

## 유체맥동을 고려한 배관계의 진동해석

### Vibration Analysis of Pipes Considering Fluid Pulsation

정의봉† · 서영수\* · 정석현\*\* · 이성현\*\*\* · 홍진숙\*\*\*\*

Weui Bong Jeong, Young Soo Seo, Seok Hyeon Jeong, Seong Hyeon Lee  
and Chin Suk Hong

(2006년 8월 7일 접수 ; 2006년 9월 22일 심사완료)

Key Words : Stability Analysis(안정성 해석), Forced Response(강제 응답), Parametric Resonance(매개변수 공진), Fluid-structure Interaction(유체-구조 연성), Periodically Pulsating Fluid(주기맥동 유체), FEM(유한요소법)

#### ABSTRACT

In this paper, a new method for the stability analysis of a pipe conveying fluid which pulsates periodically is presented. The finite element model is formulated taking into consideration of the effects of the fluid pulsating in a pipe. The damping and stiffness matrices in the finite element equation vary with time due to pulsating fluid. Coupled effects of several harmonic components in the velocity of fluid to a pipe is discussed. A new unstable region appears which will not appear in the stability analysis of single pulsating frequency. A method to directly estimate the forced response of pipe is also discussed. The results presented in this paper are verified by the time domain analysis.

#### 1. 서 론

유체를 운반하는 배관의 동적 거동에 대한 연구는 산업 전반에서 필요로 하고 있다. 유체의 질량은 배관의 질량에 영향을 미치고, 유체의 유속은 배관의 강성과 감쇠에 영향을 주며, 유체의 유속이 커지면 배관의 고유진동수는 낮아지게 되며 불안정해질 수도 있다. 안정과 불안정의 경계가 되는 유체의 유속을 임계속도라고 하며, 유체의 유속이 임계속도보다 커지면 배관계는 불안정하게 된다. 그러나 시간에 따라 변하는 맥동하는 유체를 운반하는 배관의 경우

배관은 유체의 평균유속이 임계속도 보다 작더라도 불안정해지게 된다. 이런 현상을 매개변수 공진(parametric resonance) 현상이라고 하며 맥동하는 유체에 의해서 배관의 강성과 감쇠가 변하기 때문에 발생한다.

이런 문제를 풀기 위해 지금까지 몇몇의 연구가 진행되었다. Ginsberg<sup>(1)</sup>는 배관 양단의 경계조건에 따른 운동 방정식을 유도하고, 안정성을 조사하였고, Paidoussis<sup>(2,3)</sup>는 매개변수 영역에서 행렬의 행렬식을 계산함으로써 안정과 불안정 영역을 판별하는 수치적 방법을 개발하였다. 또한 Paidoussis<sup>(4)</sup>는 실험적인 결과와 수치적인 결과의 타당성을 조사하였다. Ariaratnam<sup>(5)</sup>은 Bolotin법이라는 안정성 해석방법에 기초한 Floquet 이론을 이용하여 큰 주기적 가진에 대한 해석 방법을 연구하였다. 이런 연구들<sup>(1,3,5,8)</sup>은 배관의 모드가 알려져 있을 때 적용할 수 있는 모드가정법을 사용하여 안정성 해석을 하였다. 또한

† 책임저자; 정회원, 부산대학교 기계공학부

E-mail : wbjeong@pusan.ac.kr

Tel : (051)510-2337, Fax : (051)517-3805

\* 정회원, 국방과학연구소 제 2 체계개발본부

\*\* 현대중공업 선박해양연구소

\*\*\* 부산대학교 대학원 기계공학부

\*\*\*\*정회원, 부산대학교 기계공학부 BK 사업단

이런 연구들은 배관의 유체가 단지 한 개 주파수 맥동성분만 가진다고 가정하였는데 실제의 경우유체는 몇 개의 주파수 성분이 주기적으로 맥동하는 경우가 대부분이다. 배관 내부의 유체가 주기적으로 맥동하면 기본 주기를 기준으로 여러 개의 조화 맥동하는 성분을 가지게 된다. 아직까지 여러 개의 조화성분을 갖고 맥동하는 유체를 운반하는 안정성 해석은 연구되지 않고 있다.

