

< 논문 >

조화유동을 갖는 직선 파이프의 매개변수공진 해석

홍 성 철*

(2006년 5월 24일 접수, 2006년 11월 13일 심사완료)

Parametric and Combination Resonances of a Straight Pipe with Pulsatile Flow

Sung Chul Hong

Key Words: Parametric Resonance(매개변수공진), Combination Resonance(조합공진), Flow Induced Vibration(유체유발진동), Complexification-averaging Method(복소수화 평균법)

Abstract

The stabilities of a pinned-pinned straight pipe conveying fluid are investigated by complexification-averaging method. The flow is assumed to vary harmonically about a constant mean velocity. Instability conditions of a governing equation are analytically obtained about parametric primary, secondary and combination resonances. The resulted stability conditions show that instabilities exist when the frequency of flow fluctuation is close to one and two times the natural frequency or to the sum of any two natural frequencies. In case that the fluctuated flow frequency is close to the difference of two natural frequencies, instabilities does not exist.

기호설명

- v : 무차원 파이프 변위
- β : 질량비
- c : 무차원 유속
- c_0 : 무차원 평균유속
- t : 무차원 시간

1. 서론

파이프 계의 유체유발진동의 초기 연구들은 유체의 유속이 일정하다는 가정 하에 Housner,⁽¹⁾ Benjamin,⁽²⁾ Païdoussis⁽³⁾ 등에 의하여 연구되었다.

파이프 계에서는 펌프 등에 의해 맥동류가 발생하고, 이 조화진동유동으로 인하여 파이프계는 매개변수가진계(parametrically excited system)가 되

어 파이프 진동의 원인이 된다. 잘 알려진 바와 같이 매개변수가진계⁽⁴⁾는 매개변수 가진주파수 Ω 와 고유진동수 ω_n 의 관계에 따라, 두 형태의 공진을 갖는다. 하나는 $\Omega = 2\omega_n/k$, $k = 1, 2, 3 \dots$ 인 부근에서 발생하는 공진으로 매개변수공진(parametric resonance)이라 한다. 특히 k 가 홀수일 때를 주공진(primary resonance), k 가 짝수일 때를 부공진(secondary resonance)이라 한다. 또 다른 형태로 $\Omega = |\omega_n \pm \omega_m|/k$ 인 부근에서 발생하는 공진을 조합공진(combination resonance)라 부른다. 조화진동 유동을 포함한 연구로 Chen⁽⁵⁾은 처음으로 유속이 조화진동하며 흐르는 단순지지 파이프를 모델로 매개변수공진(parametric resonance)이 존재함을 밝혔다. Païdoussis와 Issid⁽⁶⁾는 외팔보 파이프계의 매개변수공진을 실험적, 이론적으로 연구하였다. Lee, Pak과 Hong⁽⁷⁻⁹⁾은 유체와 파이프의 상호작용을 고려한 운동방정식을 유도하고 유속과 유체압력변동이 파이프의 안정성에 미치는 영향을 Bolotin방법을 이용하여 고찰하였다. Païdoussis와 Sundrajan⁽¹⁰⁾은 Floquet 방법을 이용하여

* 회원, 한라대학교 기계자동차공학부

E-mail : schong@halla.ac.kr

TEL : (033)760-1214 FAX : (033)760-1211

매개변수공진만이 아니라 조합공진을 수치 해석하여 이들의 불안정영역을 제시하였다. 이 수치 해석 방법은 매우 많은 계산시간을 요하며, 특히 어떤 모드들 사이에서 조합공진이 일어나는지를 명확히 알기 어려운 단점이 있다. 해석적 연구로, Hong⁽¹⁴⁾은 조화 진동유체가 흐르는 단순지지 파이프를 모델로 매개변수공진의 주공진 및 조합공진의 안정성을 섭동법(perturbation method)의 일종인 다중척도법(multiple scale method)⁽¹⁵⁾으로 해석하여 ϵ 의 1차수 내에서만 이들의 안정성을 해석하였으나, 부공진의 안정성은 제시하지 못하였다. 파이프의 비선형성을 고려한 연구로는 Pak과 Hong^등(11-13)에 의하여 이루어 졌으며, 매개변수가 진계의 혼돈운동 발생조건을 해석적으로 제시하고 있다.

본 연구에서는 Manevitch,⁽¹⁶⁾ Gendelman⁽¹⁷⁾과 Vakakis⁽¹⁸⁾ 등에 의하여 제시된 바 있는 복소수화 평균법(complexification-averaging method)을 사용하여 주공진, 부공진 그리고 조합공진의 불안정 조건을 해석하고자 한다.

