

## 취성 재료의 마이크로 크랙킹 거동에 관한 자연요소해석

강 성 수†

(원고접수일 : 2006년 7월 7일, 심사완료일 : 2006년 9월 18일)

### Natural Element Analysis on Micro-cracking Behavior of Brittle Solids

Sung-Soo Kang†

**Abstract** : Fracture behavior of brittle solids is closely related to microcracking. A meso-scale analysis method using the natural element method is proposed for the analysis of brittle microcracking solids. The microcracking is assumed to occur along Voronoi edges in the Voronoi diagram generated using the nodal points as the generators. The mechanical effect of microcracks is considered by controlling the material constants in the neighborhood of the microcracks. The meso-analysis method is applied to the simulation of the microcracking behaviors of brittle solids subjected to tensile macrostress. The method is also applied to the analysis of the propagation of a macrocrack accompanied by the coalescence with microcracks formed near the macrocrack-tip.

**Key words** : Computational mechanics(전산역학), Brittle fracture(취성 파괴), Natural element method(자연요소법), Material damage(재료 손상), Microcracks(마이크로 크랙), Crack propagation(크랙 진전)

#### 1. 서 론

현재, 공학 분야에서 대상이 되고 있는 다양한 역학 현상을 해석함에 있어 가장 폭 넓게 이용되고 있는 근사해법은 유한요소법(Finite Element Method: FEM)이다. 유한요소법이 일반적인 수치방법으로 여러 이점이 있음에도 불구하고, 복잡한 대형 구조물을 해석할 경우에는 많은 요소분할, 데이터 작성 등 번거로운 문제점들을 내포하고 있다. 이에 반해, 최근 활발히 개발되고 있는 무요소법<sup>(1)</sup>은 문자 그대로 격자 또는 요소를 필요로 하지

않는 해석 수법으로, 절점을 분포시키는 것만으로 해석 대상의 모델링이 가능하며, 입력 데이터 작성에 드는 소모가 크게 경감되는 장점이 있다. Sukumar 등의 자연요소법(Natural Element Method: NEM)<sup>(2)</sup>을 그 대표적인 예로 들 수 있는데, 일반적인 유한요소법과 비교하여, 강성 방정식의 구성 과정은 거의 동일하지만, 형상함수 구성에 자연 근방 보간법(Natural Neighbor Interpolation)이라는 근사법을 이용한다는 큰 특징을 가지고 있다. 즉, 유한요소법에선 형상함수의 정의가 요소 내에 국한되지만, NEM에선 주위의

† 책임저자(전주대학교 기계자동차공학과), E-mail:sskang@jj.ac.kr, Tel: 063)220-3077

절점간의 위치 상관관계에 따라 바뀌게 되므로 유한요소해석 결과보다 구조물에 따라서는 보다 고정도의 해를 얻는 경우가 많다.

한편, 다결정 취성고체의 파괴 거동은, 결정 입계 등에서의 미소 크랙의 발생, 즉 마이크로 크랙킹과 밀접한 관계를 갖는다. 이러한 개개의 마이크로 크랙의 역학적 효과를 직접 고려할 수 있는 메소스케일 해석 수법으로서, 계산 불연속체 역학 모델(강체-스프링 모델)이 개발되어 있다<sup>(3),(4)</sup>. 이 방법은 물리적 의미가 명확하고, 계산 알고리즘도 간단하지만, 스프링 상수의 결정과 이방성 재료의 고려 등에 단점이 있다.

본 연구에서는 계산 불연속체 역학 모델의 단점을 극복한 새로운 이차원 메소 해석 수법을 제안하고, 자연요소법의 장점을 이용하여 비정상 마이크로 크랙킹 거동을 해석하였다. 즉, 마이크로 크랙을 포함하지 않은 정방형 고체에 단축 인장 응력을 가하여, 마이크로 크랙의 발생에 의한 비선형 변형 과정을 해석하였다. 게다가, 매크로 크랙이 근방에 발생하는 마이크로 크랙과 결합하면서 진전하는 매크로 크랙 거동을 해석하였다. 이러한 결과들을 통하여 제안한 수법의 유용성에 대하여 검토한다.

## 2. 마이크로 크랙킹 거동

본 장에선, 단축인장 매크로 응력하의 정방형 영역내의 마이크로 크랙킹 거동을 해석하고, 매크로 응력·변형을 관계에 대하여 논한다.