이 논문에서는 여러 개의 조화성분을 갖고 맥동하는 유체를 운반하는 배관의 안정성 해석에 대한 새로운 방법을 제시한다. 여러 개의 조화 맥동하는 유체의 안정성 해석에 대한 결과는 한 개의 맥동 성분을 가진 유체에서의 안정성 해석 결과의 중첩과 비교하여 차이점을 분석한다. 그리고 이 논문에서 제시한 안정성 해석 방법은 시간 영역에서의 해석을 통해서 검증한다. 또한 이 논문에서는 조화 맥동하는 유체를 운반하는 배관의 강제 진동 응답을 예측하는 방법도 제시한다. 배관 내부의 유체가 하나의 조화주파수로만 맥동하면서 배관을 가진하여도 배관의 응답은 유체 맥동주파수의 배수성분들의 중첩으로 나타난다. 이 방법은 배관의 강제 응답을 맥동 주파수의 조화 성분들의 급수로 가정하여 강제진동 응답을 예측할 수 있다. 몇몇의 예제는 배관의 응답이 맥동 주파수의 조화 성분들의 급수가 증가할수록 더 정확해 진다는 것을 보여준다.

## 2. 지배방정식

배관의 지름이 배관의 길이에 비해 충분히 작다고 가정하여 Euler빔 이론을 적용하면, 맥동하는 유체를 운반하는 배관의 운동방정식으로 나타낼 수 있다<sup>(8)</sup>.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \{\rho Au(t)^2 + (L-x)\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\rho Au(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial w}{\partial t} + (\rho A + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_r(x, t) \quad (1)$$

여기서  $w(x, t)$ 는  $x$  위치에서의 배관의 횡방향 변위를 나타내고,  $p_r(x, t)$ 는 분포하중을,  $L$ 은 배관의 길이,  $u(t)$ 는 배관 내부에 흐르는 유체의 유속,  $m$ 은 단위길이당 배관의 질량,  $A$ 는 배관 내부의 단면적,  $EI$ 은 배관의 굽힘 강성,  $\rho$ 는 유체의 밀도,  $c$ 는 배

관의 감쇠계수를 의미한다

가중잔차법(weighted residual method) 중에서 가중함수(weighting function)를 시도함수(trial function)와 같다고 가정하는 Galerkin법을 이용하면 식 (1)을 다음과 같이 이산화된 운동방정식으로 근사할 수 가 있다.

$$(\rho A + m)[S_1]\{\ddot{w}(t)\} + \{2\rho Au(t)[S_3] + c[S_1]\}\{\dot{w}(t)\} + \{EI[S_2] - (\rho Au(t)^2 + \rho AL \frac{du(t)}{dt})\}[S_4] + \rho A \frac{du(t)}{dt}([S_3] + [S_5])\}\{w(t)\} = \{f(t)\} \quad (2)$$

여기서 행렬  $[S_i]$ 는 형상함수의 적분을 통해서 계산할 수 있다. 식 (2)를 간단히 다음과 같이 고쳐서 표현한다.

$$[M]\{\ddot{w}(t)\} + [C(t)]\{\dot{w}(t)\} + [K(t)]\{w(t)\} = \{F(t)\} \quad (3)$$

여기서 감쇠행렬  $[C(t)]$ 과 강성행렬 $[K(t)]$ 은 시간에 따라 변하므로 식 (3)은 시변계(time-variant system)이다. 상미분방정식의 시간영역해석은 수치 해석을 통해서 풀 수 있지만 많은 계산 노력을 필요로 한다. 시간영역 해석을 하지 않고 배관의 안정성과 강제진동 응답을 예측하는 방법에 대하여 다음 절에서 언급하고자 한다.