2. 운동방정식

유속이 변동하는 파이프계의 매개변수공진 및 조합공진 특성을 해석적으로 파악하기 위하여 단순지지 파이프를 대상으로 하였으며, 파이프계의 운동방정식^(8,9,11)은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_f c_f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2m_f c_f \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \tau} + m_f \frac{\partial c_f}{\partial \tau} \frac{\partial w}{\partial x} + (m_p + m_f) \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0 \quad (1)$$

여기서 EI 는 파이프의 굽힘강성, m_f 는 단위 길이당 유체질량, m_p 는 단위 길이당 파이프 질량, c_f 는 유체 속력, w 는 파이프의 굽힘변위, τ 는 시간이다. 매개변수의 영향을 고찰하기 위한 무차원 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\ddot{v} + \sqrt{\beta} \dot{c} v + 2\sqrt{\beta} c \dot{v} + c^2 v'' + \ddot{v} = 0 \quad (2)$$

여기서, $(\dot{\quad})$ 와 $(\ddot{\quad})$ 은 각각 $\partial/\partial t$ 와 $\partial/\partial \xi$ 를 의미한

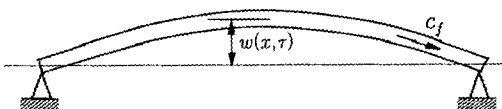


Fig. 1 A deflected pipe with internal flow

다. 식 (2)의 무차원항은 다음과 같이 정의된다.

$$v = \frac{w}{\ell}, \quad \xi = \frac{x}{\ell}, \quad c = \sqrt{\frac{m_f}{EI}} \ell c_f,$$

$$t = \sqrt{\frac{EI}{m_p + m_f}} \frac{\tau}{\ell^2}, \quad \beta = \frac{m_f}{m_f + m_p}$$

여기서 ℓ 은 파이프의 길이이다. 또한 식 (2)는 다음의 경계조건을 만족해야 한다.

$$v(0,t) = \dot{v}(0,t) = 0, \quad v(1,t) = \dot{v}(1,t) = 0 \quad (3)$$

그리고 파이프에 흐르는 유체의 유속이 평균유속을 기준으로 조화진동을 한다면, 유속은 다음과 같이 표현된다.

$$c = c_0(1 + \epsilon \sin \Omega t) \quad (4)$$

여기서 ϵ 은 작은 매개변수로 유속변동 진폭비이고, Ω 는 유속변동 주파수로 매개변수 가진주파수가 된다.

식 (4)를 식 (2)에 대입하면 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{v} + 2\sqrt{\beta} c_0 \dot{v} + c_0^2 (1 + \frac{1}{2}\epsilon^2) v'' + \ddot{v} + \epsilon c_0 (\sqrt{\beta} \Omega \cos \Omega t \dot{v} + 2\sqrt{\beta} \sin \Omega t v') + 2c_0 \sin \Omega t v'' - \frac{1}{2}\epsilon^2 c_0^2 \cos 2\Omega t v'' = 0 \quad (5)$$

3. 안정성해석

매개변수 가진계의 안정성 해석은 일반적으로 Floquet 방법⁽¹⁰⁾을 이용한다. 그러나 다 자유도계의 경우는 수치 적분시 매우 많은 시간이 소요되는 어려움이 있다. 근사적인 방법으로는 Bolotin 방법^(7,8)이 사용되는데 이 해석법으로는 조합공진을 찾을 수 없는 단점이 있다. 또한 Hong⁽¹⁴⁾의 연구에서는 다중척도법을 이용하고 식 (5)의 ϵ 의 1차항까지만을 고려하여 안정성을 해석하고 있다. 본 연구에서는 Manevitch⁽¹⁶⁾과 Vakakis⁽¹⁸⁾ 등에 의하여 제시되어 비선형계 해석에 사용되는 복소수화 평균법을 사용하여 식 (5)의 매개변수 가진계의 안정성 해석을 수행하고자 한다.

식 (5)에서 $\epsilon = 0$ 인 경우, 즉 유속의 변동이 없는 일정한 유동만을 가진 경우에 대한 계의 고유진동수와 정규모드는 다음의 과정으로 얻어진다. 이때 해는 다음과 같다.

$$v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{i\omega_n t} Y_n(\xi) + e^{-i\omega_n t} \overline{Y_n}(\xi)) \quad (6)$$

여기서 ω_n 은 고유진동수, $i = \sqrt{-1}$, $Y_n(\xi)$ 은 경계조건을 만족하는 정규모드이고 $\bar{Y}_n(\xi)$ 는 $Y_n(\xi)$ 의 켈레복소수이다.

식 (6)의 고유진동수와 정규모드는 다음의 과정으로 얻어진다. 정규모드는 다음과 같다.

$$Y_n(\xi) = \sum_{k=1}^4 E_{nk} e^{i s_{nk} \xi} \quad (7)$$

여기서 s_{nk} 는 식 (6)과 식 (7)을 식 (5)에 대입하여 얻어진 다음의 특성방정식

$$s_{nk}^4 - c_o^2(1 + \frac{1}{2}\epsilon^2)s_{nk}^2 - 2\sqrt{\beta}c_o\omega_n s_{nk} - \omega_n^2 = 0 \quad (8)$$

의 근이고, 식 (7)은 경계조건식 (4)를 만족해야 하므로 다음의 방정식을 얻게 된다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i s_{n1}} & e^{i s_{n2}} & e^{i s_{n3}} & e^{i s_{n4}} \\ -s_{n1}^2 & -s_{n2}^2 & -s_{n3}^2 & -s_{n4}^2 \\ -s_{n1}^2 e^{i s_{n1}} - s_{n2}^2 e^{i s_{n2}} - s_{n3}^2 e^{i s_{n3}} - s_{n4}^2 e^{i s_{n4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n1} \\ E_{n2} \\ E_{n3} \\ E_{n4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

식 (9)가 해를 갖기 위해서는 식 (9)의 행렬식이 영(zero)이어야 한다. 따라서 식 (8)과 (9)를 동시에 풀면 ω_n 과 E_{nk} 를 얻을 수 있다.

