

# 비정규 모집단에 대한 일변량 및 다변량 누적합 관리도의 성능 분석

장영순<sup>\*†</sup>

\* 명지대학교 경영학과

## Effects of Non-normality on the Performance of Univariate and Multivariate CUSUM Control Charts

Young Soon Chang<sup>\*†</sup>

\* Department of Business Administration, Myongji University

Key Words : CUSUM Control Chart, Non-normality, Average Run Length

### Abstract

This paper investigates the effects of non-normality on the performance of univariate and multivariate cumulative sum(CUSUM) control charts for monitoring the process mean. In-control and out-of-control average run lengths of the charts are examined for the univariate/multivariate lognormal and  $t$  distributions. The effects of the reference value and the correlation coefficient under the non-normal distributions are also studied. Simulation results show that the CUSUM charts with small reference values are robust to non-normality but those with moderate or large reference values are sensitive to non-normal data especially to process data from skewed distributions. The performance of the chart to detect mean shift of a process is not invariant to the direction of the shift for skewed distributions.

## 1. 서 론

통계적 공정관리(Statistical Process Control ; SPC)의 중요한 목적중의 하나는 공정에 이상이 발생했을 때 이를 빨리 탐지하여 적절한 수정조치를 취하는 것이다. 이러한 목적으로 사용되는 대표적인 기법이 관리도이다. 관리도란 관리한계선이 있는 그래프에 시간의 흐름에 따른 품질의 변동 상황을 나타낸 것으로, 표본으로부터 계산한 관리통계량(charting statistic)의 값을 순차적으로 타점하여 공정의 이상유무를 판단한다. 만일 모든 점들이 관리한계선 안에 놓이고 점들의 형태로부터 별다른 이상 징후가 발견되지 않으면 공정이 관리상태에 있다고

보고, 만약 한 점이라도 관리한계선을 벗어나거나 점들이 특정한 추세를 보이면 공정이 이상상태에 있다고 판단하여 공정을 면밀히 조사하게 된다.

관리도는 관리되는 품질특성치의 개수에 따라 일변량 혹은 다변량 관리도로 나누어진다. 최근에는 검사장비 등의 발달로 인해 다수의 품질특성치들로 구성되는 다변량 데이터를 공정관리에 사용하기가 용이해 지고 있으며, 따라서 상호관련성이 존재하는 다수의 품질특성치들을 동시에 관리하기 위한 다변량 관리도의 중요성이 점점 더 강조되고 있다. 또한, 관리도는 관리통계량을 구성하는 방법에 따라 Shewhart 형태의 관리도( $\bar{X}$  및  $T^2$  관리도), 누적합(CUMulative SUM ; CUSUM) 관리도, 지수가중이동평균(Exponentially Weighted Moving Average ; EWMA) 관리도 등으로 나누어 볼 수 있다. Shewhart 형태의 관리도는 현재 시점의 관측치에

† 교신저자 yschang@mju.ac.kr

※ 이 논문은 2006년도 명지대학교 교내연구비 지원사업에 의하여 연구되었음

근거하여 관리통계량을 계산한 후 공정의 이상유무를 판단하는 것이고, CUSUM 및 EWMA 관리도는 공정의 작은 변화를 빠르게 탐지하도록 과거의 데이터와 현재 시점에서 얻어진 값을 누적하여 관리통계량으로 사용하는 것이다. 이러한 관리도들에 대해서는 Montgomery(2001), Lowry and Montgomery (1995)와 Mason et al.(1997)에 자세히 정리되어 있다.

관리도에 관한 대부분의 연구는 공정이 정규분포를 따른다는 가정 하에 이루어졌다. 그러나 화학공정이나 충전공정(filling process), 반도체 공정 등에서 얻어지는 데이터는 많은 경우 비대칭 분포를 따른다는 것이 알려져 있다(Cheng et al., 2000 ; Qiu and Hawkins, 2001). 특히, 다변량 품질특성치의 경우에는 정규성을 검정하는 방법들이 충분한 검정력을 갖고 있지 않고 있어 실제로 데이터들이 정규분포를 따르는가를 검정하기 조차 용이하지 않다(Coleman, 1997).