## 3. 배관의 안정성 해석

유체가 주기  $T = 2\pi/\omega$ 를 가지고 주기적으로 맥동한다고 가정하면, 유속의 맥동은 Fourier 급수 전개 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(t) = \sum_{i=0}^N u_i \cos\left(\frac{2\pi i}{T}t + \phi_i\right) = \sum_{i=0}^N u_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad (4)$$

여기서  $N$ 은 조화성분의 개수를 의미하고,  $u_i$ 는 맥동 유속의 크기,  $\phi_i$ 는 위상을 의미한다. 진폭과 위상은 Fourier 급수 이론으로부터 쉽게 구할 수 있다. Bolotin법<sup>(7)</sup>을 이용하면 맥동 주파수의  $k/2$  배에 대한 Fourier 급수 전개를 이용하여 매개변수 공진의 해를 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{w}(t) &= \sum_{k=0}^M \left\{ \bar{a}_k \sin\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) + \bar{b}_k \cos\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^M \left\{ \bar{a}_k \sin\left(\frac{1}{2}\omega_k t\right) + \bar{b}_k \cos\left(\frac{1}{2}\omega_k t\right) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $M$ 은 Bolotin법에서 배관의 거동을 표현하기 위한 해의 개수를 의미한다. 식 (5)를 식 (3)에 대입하여 사인과 코사인의 계수들을 비교하면 대수 방정식의 무한한 조합은 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$[G_y] \begin{Bmatrix} \bar{a}_k \\ \bar{b}_k \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (6)$$

여기서,

$$\begin{Bmatrix} \bar{a}_k \\ \bar{b}_k \end{Bmatrix} = \{b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots\}^T$$

불안정한 영역은 식 (6)에서 행렬  $[G(\omega)]$ 의 행렬식이 음수가 되는 주파수  $\omega$ 를 찾는 것으로 구할 수 있다.

#### 4. 배관의 주파수응답 해석

주파수 영역에서의 강제진동 응답을 유도하기 위해서 가진력을  $F \sin \omega t$ 로 가정하면 식 (3)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{w}(t)\} + [C(t)]\{\dot{w}(t)\} + [K(t)]\{w(t)\} = \{F\} \sin \omega t \quad (7)$$

일정한 유속의 유체를 운반하는 배관의 경우는 감쇠행렬  $[C]$ 와 강성행렬  $[K]$ 가 시간에 따라 변하지 않으므로 강제진동 응답의 주파수는 가진 주파수와 같다. 그러나 시간에 따라 속도가 변동하는 유체를 운반하는 배관의 경우는 감쇠행렬  $[C(t)]$ 와 강성행렬  $[K(t)]$ 가 시간에 따라 변동하므로 유체맥동 주파수의 조화성분들의 중첩에 의해서 강제 응답을 나타낼 수 있다. 그러므로 식 (7)의 강제 진동 응답은 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \{w(t)\} &= \sum_{k=0,1,2,\dots} \{a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t)\}, \\ &= \sum_{k=0,1,2,\dots} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \sin(k\omega t - \varphi_k) \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)을 식 (7)에 대입하여 계수들의 관계를 조사하면 다음과 같은 연립방정식의 형태를 구성할 수 있다.

$$\begin{array}{cccccc} & k=0 & k=1 & k=2 & k=3 & \dots \\ \text{constant} & & & & & \\ \cos \frac{1}{2} \omega t & & & & & \\ \sin \frac{1}{2} \omega t & & & & & \\ \cos \frac{2}{2} \omega t & & & & & \\ \sin \frac{2}{2} \omega t & & & & & \\ \cos \frac{3}{2} \omega t & & & & & \\ \vdots & & & & & \end{array} \begin{Bmatrix} b_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (9)$$

식 (9)의 연립방정식의 해  $a_k, b_k (i=1,2,\dots)$ 를 구하면, 강제진동 주파수응답을 식 (8)로부터 구할 수 있다. 여기서 계수  $a_k, b_k (k=1,2,\dots)$ 는 맥동 주파수의  $k$  배 성분을 나타낸다.

#### 5. 수치 해석 결과

길이 1m인 양단 고정 직관 배관이 조화 맥동하는 유체를 운반한다고 가정하였다. 배관은 바깥지름은 0.008m이고 두께는 0.002m인 steel재질이며, 유체의 평균 유속은 21m/s이다. 배관을 50개의 요소로 나누어서 해석 하였다.