안정성해석에 복소수화 평균법을 사용하기 위해 새로운 복소수 변수(complex variable), Ψ 를 다음과 같이 정의⁽¹⁶⁻¹⁸⁾한다.

$$\Psi = \dot{v} + i\omega_n v, \quad \bar{\Psi} = \dot{v} - i\omega_n v \quad (10)$$

여기서 $\bar{\Psi}$ 는 Ψ 의 켈레복소수이다. 식 (10)을 식 (5)에 대입하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \dot{\Psi} - \frac{i\omega_n}{2}(\Psi + \bar{\Psi}) + \sqrt{\beta}c_o(\Psi' + \bar{\Psi}') \\ & + \frac{c_o^2}{2i\omega_n}(\Psi'' - \bar{\Psi}'') + \frac{1}{2i\omega_n}(\Psi''' - \bar{\Psi}''') \\ & + \epsilon \left\{ \frac{\sqrt{\beta}c_o\Omega}{4i\omega_n}(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})(\Psi' - \bar{\Psi}') \right. \\ & + \frac{\sqrt{\beta}c_o}{2i}(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t})(\Psi' + \bar{\Psi}') \\ & \left. + \frac{c_o^2}{2\omega_n}(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t})(\Psi'' - \bar{\Psi}'') \right\} \\ & + \frac{\epsilon^2 c_o^2}{4i\omega_n} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(e^{2i\Omega t} + e^{-2i\Omega t}) \right\} (\Psi'' - \bar{\Psi}'') = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)에서 Ψ 를 다음과 같이 놓는다.

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n e^{i\omega_n t} \quad (12)$$

식 (12)에서 복소함수 ϕ_n 는 서서히 변하는 시간함수(slowly varying)를 포함하고 있으며, 급해진

지수함수는 빠르게 변하는 시간함수이다. 그러므로 식 (12)를 통하여, 서서히 변하는 성분과 빠르게 변하는 성분을 분리하게 된다. 식 (12)를 식 (11)에 대입하면, 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left\{ \dot{\phi}_n + \frac{1}{2i\omega_n}[-\omega_n^2 \phi_n + 2i\omega_n \sqrt{\beta}c_o \phi_n'] \right. \\ & \left. + c_o^2(1 + \frac{\epsilon^2}{2})\phi_n'' + \phi_n'''\right\} e^{i\omega_n t} \\ & + \epsilon c_o \left(\frac{\sqrt{\beta}\Omega}{4i\omega_n} \phi_n' + \frac{\sqrt{\beta}}{2i} \phi_n' - \frac{c_o}{2\omega_n} \phi_n'' \right) e^{i(\Omega + \omega_n)t} \\ & + \epsilon c_o \left(-\frac{\sqrt{\beta}\Omega}{4i\omega_n} \bar{\phi}_n' + \frac{\sqrt{\beta}}{2i} \bar{\phi}_n' + \frac{c_o}{2\omega_n} \bar{\phi}_n'' \right) e^{i(\Omega - \omega_n)t} \\ & - \frac{\epsilon^2 c_o^2}{8i\omega_n} \phi_n'' e^{i(2\Omega + \omega_n)t} + \frac{\epsilon^2 c_o^2}{8i\omega_n} \bar{\phi}_n'' e^{i(2\Omega - \omega_n)t} + cc \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 cc 는 켈레복소수이다. 식 (13)에서 Ω 의 값의 변화에 따라 여러 경우의 해가 존재하게 되며 관심 있는 주파수에 대하여 평균을 취하면 평균화방정식(averaged equation)^(17,18)을 얻게 된다. 이때 평균화방정식의 안정성을 다음의 과정^(15,19)에 따라 해석함으로써 계의 안정성을 파악하게 된다.

서론에서 언급한 매개변수 가진계의 공진특성중 $\Omega = 2\omega_n/k$ (k 가 3 이상)인 경우와 $\Omega = |\omega_n \pm \omega_m|/k$ (k 가 2 이상)인 경우는 그 불안정 영역이 매우 작다.^(6,9,10) 또한 계의 감쇠(damping)가 포함되면 그 불안정영역은 더욱 작아진다. 따라서 $\Omega = 2\omega_n$, $\Omega = \omega_n$ 그리고 $\Omega = \omega_n \pm \omega_m$ 인 경우가 안정성해석의 중요성을 갖는다. 따라서 본 연구에서는 이 경우들에 대하여 안정성해석을 수행하고자 한다.

3.1 Ω 값이 $2\omega_n$ 과 차이가 작은 경우

이 경우는 Ω 값이 고유진동수의 2배($\Omega \approx 2\omega_n$)되는 경우로 Ω 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Omega = 2\omega_n + \sigma \quad (14)$$

여기서 σ 는 조절매개변수(detuning parameter)이다. 식 (14)를 식 (13)에 대입하고 ω_n 에 대하여 평균을 취하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \dot{\phi}_n + \frac{\epsilon^2 c_o^2}{4i\omega_n} \phi_n'' + \epsilon c_o \left(-\frac{\sqrt{\beta}\Omega}{4i\omega_n} \phi_n' \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{\beta}}{2i} \phi_n' + \frac{c_o}{2\omega_n} \phi_n'' \right) e^{i\sigma t} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

식 (15)의 해를 다음과 같이 가정한다.