### 2.1 마이크로 크랙의 모델링

Fig. 1(a)는 해석모델의 절점배치도이며, Fig. 1(b)와 Fig. 1(c)는 각각 Voronoi분할도 및 Delaunay삼각형으로서, 이렇게 랜덤하게 생성된 절점에 대하여, 이차원 NEM 해석법을 적용한다. 마이크로 크랙은 Fig. 1(a)의 절점을 모점으로 하는 Voronoi분할도의 각 Voronoi변에 발생한다고 가정한다. 즉, Fig. 2(a)에 보이는 것처럼, 각 Voronoi변의 최근방 적분점  $[x_2, x_3, x_4, x_5]$ 에서의 수직 마이크로 응력  $\sigma_n$  의 평균값은 식(1)과 같이 한계값에 도달했을 때 크랙이 발생한다고 가정한다.

$$\sigma_{ave} \left( \sum \frac{\sigma_n}{4} \right) \geq \sigma_{critical} \quad (1)$$

여기서,

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2)$$

본 메소해석 수법의 마이크로 크랙킹 거동 해석에서의 정성적인 유용성을 검토하기 위해, 응력 특이성 등을 무시한 식(1)과 같은 간이 판별식을 가정하였다. 본 장의 단축인장 매크로 응력하의 마이크로 크랙킹 거동에 관한 해석의 경우에는, 정성적인 논의에 머무르기 때문에,  $\sigma_{critical}$  을 임의로 설정하였지만, 실험결과와의 정량적 비교를 할 경우는 손상·파괴를 동반하는 재료 시험 결과와의 비교에 의해  $\sigma_{critical}$  를 정해야 한다. 전체 좌표계에 있어서의 등방성 탄성계수 행렬  $[D_1]$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$[D_1] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

각 마이크로 크랙에 대해 Fig. 3과 같이 정의된 국소 좌표계에 의한 이방성 행렬을 다음과 같이 표시한다.

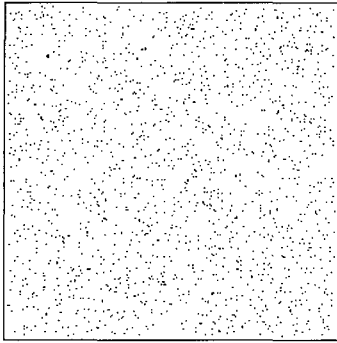
$$[D_2] = \frac{E_2'}{(1-n\nu_2'^2)} \begin{bmatrix} n' & n'\nu_2' & 0 \\ n'\nu_2' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m'(1-n\nu_2'^2) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$n' = \frac{E_1'}{E_2'}, m' = \frac{G_2'}{E_2'} = \frac{1}{2(1+\nu_2')} \quad (5)$$

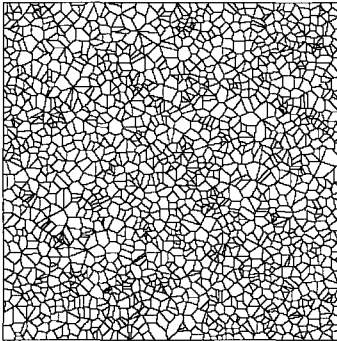
여기서,  $n'$ 는 국소 좌표계에서의  $x', y'$  방향의 영의 계수 비,  $m'$ 는  $y'$  방향의 전단 계수와 영의 계수 비이다.

이러한 탄성계수 행렬 중의 탄성 정수를 조정함으로써, 마이크로 크랙의 역학적 효과를 근사한다. 즉, 개개의 마이크로 크랙의 역학적 효과를 그 근방에서 평균적으로 표현하고자 하는 것으로, 응력 특

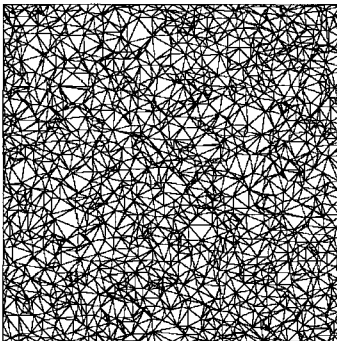
이성, 상호 간섭 등을 정밀하게 해석하고자 함을 목적으로 하지 않는다. 이 때, Fig. 2에서 마이크로 크랙에 가까운 4개의 적분점  $[x_2, x_3]$  및  $[x_4, x_5]$  (이를 최근방 적분점이라 한다) 및 그 다음 가까운 적분점  $[x_1, x_6]$  (이를 근방 적분점이라 한다)에서 조정 내용을 변화시킨다.