##### 5.1 안정성 해석 결과

배관 내부의 유체가 주파수  $\omega$ 와  $5\omega$ 인 2개의 맥동성분을 동시에 가지고 있다고 가정하면 유체의 유속은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(t) = u_0 + u_1 \cos(\omega t) + u_1 \cos(5\omega t) \quad (10)$$

Fig. 1은 두 개의 맥동성분을 가지는 내부유체에 의한 안정성 해석 결과를 보여준다. 수평축은 맥동 유속진폭을 평균유속으로 나눈 무차원 량이며, 수직축은 유체의 맥동주파수를 배관의 1차 공진주파수로 나눈 무차원 량이다. 두 개의 맥동성분을 동시에 고려했을 경우에 나타나는 불안정한 영역이 각각 하나의 맥동성분만 고려하여 해석한 결과를 포함하는지를 확인해야 한다. Fig. 2는 하나의 맥동성분을 가지

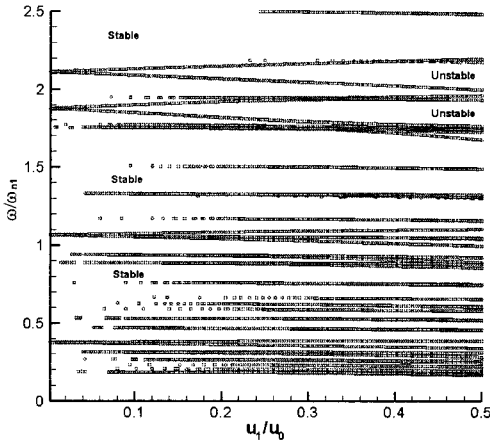
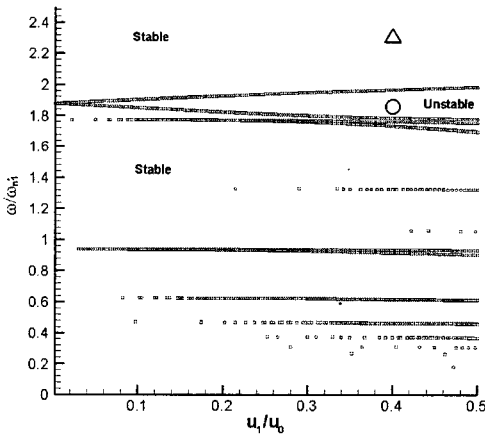
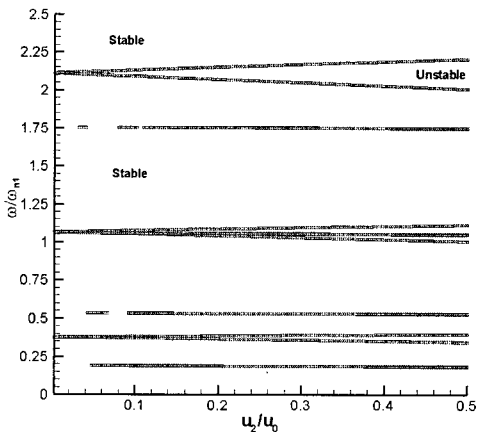


Fig. 1 Unstable region of a pipe ( $u = u_0 + u_1 \cos(\omega t) + u_1 \cos(5\omega t)$ )



(a)  $u(t) = u_0 + u_1 \cos(\omega t)$



(b)  $u(t) = u_0 + u_1 \cos(5\omega t)$

Fig. 2 Unstable region of a pipe with single-frequency fluid pulsation

는 내부유체에 의한 안정성 해석 결과를 보여준다. Fig. 1에 Fig. 2를 겹쳐서 보면 하나의 맥동성분만 고려했을 경우 나타나지 않았던 불안정한 영역이 Fig. 3과 같이 나타나는 것을 확인할 수 있다. Fig. 3은 하나의 맥동성분만 고려하여 안정성 해석한 결과에서 나타나지 않은 새로운 불안정한 영역을 나타낸다. 이 새롭게 나타나는 불안정한 영역 때문에 배관 내부의 유체가 여러 개의 조화 맥동성분을 가지는 경우, 각각의 단일 주파수 해석에 의한 중첩이 아닌 모든 맥동성분을 동시에 고려하여 배관의 안정성 해석을 해야 함을 알 수 있다.