$$\phi_n = H_n Y_n(\xi) e^{i\sigma t/2} \quad (16)$$

여기서 H_n 은 시간에 대한 복소함수이다. 식 (16)을 식 (15)에 대입하고 정리하면

$$\dot{H}_n + i(\sigma/2 + r_{on})H_n + r_1 \bar{H}_n = 0 \quad (17)$$

여기서

$$r_{om} = -\frac{\epsilon^2 c_o^2 \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n'' d\xi}{4\omega_n \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n d\xi} \quad (18)$$

$$r_1 = \frac{\epsilon c_o \sqrt{\beta} (\omega_n - \frac{1}{2}\Omega) \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_n' d\xi + i\epsilon c_o^2 \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}_n'' d\xi}{2i\omega_n \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n d\xi}$$

식 (17)에서 H_n 은 다음과 같다.

$$H_n = (A_n + iB_n) \quad (19)$$

여기서 A_n 과 B_n 는 시간에 대한 실수 함수이다. 식 (19)을 식 (17)에 대입하고 정리하면

$$\begin{pmatrix} \dot{A}_n \\ \dot{B}_n \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} r_{1R} & r_{1I} - (\sigma/2 + r_{on}) \\ r_{1I} + (\sigma/2 + r_{on}) & -r_{1R} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

이 된다. 여기서 r_{1R} 와 r_{1I} 는 r_1 의 실수부와 허수부를 나타내며, r_{on} 은 실수 값이다. 식 (20)의 고유치, λ_n 는 다음과 같다.

$$\lambda_n = \pm \sqrt{r_{1R}^2 + r_{1I}^2 - (\sigma/2 + r_{on})^2} \quad (21)$$

식 (21)에서 λ_n 이 허수이면 식 (20)의 해는 안정하고, 실수이면 불안정하다. 그 불안정 조건은 다음 식으로 주어진다.

$$-2r_{on} - 2\sqrt{r_{1R}^2 + r_{1I}^2} < \sigma < -r_{on} + 2\sqrt{r_{1R}^2 + r_{1I}^2} \quad (22)$$

그러므로 계의 불안정 영역은 식 (22)를 식 (14)에 대입함으로써 다음의 식으로 얻어진다.

$$2\omega_n - 2r_{on} - 2|r_1| < \Omega < 2\omega_n - 2r_{on} + 2|r_1| \quad (23)$$

3.2 Ω 와 ω_n 의 차이가 작은 경우

이 경우는 Ω 값이 고유진동수와 같아지는 경우 ($\Omega \approx \omega_n$)로 Ω 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Omega = \omega_n + \sigma \quad (24)$$

식 (24)를 식 (13)에 대입하고 ω_n 에 대하여 평균을 취하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\phi}_n + \frac{\epsilon^2 c_o^2}{4i\omega_n} \phi_n'' + \frac{\epsilon^2 c_o^2}{8i\omega_n} \bar{\phi}_n'' e^{i\sigma t} = 0 \quad (25)$$

식 (25)의 해를 다음과 같이 가정한다.

$$\phi_n = H_n Y_n(\xi) e^{i\sigma t/2} \quad (26)$$

여기서 H_n 은 시간에 대한 복소함수이다. 식 (26)

을 식 (25)에 대입하고 정리하면

$$\dot{H}_n + i(\sigma/2 + r_{on})H_n + r_2 \bar{H}_n = 0 \quad (27)$$

여기서

$$r_2 = -i \frac{\epsilon^2 c_o^2 \int_0^1 \bar{\phi}_n \bar{\phi}_n'' d\xi}{8\omega_n \int_0^1 \bar{\phi}_n \phi_n d\xi} \quad (28)$$

식 (27)에서 H_n 은 다음과 같다.

$$H_n = (A_n + iB_n) \quad (29)$$

여기서 A_n 과 B_n 는 시간에 대한 실수 함수이다. 식 (29)를 식 (27)에 대입하고 정리하면

$$\begin{pmatrix} \dot{A}_n \\ \dot{B}_n \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} r_{2R} & r_{2I} - (\sigma/2 + r_{on}) \\ r_{2I} + (\sigma/2 + r_{on}) & -r_{2R} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

이 된다. 여기서 r_{2R} 와 r_{2I} 는 r_2 의 실수부와 허수부를 나타낸다. 식 (30)의 고유치, λ_n 는 다음과 같다.

$$\lambda_n = \pm \sqrt{r_{2R}^2 + r_{2I}^2 - (\sigma/2 + r_{on})^2} \quad (31)$$

식 (31)에서 λ_n 이 허수이면 식 (30)의 해는 안정하고, 실수이면 불안정하다. 그 조건은 다음 식과 같다.

$$-2r_{on} - 2\sqrt{r_{2R}^2 + r_{2I}^2} < \sigma < -2r_{on} + 2\sqrt{r_{2R}^2 + r_{2I}^2} \quad (32)$$

그러므로 계의 불안정 영역은 식 (32)를 식 (24)에 대입함으로써 다음의 식으로 얻어진다.

$$\omega_n - 2r_{on} - 2|r_2| < \Omega < \omega_n - 2r_{on} + 2|r_2| \quad (33)$$

3.3 Ω 와 $\omega_n + \omega_m$ 의 차이가 작은 경우

이 경우는 두 진동 모드의 고유진동수 합이 Ω 값과 비슷한 경우($\Omega \approx \omega_n + \omega_m$)로 Ω 는 다음과 같다.