비정규 모집단 하에서 일변량  $\bar{X}$  및 EWMA 관리도의 성능변화에 대한 연구는 Balakrishnan and Kocherlakota(1986), Borrow et al.(1999), Stoumbos and Reynolds(2000), Maravelakis et al.(2005) 등에 의해 수행되어 왔으며, 다변량  $T^2$  및 MEWMA 관리도에 대한 연구는 Stoumbos and Sullivan (2002)과 Testik et al.(2003) 등에 의해 수행되어 왔다. 이러한 연구들은 Shewhart 형태의 관리도 성능은 모집단의 정규성 정도에 큰 영향을 받으나, EWMA 관리도는 평활모수(smoothing parameter) 값이 작을수록 비정규성에 대한 강건도가 증가한다는 것을 보였다. 그러나 일변량 및 다변량 CUSUM 관리도에 대한 연구는 현재까지 진행된 것이 없으며, 다만 Chang and Bai(2001)가 왜도가 증가함에 따라 일변량 CUSUM 관리도의 거짓경보비율(false alarm rate)이 증가함을 보였다.

CUSUM 관리도는 EWMA 관리도와 같이 과거의 품질특성치들에 관한 정보들을 누적하여 사용하므로 모집단의 비정규성에 비교적 둔감할 것이다. 그러나 CUSUM 관리도를 효과적으로 사용하기 위해서는 비정규 모집단에 대한 관리도의 성능을 면밀히 분석하여 Shewhart 및 EWMA 관리도와 비교하는 것이 필요하다.

이 논문에서는 다양한 왜도와 첨도를 갖는 일변량 및 다변량 대수정규분포와  $t$  분포하에서 CUSUM

관리도의 성능을 평균 런의 길이(Average Run Length ; ARL) 관점에서 살펴보고 비정규 모집단에서의 CUSUM 관리도에 대한 활용 가능성을 분석한다. 특히, CUSUM 관리도의 참고값(reference value)과 품질특성치의 상관관계에 따른 관리도 성능변화를 분석한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 이 논문에서 대상으로 하는 CUSUM 관리도에 대해 설명한 후, 제 3장에서는 일변량의 경우, 제 4장에서는 다변량의 경우에 대한 CUSUM 관리도의 성능을 분석한다.

## 2. CUSUM 관리도

### 2.1 일변량 CUSUM 관리도

일변량 CUSUM 관리도는 Page(1954)에 의해 제안된 것으로 현재 시점에서 추출한 데이터와 이전에 얻어진 공정 데이터들을 누적하여 공정의 변화를 판단하는 관리도이다.  $i$  번째 표본채취시점의 품질특성치  $X_i$ 가 평균이  $\mu$ , 표준편차가  $\sigma$ 인 분포를 따른다고 하고  $Z_i = (X_i - \mu) / \sigma$ 라 할 때, 일변량 CUSUM 관리도는

$$\begin{aligned} C_{U,i} &= \max\{0, C_{U,i-1} + (Z_{U,i} - \gamma)\} \\ C_{L,i} &= \min\{0, C_{L,i-1} + (Z_{L,i} + \gamma)\} \end{aligned} \quad (1)$$

을 관리통계량으로 사용한다. 여기서  $\gamma$ 는 특정 크기의 공정평균 변화를 탐지하기 위해 사용하는 참고값(reference value)으로 일반적으로 크기  $\delta = (\mu_1 - \mu) / \sigma$ 의 공정평균 변화를 가장 잘 탐지하기 위해  $r = \delta/2$ 를 사용한다. 이때,  $C_{U,i} > h_1$  ( $h_1 > 0$ ) 혹은  $C_{L,i} < -h_1$  이면 공정평균이 변화했다고 판단하여 관리도에서 이상신호를 발생하게 된다.