(a) Node distribution

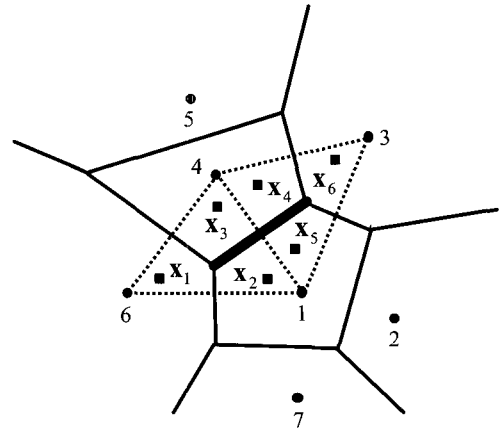


(b) Voronoi diagram

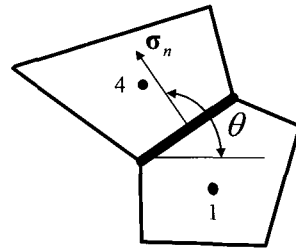


(c) Delaunay triangle

Fig. 1 Analyzed model



(a) Numerical consideration of a microcrack



(b) Normal microstress of a microcrack

Fig. 2 Consideration of a microcrack

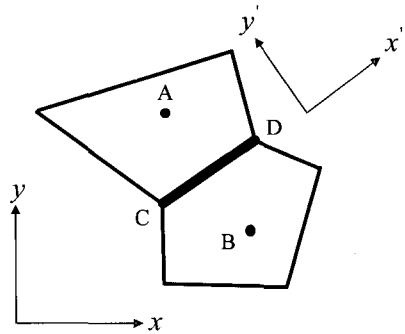


Fig. 3 Global coordinate system and local coordinate system for a microcrack

마이크로 크랙 발생 후는, 최근방 및 근방 적분점에서의 이방성 응력·변형률 행렬에서의 탄성 정수를 다음과 같이 변경한다.

(a) 최근방 적분점에서:  $E'_2 \rightarrow 0$

(b) 근방 적분점에서:  $E'_2 \rightarrow 0.2 \times E'_2, \nu'_2 \rightarrow 0$

여기서,  $E_2'$ 는 마이크로 크랙에 수직한 방향의 영의 계수(Young's modulus)를 나타낸다. 즉, 마이크로 크랙의 역학적 효과는 이방성이라고 가정하고, 마이크로 크랙의 폐쇄는 고려하지 않는다. 이 가정에 의한 계산 결과가, 계산 불연속체 역학 모델에 의한 계산 결과와 정량적으로 양호하게 대응하고 있음을 근거로 하여 위와 같이 채택하였다.

계산은 증분 이론에 따르며, 증분형 강성 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$K \Delta u = \Delta f^{ext} + f^r \quad (6)$$

여기서,

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T D B_I d\Omega$$

$$f_I^r = - \int_{\Omega} B_I^T \sigma d\Omega \quad (7)$$

$$B_I^T = \begin{bmatrix} \Phi_{I,x} & 0 & \Phi_{I,y} \\ 0 & \Phi_{I,y} & \Phi_{I,x} \end{bmatrix}$$

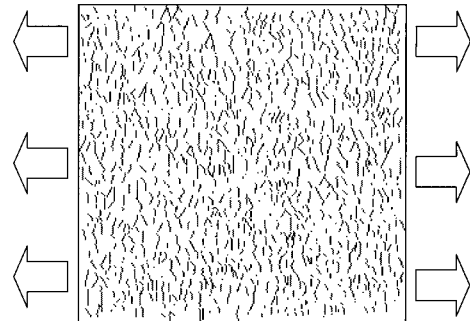
식(6)중의  $f^r$ 은, 직전의 증분 스텝에서 발생한 마이크로 크랙에 대한 해방력 벡터,  $\Phi_i$ 는 절점에 대한 형상함수이다.