안정성 해석 결과를 검증하기 위해서, Fig. 3에서 원형으로 나타난 기호로 표시된 불안정한 조건 ( $u_1/u_0 = 0.4, \omega/\omega_{n1} = 1.496$ )에 대하여 시간영역 해석을 수행하였다. 이 조건은 Fig. 2에서 보면 하나의 맥동성분에 대한 안정성 해석을 수행했을 경우 안정하다고 해석된 조건이지만 Fig. 1에서 보듯이 두 개의 맥동성분을 동시에 고려하여서 해석했을 때는 불안정하다고 해석된 조건이다. Fig. 4는 시간 해석을 수행한 결과를 보여준다. 이 그림은 각각 하나의 맥동성분만 고려하여 안정성 해석했을 경우에는 나타나지 않았던 불안정한 조건이 두 개의 맥동성분을

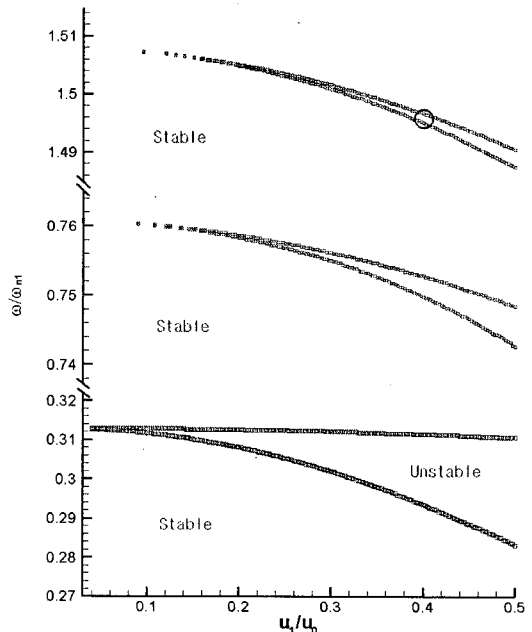


Fig. 3 New unstable region (comparison of Fig. 1 with Fig. 2)

동시에 고려하면 나타날 수 있음을 보여주며 제시된 논문의 타당성도 보여준다.

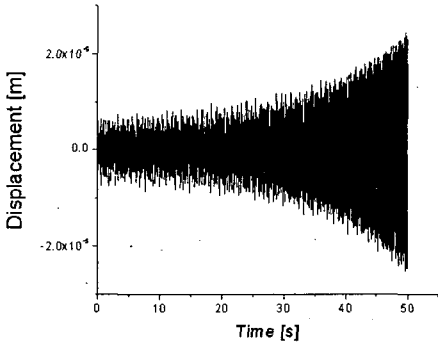
5.2 주파수응답 해석 결과

식(9)의 연립방정식을 풀어서 구한 강제진동 변위 응답 스펙트럼은 Fig. 5와 같다. 수평축은 가진주파

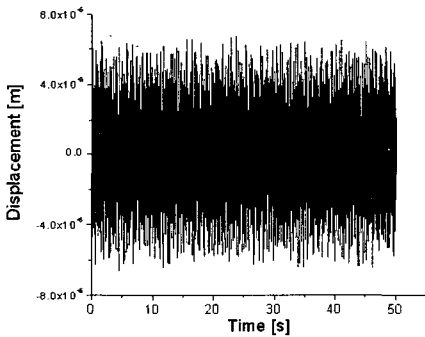
수를 나타내며 유체의 기본 맥동주파수와 동일하고, 수직축은 배관의 변위응답을 나타낸다. 강제진동 응답은 식 (8)에 나타내었듯이 여러 맥동주파수의 중첩으로 나타난다. Fig. 5의 세 개의 범례는 각각 첫 번째(맥동 주파수,  $k=1$ ), 두 번째(맥동 주파수의 2 배,  $k=2$ ), 세 번째( $k=3$ ) 조화성분들을 나타낸다.