$$\Omega = \omega_n + \omega_m + \sigma \quad (34)$$

식 (34)를 식 (13)에 대입하여 ω_n 과 ω_m 에 대하여 평균을 취하면, 다음 두식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_n + \frac{\epsilon^2 c_o^2}{4i\omega_n} \phi_n'' + \epsilon c_o \left(-\frac{\sqrt{\beta}\Omega}{4i\omega_n} \bar{\phi}_m' + \frac{\sqrt{\beta}}{2i} \bar{\phi}_m' + \frac{c_o}{2\omega_n} \bar{\phi}_m'' \right) e^{i\sigma t} = 0 \\ \dot{\phi}_m + \frac{\epsilon^2 c_o^2}{4i\omega_m} \phi_m'' + \epsilon c_o \left(-\frac{\sqrt{\beta}\Omega}{4i\omega_n} \bar{\phi}_n' + \frac{\sqrt{\beta}}{2i} \bar{\phi}_n' + \frac{c_o}{2\omega_n} \bar{\phi}_n'' \right) e^{i\sigma t} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

식 (35)에서 $\phi_n = H_n Y_n(\xi) e^{i\sigma t/2}$, $\phi_m = H_m Y_m(\xi) e^{i\sigma t/2}$

라 하면, 식 (35)는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{H}_n + i(\sigma/2 + r_{on})H_n + r_5 \bar{H}_m &= 0 \\ \dot{H}_m + i(\sigma/2 + r_{om})H_m + r_6 \bar{H}_n &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

여기서

$$\begin{aligned} r_5 &= \frac{\epsilon c_o \sqrt{\beta} (\omega_m - \frac{1}{2}\Omega) \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}'_m d\xi + i\epsilon c_o^2 \int_0^1 \bar{Y}_n \bar{Y}''_m d\xi}{2i\omega_m \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n d\xi} \\ r_6 &= \frac{\epsilon c_o \sqrt{\beta} (\omega_n - \frac{1}{2}\Omega) \int_0^1 \bar{Y}_m \bar{Y}'_n d\xi + i\epsilon c_o^2 \int_0^1 \bar{Y}_m \bar{Y}''_n d\xi}{2i\omega_n \int_0^1 \bar{Y}_m Y_m d\xi} \end{aligned} \quad (37)$$

$$r_{om} = -\frac{\epsilon^2 c_o^2 \int_0^1 \bar{Y}_m Y''_m d\xi}{4\omega_m \int_0^1 \bar{Y}_m Y_m d\xi}$$

안정성을 해석하기 위해 식 (36)의 해를 다음과 같이 가정한다.

$$H_n = h_n e^{\lambda t}, \quad H_m = h_m e^{\lambda t} \quad (38)$$

여기서 λ 는 다음의 행렬식으로 결정된다.

$$\begin{vmatrix} \lambda + i(\sigma/2 + r_{on}) & r_5 \\ r_6 & \lambda - i(\sigma/2 + r_{om}) \end{vmatrix} = 0 \quad (39)$$

즉,

$$\lambda = \pm \sqrt{r_5 r_6 - (\sigma/2 + r_{on})(\sigma/2 + r_{om})} \quad (40)$$

여기서 $r_5 \bar{r}_6$ 는 식 (37)의 모드함수의 특성으로부터 실수이다. 그러므로 $r_5 \bar{r}_6 \leq 0$ 이면 해는 항상 안정하고 $r_5 \bar{r}_6 > 0$ 인 경우는 불안정하다. 따라서 다음의 조건을 만족할 때 계는 불안정하다.

$$-2(r_{om} + r_{on}) - 2k < \sigma < 2(r_{om} + r_{on}) + 2k \quad (41)$$

여기서 $k = \sqrt{r_5 \bar{r}_6 + r_{on}^2 + r_{om}^2 + r_{on} r_{om}}$ 이다. 그러므로 이 조건을 식 (34)에 대입하면 계가 불안정할 조건이 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \omega_m + \omega_n - 2(r_{on} + r_{om}) - 2k < \Omega \\ < \omega_m + \omega_n - 2(r_{on} + r_{om}) + 2k \end{aligned} \quad (42)$$

3.4 Ω 와 $\omega_n - \omega_m$ 의 차이가 작은 경우

이 경우는 두 진동모드의 고유진동수 차가 Ω 값과 비슷한 경우($\Omega \approx \omega_n - \omega_m, n > m$)로 Ω 는 다음과 같이 주어진다.

$$\Omega = \omega_n - \omega_m + \sigma \quad (43)$$

식 (43)을 식 (13)에 대입하여 ω_n 과 ω_m 에 대하여 평균을 취하면, 다음 두식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_n + \frac{\epsilon^2 c_o^2}{4i\omega_n} \phi_n'' \\ + \epsilon c_o \left(\frac{\sqrt{\beta} \Omega}{4i\omega_m} \phi_m' + \frac{\sqrt{\beta}}{2i} \phi_m' - \frac{c_o}{2\omega_m} \phi_m'' \right) e^{i\sigma t} = 0 \\ \dot{\phi}_m + \frac{\epsilon^2 c_o^2}{4i\omega_m} \phi_m'' \\ + \epsilon c_o \left(\frac{\sqrt{\beta} \Omega}{4i\omega_n} \phi_n' - \frac{\sqrt{\beta}}{2i} \phi_n' + \frac{c_o}{2\omega_n} \phi_n'' \right) e^{-i\sigma t} = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

