추정 결과를 얻을 수 있었다. 쿨롱 마찰력을 추정하는데 있어서, 복잡하지 않은 단순한 고전적인 모델을 이용하더라도 시스템의 응답을 개선시키기에 충분하다는 것을 확인하였다. 이렇게 추정된 쿨롱 마찰력을 선형 제어기에 보상했을 때 쿨롱 마찰력 때문에 발생했던 리밋 싸이클이 거의 제거되었다. 이로써 이 논문에서 제시한 쿨롱 마찰력 추정과 보상 방법이 불안정 다변수 시스템인 수레형 역진자 시스템의 응답 성능을 향상시키는 유용한 방법이라는 사실을 증명하였다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 특정기초연구 R01-2006-000-11373-0 지원으로 수행되었음.

참 고 문 헌

[1] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li, Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall Int, Inc. 1991.
 [2] Henrick Olsson and Karl Johan Astrom, "Friction Generated Limit Cycles," IEEE Trans. Control Systems Technology. vol. 9, No. 4, pp. 629-636, July. 2001.
 [3] Seung-Jean Kim, Sung-Yeol Kim and In-Joong Ha, "An Efficient Identification Method for Friction in Single-DOF Motion Control Systems," IEEE Trans. Control Systems Technology. vol. 12, No. 4, pp. 555-563, July 2004.
 [4] Hongliu Du and Satish S. Nair, "Modeling and Compensation of Low-Velocity Friction with Bounds," IEEE Trans. Control Systems Technology. vol. 7, No. 1, pp. 110-121, Jan 1999.
 [5] Yaolong Tan, Jie Chang and Hualin Tan, "Adaptive Backstepping Control and Friction Compensation for AC Servo With Inertia and Load Uncertainties," IEEE Trans. Industrial Electronics. vol. 50, No. 5, pp. 944-952, Oct 2003.
 [6] Craig T. Johnson, and Robert D. Lorenz, "Experimental

Identification of Friction and Its Compensation in Precise, Position Controlled Mechanisms," IEEE Trans. Industry application, vol. 28, No. 6, pp. 1392-1398, Nov/Dec 1992.

[7] Rafael Kelly, Jesús Llamas, and Ricardo Campa, "A Measurement Procedure for Viscous and Coulomb Friction," IEEE Trans. Instrumentation and Measurement, vol. 49, No. 4, pp. 857-861, Aug. 2000.
 [8] B. Armstrong-Hélouvry, P. Dupont, and C. Canudas de Wit, "A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction," Automatica, vol. 30, No. 7, pp. 1083-1138, 1994.
 [9] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K. J. Åström, and P. Lischinsky, "A new model for control of systems with friction," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 40, pp. 419-425, Mar. 1995.
 [10] J. Amin, B. Friedland, and A. Harnoy, "Implementation of a friction estimation and compensation technique," IEEE Contr. Syst. Mag., vol. 17, pp. 71-76, 1997.
 [11] Bernard Friedland and Young-Jin Park, "On Adaptive Friction Compensation," IEEE Trans. Automatic Control, vol. 37. No. 10, pp. 1609-1612, Oct. 1992.

저 자 소 개



박 덕 기 (朴 德 基)

1973년 4월 22일생. 1999년 아주대 전자공학과 졸업. 2001년 동 대학원 졸업(석사). 2001년~현재 동 대학원 전자공학과 박사과정

Tel : 031-219-2489

Fax : 031-212-9531

E-mail : duckgee@ajou.ac.kr



좌 동 경 (左 東 京)

1971년 12월 23일생. 1995년 서울대 제어계측공학과 졸업. 2001년 동 대학원 제어계측공학과 졸업(공학박). 2005년~현재 아주대 전자공학부 조교수

Tel : 031-219-1815

Fax : 031-212-9531

E-mail : dkchwa@ajou.ac.kr



홍 석 교 (洪 錫 教)

1948년 8월 23일생. 1971년 서울대 전기공학과 졸업. 1973년 동 대학원 석사. 1981년 동 대학원 졸업(공학박). 1976년~현재 아주대 전자공학부 교수

Tel : 031-219-2478

Fax : 031-212-9531

E-mail : skhong@ajou.ac.kr