Fig. 5의 결과를 검증하기 위해서, 가진주파수  $\omega = 10.75 \text{ rad/s}$  와  $\omega = 23.0 \text{ rad/s}$  인 경우를 선택하였다. Fig. 5에서 수직 점선은 각 주파수에 대한 강제진동 응답을 나타낸다. 배관의 정상상태 응답의 시간 데이터는 과도 응답을 사라지게 하기 위해 배관 구조에 대한 작은 감쇠를 추가하여 계산 되어질 수 있다. 조화 성분들의 크기는 시간 데이터를 Fourier 변환함으로써 계산할 수 있다. Table 1과 Table 2 는 조화 성분들의 크기를 비교한 것이다. 하나는 식 (8)로부터 조화성분들의 산출한 것이고, 다른 하나는 시간 데이터의 Fourier 변환을 이용하여 맥동 성분들의 크기를 산출한 것이다. 식 (8)에 산출된 조화 성분들의 크기는  $k$  차수를 많이 고려할 수록 참값에 가까워 짐을 알 수 있다. 제안된 방법은 맥동 주파수의 조화성분들을 시간 데이터의 계산 없이 구할 수 있기 때문에 계산시간을 단축시킬 수 있다.

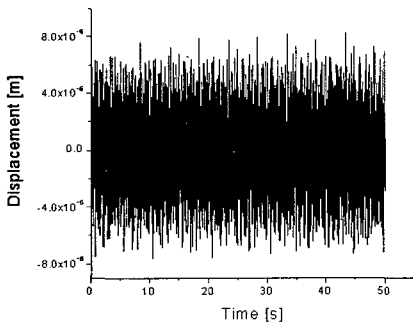
Fig. 6 은 시간응답 데이터를 비교한 것이다. 제시한 결과는 Table 1(또는 Fig. 5)에서부터 직접 재현한 것이고, 참값은 Runge-Kutta법을 이용하여 구한 시간응답 데이터이다. 이 논문의 방법을 통해서 강제 응답의 크기뿐만 아니라 위상 까지도 예측할 수 있다는 것을 보여준다.



(a) Unstable ( $u = u_0 + u_1 \cos(\omega t) + u_2 \cos(5\omega t)$ )



(b) Stable ( $u = u_0 + u_1 \cos(\omega t)$ )



(c) Stable ( $u = u_0 + u_2 \cos(5\omega t)$ )

Fig. 4 Time response ( $u_1/u_0=0.4$ ,  $u_2/u_0=0.4$ ,  $\omega/\omega_{n1}=1.496$ )

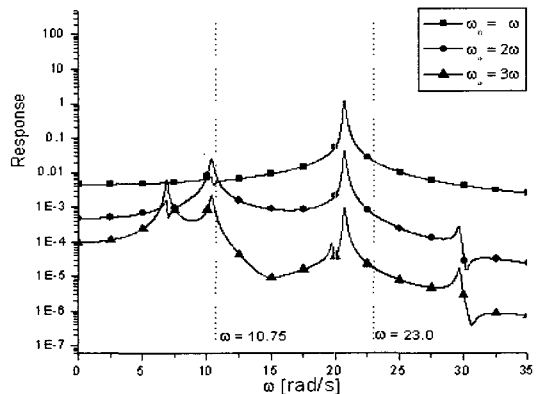


Fig. 5 Forced response by the proposed method

Table 1 Amplitudes of harmonics at  $\omega = 10.75 \text{ rad/s}$

Harmonics of pulsating frequency	Fourier transformation of time data	Direct estimation by Eq.(8)		
		k = 1	k = 1, 2	k = 1, 2, 3
0	$9.326 \times 10^{-5}$	$7.466 \times 10^{-4}$	$9.181 \times 10^{-5}$	$9.608 \times 10^{-5}$
$1\omega$	$1.667 \times 10^{-3}$	$1.980 \times 10^{-3}$	$1.690 \times 10^{-3}$	$1.670 \times 10^{-3}$
$2\omega$	$2.254 \times 10^{-3}$	-	$2.150 \times 10^{-3}$	$2.320 \times 10^{-3}$
$3\omega$	$1.453 \times 10^{-4}$	-	-	$1.620 \times 10^{-4}$