식 (44)에서 $\phi_n = H_n Y_n(\xi) e^{i\sigma t/2}$, $\phi_m = H_m Y_m(\xi) e^{-i\sigma t/2}$ 라 하면, 식 (44)는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{H}_n + i(\sigma/2 + r_{on})H_n + r_7 H_m &= 0 \\ \dot{H}_m - i(\sigma/2 + r_{om})H_m + r_8 H_n &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

여기서

$$\begin{aligned} r_7 &= \frac{\epsilon c_o \sqrt{\beta} (\omega_m + \frac{1}{2}\Omega) \int_0^1 \bar{Y}_n Y'_m d\xi - i\epsilon c_o^2 \int_0^1 \bar{Y}_n Y''_m d\xi}{2i\omega_m \int_0^1 \bar{Y}_n Y_n d\xi} \\ r_8 &= \frac{\epsilon c_o \sqrt{\beta} (\frac{1}{2}\Omega - \omega_n) \int_0^1 \bar{Y}_m Y'_n d\xi + i\epsilon c_o^2 \int_0^1 \bar{Y}_m Y''_n d\xi}{2i\omega_n \int_0^1 \bar{Y}_m Y_m d\xi} \end{aligned} \quad (46)$$

식 (45)의 해는 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$H_n = h_n e^{\lambda t}, \quad H_m = h_m e^{\lambda t} \quad (47)$$

여기서 λ 는 다음의 행렬식으로 결정된다.

$$\begin{vmatrix} \lambda + i(\sigma/2 + r_{on}) & r_7 \\ r_8 & \lambda - i(\sigma/2 + r_{om}) \end{vmatrix} = 0 \quad (48)$$

즉,

$$\lambda = \pm \sqrt{r_7 r_8 - (\sigma/2 + r_{on})(\sigma/2 + r_{om})} \quad (49)$$

여기서 $r_7 r_8$ 은 식 (46)의 함수의 특성으로 음의 실수가 된다. 따라서 $r_7 r_8 < 0$ 이므로 λ 는 항상 허수 값을 갖게 되어 해는 항상 안정하다. 이 결과를 통하여 매개변수 가진주파수가 두 고유진동수의 차와 비슷한 값을 가질 때 나타나는 조합공진은 일어나지 않는다.

4. 수치 예 및 고찰

앞장에서 유도된 안정성 해석 결과를 몇 가지 파라미터 값을 예로 안정성 차트를 제시하고 Hong⁽¹⁴⁾의 결과와 비교하고자 한다.

계의 고유진동수는 식 (8)과 식 (9)을 동시에 풀어 얻을 수 있다. 평균유속의 변화에 따라 얻어진 고유진동수들을 Fig. 2에 도시하였다.⁽¹⁴⁾ 평균유속이 증가함에 따라 고유진동수는 감소하며,

고유진동수가 영(zero)이 되는 임계유속(critical flow speed)이 존재한다. 또한 질량비 β 가 큰 경우, 질량비가 작은 경우에 비하여 평균유속이 커짐에 따라 고유진동수가 약간 크게 나타난다. 그러나 1차 모드의 경우는 이와 반대가 된다.

Fig. 3은 진폭비 ϵ 과 매개변수 가진주파수 Ω 의 변화에 따른 불안정영역을 도시한 안정성 도표이며, ϵ 의 2차항까지를 포함하여 해석한 본 연구의 안정성 해석 결과와 ϵ 의 1차항까지 고려한 연구⁽¹⁴⁾의 결과를 비교한 그림이다. Hong⁽¹⁴⁾의 결과에서는 $\Omega = \omega_1$, $\Omega = \omega_2$ 인 부공진은 나타나지 않고 있다. 식(5)의 진폭비 ϵ 의 2차항 까지를 고려하지 못했기 때문이다. 한편, 안정성 곡선이 ϵ 의 1차항

까지 고려한 연구⁽¹⁴⁾의 안정성 곡선이 직선적인데 반하여 ϵ 의 2차항까지 고려한 안정성 곡선은 곡선으로 나타난다. 진폭비가 클수록 그 차는 크게 나타나며, 조합공진에서는 그 영향이 더욱 크게 나타난다. Hong⁽¹⁴⁾의 연구에서 식 (5)의 ϵ 의 2차항 까지를 고려하고, ϵ 의 2차항 까지 전개한 다중척도법을 사용했다면, 본 논문과 유사한 결과를 얻었을 것으로 판단된다. 다만 다중척도법을 사용한다면 ϵ 의 1차 항에 대한 해를 얻고 이해를 이용하여 2차 항에 대한 해를 얻어 안정성을 판단해야 하는 두 단계의 복잡한 해석과정⁽¹⁵⁾이 필요하다. 본 연구에서 다른 복소수화 평균법은 식 (5)의 ϵ 의 2차항 까지를 고려한 문제를 다중척도법에 비하여 단순하게 결과를 얻을 수 있다. 두 고유진동수의 차로 나타나는 조합공진($\Omega \approx \omega_2 - \omega_1$ 인 경우)에 의한 불안정은 존재하지 않는다.