### 2.2 다변량 CUSUM 관리도

MCUSUM 관리도는 설계방법에 따라 두 가지 형태로 나누어 볼 수 있다. 하나는 탐지하고자 하는 공정평균의 이동 방향에 따라 관리도를 설계하는 것으로 Woodall and Ncube(1985), Healy(1987), Hawkins(1991) 등에 의해 제안되었다. 또 다른 MCUSUM 관리도는 공정평균의 이동방향에는 상관없이 이동크기에만 의존하도록 설계된 것으로

Crosier(1988), Pignatiello and Runger(1990) 등이 제안하였다. 이 논문에서는 공정평균의 이동방향에 의존하지 않고 직관적으로 이해하기가 용이하며 비교적 성능이 우수한 Crosier(1988)의 MCUSUM 관리도를 사용한다.

$\nu$  변량 품질특성치  $\mathbf{X}=(X_1, \dots, X_\nu)^t$  가 평균이  $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1, \dots, \mu_\nu)^t$  이고 분산-공분산 행렬이

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \dots & \rho_{1\nu}\sigma_1\sigma_\nu \\ & \sigma_2^2 & \dots & \rho_{2\nu}\sigma_2\sigma_\nu \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sigma_\nu^2 \end{bmatrix}$$

인  $\nu$  차원 다변량 분포를 따른다고 하자. 여기서 ‘t’는 벡터 혹은 행렬의 전치를 의미하고,  $\mu_j$  와  $\sigma_j$  는 각각  $X_j$  의 평균과 표준편차,  $\rho_{ij}$  는  $X_i$  와  $X_j$  의 상관계수를 의미한다. 이때, 관측치를 표준화한 값을

$$\mathbf{Z}=(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{X_\nu-\mu_\nu}{\sigma_\nu})^t$$

라 하자.  $\mathbf{X}$  의 상관계수들로 이루어진 상관계수행렬 (correlation matrix)을  $\boldsymbol{\rho}$ ,  $i-1$  번째 표본채취시점까지의 누적통계량 값을  $\mathbf{S}_{i-1}$  이라 할 때, MCUSUM 관리도는  $\mathbf{A}_i=\mathbf{S}_{i-1}+\mathbf{Z}_i$  의 크기  $C_i=(\mathbf{A}_i^t \boldsymbol{\rho}^{-1} \mathbf{A}_i)^{1/2}$  가 미리 설정된 참고값  $k$  보다 클 경우에는 공정평균이  $\mathbf{A}_i$  방향으로 이동했을 가능성이 높다고 판단하여 일정량 만큼만을 차감하고 그렇지 않은 경우에는 누적값을 0 으로 설정한다. 즉,  $i$  번째 표본채취시점까지의 누적통계량의 값을

$$\mathbf{S}_i=\begin{cases} 0, & \text{if } C_i \leq k \\ \mathbf{A}_i-k(\mathbf{A}_i/C_i)=\mathbf{A}_i(1-k/C_i), & \text{if } C_i > k \end{cases} \quad (2)$$

로 계산하여 사용하게 된다. 일반적으로 참고값  $k$  는 탐지하고자 하는 공정평균의 이동 정도에 따라

$$k=\delta(\mu_1)/2=[(\mu_1-\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mu_1-\boldsymbol{\mu})]^{1/2}/2$$

와 같이 설정한다. 이때, 관리통계량

$$\mathbf{Y}_i=(\mathbf{S}_i^t \boldsymbol{\rho}^{-1} \mathbf{S}_i)^{1/2} \quad (3)$$

이 관리한계선  $h_2$  보다 크면 공정에 이상이 발생했다고 판단하게 된다. 관리한계선에 대한 계산 방법은 Crosier(1988)에 자세히 설명되어 있다.