## 2.2 마이크로 크랙의 안정성

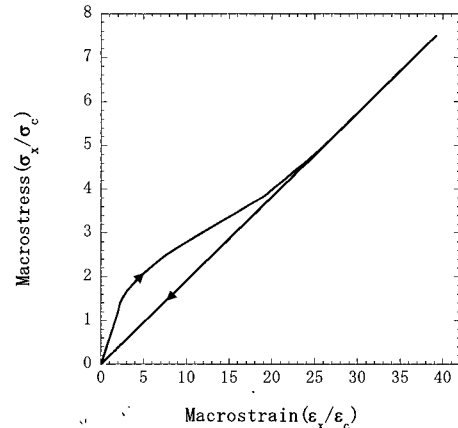
세라믹과 같은 다결정 취성 고체에선, 열적 이방성에 기인하여 제조 시에 발생하는 잔류 마이크로 응력은 인접 결정립계에서 상호 인장과 압축을 반복하는 경향이 있다. 이러한 인장 잔류 마이크로 응력을 갖는 결정립계에 발생한 마이크로 크랙은 인접 입계의 압축 잔류 마이크로 응력에 의해 구속되며, 마이크로 크랙의 안정성이 나타난다고 알려져 있다<sup>[5]</sup>. 본 해석에서는 초기 잔류 마이크로 응력의 존재는 가정하지 않지만, 상기의 사실을 고려하여, 마이크로 크랙이 발생한 Voronoi변의 인접 입계에 있어서는, 마이크로 응력 값에 관계없이, 마이크로 크랙이 발생하지 않는다고 판단하였다.

## 2.3 해석 결과

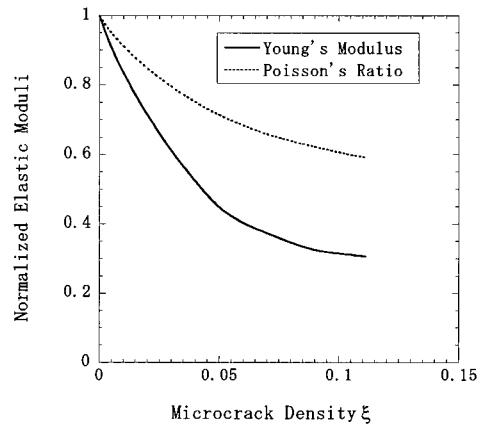
Fig. 4는 계산 결과로서, Fig. 4(a)는 발생한 마이크로 크랙 수가 1149일 때의 마이크로 크랙 분포



(a) Distribution of microcracks



(b) Macrostress-macrostrain relation



(c) Macro elastic moduli versus microcrack density

Fig. 4 Results for uniaxial tension

도이다. 인장 방향과 수직인 방향으로 많은 수의 마이크로 크랙이 발생하고 있어 이방성이 현저함을 알 수 있다. Fig. 4(b)의 매크로 응력·매크로 변형을 곡선으로부터, 초기의 선형 탄성, 마이크로 크랙킹의 진전 및 마이크로 크랙의 포화 및 제하 거동이 적절하게 시뮬레이터 되었음을 알 수 있다. 즉, 세라믹의 마이크로 크랙에 의한 높은 인성화를 논의할 때 가정되는 전형적인 매크로 응력·변형률 관계와 같은 결과를 얻었다<sup>(6),(7)</sup>. 또한 Fig. 4(b)의 매크로 응력  $S_x$  및 매크로 변형률  $E_x$ 은 각각 최초의 마이크로 크랙 발생시의 값으로 무차원화 되었다.

또한, Fig. 4(c)의 마이크로 크랙 밀도와 매크로 탄성정수의 관계로부터, Budiansky와 O'Connell에 의한 이론 해석<sup>(8)</sup>과 달리, 영의 계수와 프와송비는 마이크로 크랙의 밀도가 증가함에 따라 비선형적으로, 다른 비율로 저감하는 것을 알 수 있다. 이는 Budiansky와 O'Connell의 해석<sup>(8)</sup>에서는 랜덤하게 분포한 마이크로 크랙이 가정되고 있음에 대해, 단축인장에 의해 발생하는 마이크로 크랙은 명백한 방향성을 갖고 있음에 기인한다. 또한, 이상의 모든 결과는, 계산 불연속체 역학 모델에 의한 해석 결과<sup>(9)</sup>와도 양호하게 대응하고 있다.

### 3. 매크로 크랙 진전 해석

2장에서는 마이크로 크랙의 안정성을 가정하였고, 광범위에 분산적으로 발생하는 마이크로 크랙을 취급하였다. 본 3장에선, NEM을 이용한 메소 해석 수법을, Fig. 5와 같은 초기 크랙을 갖는 취성 고체의 매크로 크랙 진전 거동 해석에 적용하였다.

#### 3.1 해석 모델과 크랙 진전 모델링

세라믹, 콘크리트 등과 같은 취성 고체에 있어서, 초기 매크로 크랙의 선단부 근방에 다수의 마이크로 크랙이 발생하고, 기존의 매크로 크랙선단과 이들 미소 크랙들이 결합함으로써, 매크로 크랙이 진전되어 가는 파괴 기구가 관측된다<sup>(10)</sup>.