Fig. 4는 질량비가 안정성에 미치는 영향을 도시한 그림이다. Fig. 4에서 보는바와 같이 매개변수 공진의 경우 불안정 영역의 크기는 변화하지 않으며, 불안정 영역이 수평 이동되어 나타난다. 조합공진의 경우는 질량비가 커지면서 불안정 영역이 증가된다. Fig. 5는 평균유속이 안정성에 미치는 영향을 비교한 그림으로, 평균유속은 그 크기가 증가할수록 불안정 영역을 크게 하며, 부공진의 경우보다 조합공진에서 그 영향이 크게 나타난다.

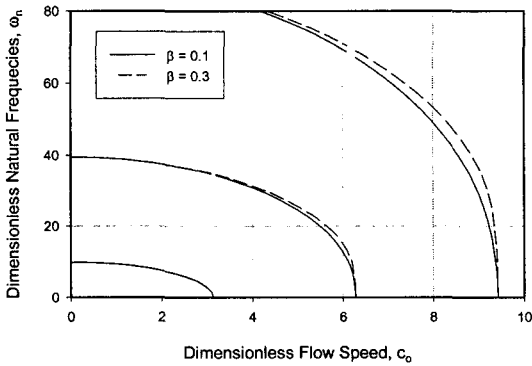


Fig. 2 Natural Frequencies of pinned-pinned pipe.

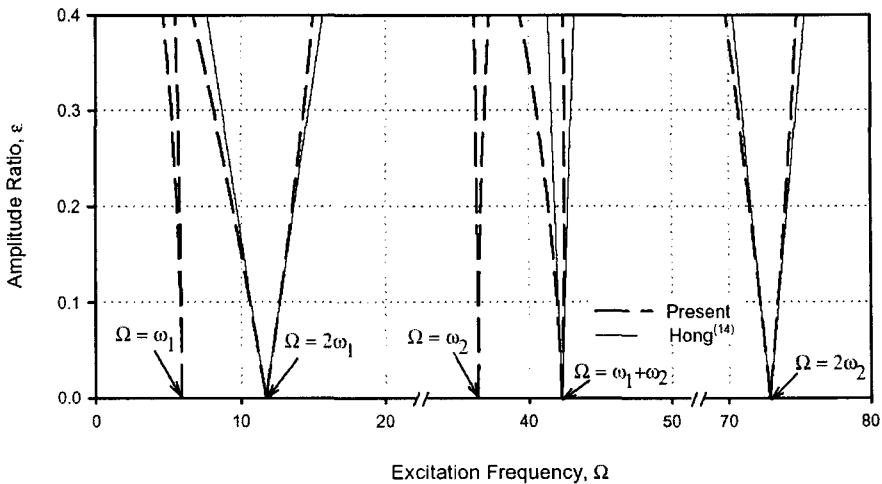


Fig. 3 Comparison of stability between present theory and Hong's result.⁽¹⁴⁾

$$c_0 = 2.5, \beta = 0.2, \omega_1 = 5.8548, \omega_2 = 36.4344$$

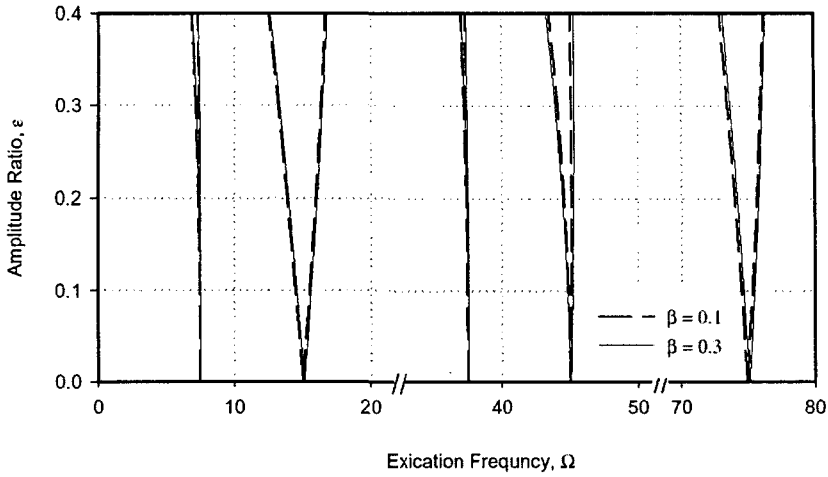


Fig. 4 Stability diagram for two different mass ratio; $c_o = 2.0$

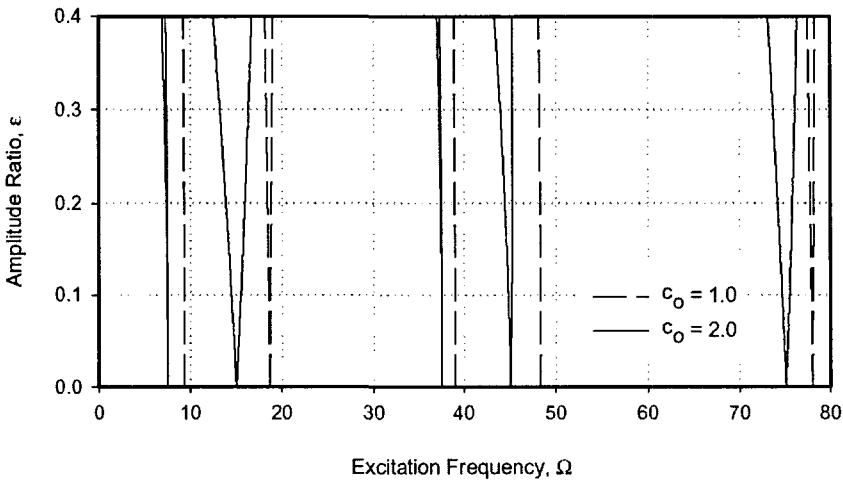


Fig. 5 Stability diagram for two different dimensionless flow speed; $\beta = 0.2$