Table 2 Amplitudes of harmonics at  $\omega = 23.0 \text{ rad/s}$

Harmonics of pulsating frequency	Fourier transformation of time data	Direct estimation by Eq.(8)		
		k = 1	k = 1, 2	k = 1, 2, 3
0	$2.420 \times 10^{-4}$	$2.332 \times 10^{-4}$	$2.370 \times 10^{-4}$	$2.369 \times 10^{-4}$
$1\omega$	$6.761 \times 10^{-3}$	$6.750 \times 10^{-3}$	$6.790 \times 10^{-3}$	$6.790 \times 10^{-3}$
$2\omega$	$1.953 \times 10^{-4}$	-	$1.990 \times 10^{-4}$	$1.984 \times 10^{-4}$
$3\omega$	$6.236 \times 10^{-6}$	-	-	$5.676 \times 10^{-6}$

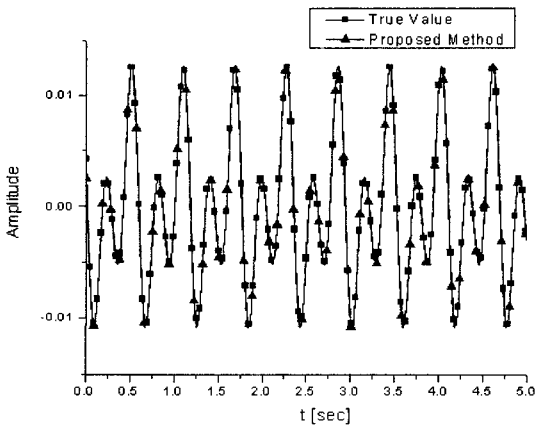


Fig. 6 Comparison of time data in Table 1

## 6. 결 론

배관 내부의 맥동하는 유체의 영향을 고려한 배관의 지배방정식은 시간에 따라 감쇠행렬과 강성행렬이 변하는 시변계(time-variant system)이다. 이 논문에서는 이와 같은 시변계에 대한 안정성 해석과 주파수응답 해석을 수행하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 여러 개의 조화성분으로 맥동하는 유체를 운반하는 배관의 안정성 해석에 있어서 각각 하나의 조화

맥동하는 성분을 고려했을 경우 나타나지 않았던 새로운 불안정한 영역이 나타남을 확인하였다. 안정성 해석의 결과는 시간영역 해석으로 검증하였다.

(2) 조화 맥동하는 유체를 고려한 배관의 강제진동 정상상태 응답을 주파수영역에서 직접 예측하기 위한 방법이 제시되었다. 제시한 방법에 의한 응답 스펙트럼은 시간영역 응답의 Fourier변환에 의해 얻어진 결과와 거의 일치함을 보여주었다.

## 후 기

이 논문은 부산대학교 자유과제 학술연구비(2년)에 의하여 연구되었습니다.

## 참 고 문 헌

- (1) Jerry H. Ginsberg, 1973, "The Dynamic Stability of a Pipe Conveying a Pulsatile Flow", International Journal of Engineering Science Vol. 11, pp. 1013~1024.
- (2) Paidoussis, M. P. and Issid, N. T., 1976, "Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid, Journal of Sound and Vibration", Vol. 33, pp. 267~294.

(3) Païdoussis, M. P. and Sundararajan, C., 1975, "Parametric and Combination Resonances of a Pipe Conveying Pulsating Fluid", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 42, pp. 780~784.

(4) Païdoussis, M. P. and Issid, N. T., 1976, "Experiments on Parametric Resonance of a Pipes Containing Pulsatile Flow", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 43, pp. 198~202.

(5) Ariaratnam, S. T. and Sri Namachchivaya, N., 1986, "Dynamic Stability of Pipes Conveying

Pulsating Fluid, *Journal of Sound and Vibration*", Vol. 107, pp. 215~230.

(6) Meirovitch, L., 1970, "Methods of Analytical Dynamics", McGraw-Hill.

(7) Bolotin, V. V., 1964, "The Dynamic Stability of Elastic Systems", Holden Day.

(8) Païdoussis, M. P., 1998, *Fluid-structure Interactions; Slender Structures and Axial Flow* Vol. 1.