NEM을 이용한 메소 해석 수법을 이용한 매크로

크랙 진전 해석에선, Fig. 5와 같은 초기 크랙으로부터 진전이 일어나는 상황을 가정한다. 임의의 적분점  $X$ 에 대한 변위를 계산할 때, 이미 매크로 크랙이 진전한 Voronoi 변을 가로지르는 Delaunay삼각형(Fig. 6에서 점선의 원으로 둘러싸인 삼각형)을, 적분점  $X$ 의 근방점 탐색으로부터 제외시킨다. 즉, 적분점  $X$ 의 근방 점들(Natural Neighbors) 중, 매크로 크랙을 횡단하는 절점간의 역학적 연성을 제거함으로써, 형상함수 계산시 매크로 크랙의 영향을 고려한다. 또한, 매크로 크랙 근방에 발생하는 마이크로 크랙의 역학적 효과에 대해선, 이방성을 나타낸다고 가정하였고, 마이크로 크랙의 안정성을 가정하지 않았다. 즉, 마이크로 크랙이 발생한 Voronoi변에 인접한 Voronoi변에 대해서도 마이크로 크랙의 발생을 허용하였다.

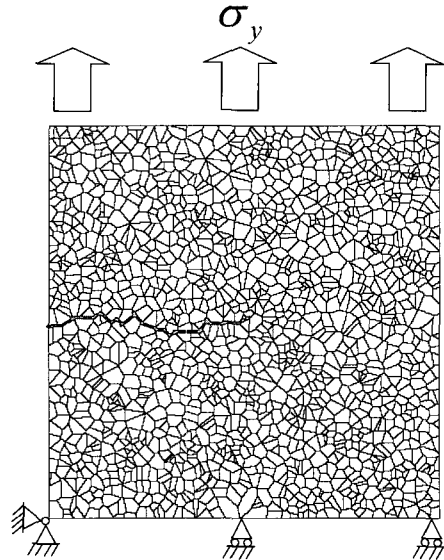


Fig. 5 Model with single-crack

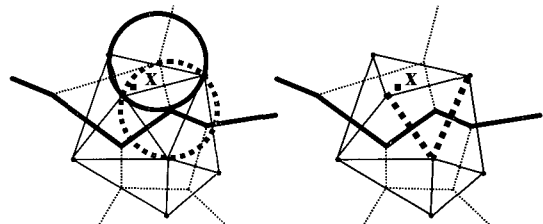


Fig. 6 Consideration of macrocrack propagation

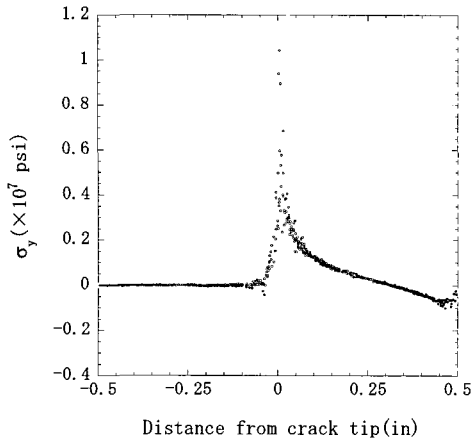
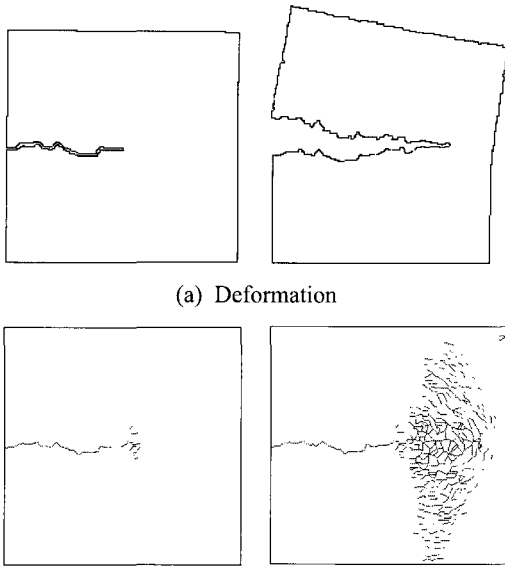


Fig. 7 Microstress distribution



(a) Deformation  
(b) Distribution of microcracks  
Fig. 8 Propagation of a macrocrack

3.2 해석 결과

Fig. 7은 매크로 크랙 선단부 근방 ( $0.45 \leq y \leq 0.55$ )에서의  $y$  방향 마이크로 응력 성분을 나타낸다. 매크로 크랙 선단부에 발생하는 높은 응력이 정도 좋게 계산되어 있으며, 초기 크랙 부분에는 거의 응력이 발생하지 않음을 알 수 있다.