5. 결 론

본 연구에서는 유속이 조화 진동하는 단순지지 파이프의 안정성을 복소수화 평균법에 의하여 해석하여 매개변수공진의 주공진, 부공진 및 조합공진을 해석하여 불안정 조건을 제시하였으며, 해석적으로 얻어진 안정성 조건을 수치 예를 통하여 제시하였다. 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 복소수화 평균법을 매개변수가진계에 적용하여 매개변수공진의 주공진과 부공진 그리고 조합공진의 안정성조건을 해석적으로 제시하였다.

(2) 진폭비 ϵ 의 2차항을 포함하여 안정성 조건을 제시할 수 있었고, 진폭비 ϵ 의 1차에 한정된 연구⁽¹⁴⁾에서 발견할 수 없었던 부공진의 안정성조건을 제시하였다.

(3) 식 (5)의 ϵ 1차항까지 고려한 연구⁽¹⁴⁾의 안정성 곡선이 직선적인데 반하여 ϵ 의 2차항까지 고려한 안정성 곡선은 곡선으로 나타나며, 진폭비가 클수록 그 차는 커지고 조합공진에서는 그 영향이 더욱 크다.

(4) 두 고유진동수의 차로 나타나는 조합공진 ($\Omega \approx \omega_2 - \omega_1$ 인 경우)에 의한 불안정은 존재하지 않는다.

참고문헌

- (1) Housner, G. W., 1952, "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid," *Journal of Applied Mechanics*, Vol.19, pp.205~209.
- (2) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a Articulated Pipes Containing Fluid, Part I and II," *Proc. of Royal Society*, Ser. A261, pp.475~486.
- (3) Païdoussis, M. P., 1966, "Dynamics of Flexible Slender Cylinders in Axial Flow, Part I and II," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.26, pp.717~751.
- (4) Cartmell, M., 1990, *Introduction to Linear, Parametric and Nonlinear Vibrations*, Chapman and Hall, London, UK.
- (5) Chen, S. S., 1971, "Dynamic Stability of a Tube Conveying Fluid," *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. of ASCE*, Vol.97, pp.1469~1485.
- (6) Païdoussis, M. P., Issid, N. T., "Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.33(3), 1974, pp.267~294.
- (7) Pak, C. H., Lee, U., Hong, S. C., and Kim T. R., 1991, "Stability Analysis of Piping System Conveying Unsteady Flow," *Trans. of KSME*, Vol.15(5), pp.1512~1521.
- (8) Lee, U., Pak, C. H., and Hong, S. C., 1991, "Dynamic Stability and Response Analysis of Piping System with internal Flow," *Trans. of the KSME*, Vol.15(6), pp.1861~1991.
- (9) Lee, U., Pak, C. H., and Hong, S. C., 1995, "Dynamics of Piping System with Internal Unsteady Flow," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.180(2), pp.297~311.
- (10) Païdoussis, M. P. and Sundarajan C., 1975, "Parametric and Combination Resonances of a Pipe Conveying Pulsating Fluid," *Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.42, pp.780~784.
- (11) Pak, C. H., Hong, S. C., and Jung, W., 1996, "Chaotic Vibration of a Straight Pipe Conveying Oscillatory Flow," *Journal of KSNVE*, Vol.6, pp.233~244.
- (12) Pak, C. H., Hong, S. C., and Kim T. J., 1997, "Chaotic Vibration of a Curved Pipe Conveying Oscillatory Flow," *Journal of KSNVE*, Vol.7(3), pp.489~498.
- (13) Hong, S. C., 2000, "Chaotic Out-of-Plane Vibrations of Curved Pipe Conveying Oscillatory Flow," *Journal of KSNVE*, Vol.10(5), pp.849~858.
- (14) Hong, S. C. 2004, "Stability Analysis of a Straight Pipe with Time Dependent Flow," *Trans. of KSME*, Vol.28A(3)
- (15) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, *Nonlinear Oscillations*, New York: Wiley.
- (16) Manevitch, L. I., 2001, "The Description of Localized Normal Modes in a Chain of Nonlinear Coupled Oscillators Using Complex Variables," *Nonlinear Dynamics*, Vol.25, pp.95~109.
- (17) Gendelman, O., Manevitch, L. I., Vakakis, A. F. and M'Closkey R., 2001, "Energy Pumping in Nonlinear Mechanical Oscillators: Part I- Dynamics of Underlying Hamiltonian Systems," *Journal of Applied mechanics*, Vol.68, pp.34~41.
- (18) Vakakis, A. F., Manevitch, L. I., Gendelman, O and Bergman L., 2003, "Dynamics of Linear Discrete Systems Connected to Local, Essentially Non-linear Attachments," *Journal of sound and vibration*, Vol.264, pp.559~577.
- (19) Nayfeh, A. H. and Balachandran, B. 1995, *Applied Nonlinear Dynamics*, New York: Wiley.