Fig. 8은 계산된 변형도로서, 매크로 크랙의 진전과 주변에 발생하는 마이크로 크랙의 분포를 나

타낸다. 초기 크랙이 그 선단부 근방에 발생하는 마이크로 크랙을 흡수하면서 진전하는 현상을 양호하게 재현하고 있다. 이러한 계산 결과는 콘크리트에 있어서의 크랙 진전에 관한 실험 결과<sup>(10)</sup> 등과 정성적으로 일치하고 있다. 매크로 크랙과 마이크로 크랙에 있어서의 응력 특이성, 크랙 발생 조건에 대해선 충분한 검토가 더 필요하지만, 메소스케일의 복잡한 재료 손상, 파괴 거동을 파악하기 위한 수법의 하나로써 본 해석 수법의 유용성을 보였다고 생각된다.

4. 결 론

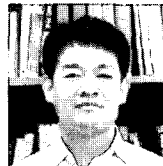
본 연구에서는 자연요소법을 이용한 새로운 메소 해석 수법을 제안하여 단축 인장 매크로 응력을 받는 취성 고체의 마이크로 크래킹 거동 해석에 적용하였다. 해석 결과를 계산 불연속체 역학 모델에 의한 해석 결과와 비교함으로써, 개개의 마이크로 크랙의 이방성의 영향을 고려한 마이크로 크래킹 거동 해석에, 본 수법이 유용함을 보였다. 게다가, 제안한 수법을 매크로 크랙 진전 거동 해석에 적용하여, 선단 근방에 발생하는 마이크로 크랙을 흡수하면서 진전하는 복잡한 매크로 크랙 진전 거동에 대해 합리적인 해를 얻을 수 있음을 보였다.

참고문헌

[1] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming and P. Krysl, "Meshless Methods: An Overview and Recent Developments", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, No. 1, pp. 3-47, 1996.  
 [2] N. Sukumar, B. Moran and T. Belytschko, "The Natural Element Method in Solid Mechanics", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 43, No. 5, pp. 839-887, 1998.  
 [3] Y. Toi and J.-S. Che, "Computational Damage Mechanics models for Brittle

- Microcracking Solids based on Mesoscopic Simulations", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 48, No. 4, pp. 483-498, 1994.
- [4] Y. Toi and T. Kiyosue, "Damage Mechanics Models for Brittle Microcracking Solids based on Three-dimensional Mesoscopic Simulations", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 50, No. 1, pp. 11-27, 1995.
- [5] Y. Fu and A. G. Evans, "Some Effects of Microcracks on the Mechanical Properties of Brittle Solids-I. Stress, Strain Relations", *Acta Metallurgica*, Vol. 33, No. 8, pp. 1515-1523, 1985.
- [6] S. Murakami, "Notion of Continuum Damage Mechanics and Its Application to Anisotropic Creep Damage Theory", *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 105, No. 1, pp. 99-105, 1983.
- [7] P. G. Charalambides and R. M. McMeeking, "Finite Element Method Simulation of Crack Propagation in a Brittle Microcracking Solid", *Mechanics of Materials*, Vol. 6, No. 1, pp. 71-87, 1987.
- [8] B. Budiansky and R. J. O'Connell, "Elastic Moduli of a Cracked Solid", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 12, No. 2, pp. 81-97, 1976.
- [9] Y. Toi and J.-S. Che, "Mesoscopic Simulation of Microcracking Behavior of Brittle Polycrystalline Solids (2nd Report, Study of Anisotropic Theory in Continuum Damage Mechanics)", *JSME International Journal, Series A*, Vol. 37, No. 4, pp. 442-449, 1994.
- [10] Z. P. Bazant, *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, Elsevier Applied Science, 1992.

## 저 자 소 개



### 강성수 (姜成洙)

1972년생, 1998년 부산대학교 기계설계공학과 졸업, 2000년 일본 동경대학교 대학원 환경해양공학과 졸업(석사), 2003년 일본 동경대학교 대학원 환경해양공학과 졸업(박사), 현재 전주대학교 기계자동차공학과 교수