### 3. 비정규분포에 대한 일변량 CUSUM 관리도의 성능 분석

이 장에서는 모집단이 대수정규분포와  $t$  분포를 따르는 경우 분포의 왜도와 첨도에 따른 일변량 CUSUM 관리도의 ARL 변화를 분석한다. 이때, 확률변수는 IMSL(1990)의 subroutine을 활용하여 발생시켰고, ARL 값은 10,000번의 모의실험을 통해 계산하였다. 관리한계선은 관리상태에서의 ARL( $ARL_0$ )이 정규분포 하에서  $3\sigma$  관리한계선을 갖는  $\bar{X}$  관리도의  $ARL_0$ 인 370.37이 되도록 설정하였으며, 매 표본채취시점에서는 한 개씩의 관측치를 얻는다고 가정하였다. 또한, 이 논문에서는 왜도가 0보다 큰 경우에 대해서만 결과를 제시하였으나 왜도가 음수인 경우에도 절대값이 같다면 동일한 결과를 얻을 수 있다.

<표 1>의 (a)와 (b)는 각각 왜도와 첨도의 변화에 따른 CUSUM 관리도의  $ARL_0$ 를 나타낸 것이다. 이 표로부터 다음의 결과를 얻을 수 있다.

- i) 참고값이 0.125로 아주 작은 경우를 제외하고는 모집단의 왜도가 증가하거나 첨도가 감소할 수록  $ARL_0$ 가 감소하는 경향이 있다. 이는 정규분포에 비해 모집단의 왜도가 증가하거나 첨도가 감소하면 일반적으로 정규분포 하에서 설정된 관리한계선 밖의 꼬리확률이 증가하게 되어 나타나는 현상이다.
- ii) 모집단의 첨도보다는 왜도의 변화에 따라  $ARL_0$ 가 크게 영향을 받는다. 그러나 참고값이 0.25 이하로 작은 경우에는 모집단의 첨도 변화에 상당히 강건하고 왜도의 변화에도 비교적 강건한 것을 알 수 있다. 이는 참고값이 작은 경우 품질특성치를 지속적으로 누적하여 통계량을 구하게 되므로 통계량의 값이 정규분포에 근사되기 때문이다.
- iii) 참고값이 0.125로 매우 작은 경우에는 모집단이 정규분포의 형태와 멀어질수록  $ARL_0$ 가 소폭 증가한다.

<표 2>는 모집단의 왜도 및 첨도의 변화에 따른 EWMA 관리도의  $ARL_0$ 를 나타낸 것이다. <표 1>과 <표 2>에서 작은 크기의 참고값을 갖는 CUSUM관

리도와 작은 크기의 평활상수(smoothing constant)를 갖는 EWMA 관리도 간에는 모집단의 비정규성에 따른  $ARL_0$ 에 큰 차이가 없는 것을 알 수 있다. 그러나 EWMA 관리도의 평활상수가 커서 Shewhart  $X$  관리도와 비슷한 형태를 띠거나 공정평균의 큰 변화에 민감하도록 CUSUM 관리도의 참고값을 크게 하는 경우에는  $ARL_0$ 가 모집단의 형태에 많은 영향을 받는 것을 알 수 있다. 특히, CUSUM 관리도의 참고값이 2이상인 경우에는 Shewhart  $X$  관리도의  $ARL_0$ 와 비슷하게 된다.

<표 3>은 공정평균의 변화정도에 따른  $ARL(ARL_1)$

을 나타낸 것으로 다음의 결과를 얻을 수 있다.

- i) Shewhart  $X$  관리도에 비해 일변량 CUSUM 관리도의  $ARL_1$ 이 왜도 및 첨도의 변화에 강건하며, 정규분포 하에서와 동일하게 참고값이 작을수록 공정평균의 작은 변화를 빠르게 탐지한다.
- ii) 비대칭 모집단인 경우에는 공정평균의 이동방향에 따라  $ARL_1$ 이 다르게 되나, 첨도가 변화하는 경우에는 평균의 이동방향에 상관없이  $ARL_1$ 은 일정하다. 또한, 왜도의 변화에 비해 첨도의 변화에  $ARL_1$ 이 더 강건하다.

<표 1> 일변량 CUSUM 관리도의  $ARL_0$

(a) 대수정규분포의 왜도에 따른 변화

참고값 왜도	0.125	0.25	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0
0.5	369(0 <sup>1)</sup> )	360(3)	326(12)	268(28)	222(40)	181(51)	175(53)
1.0	367( 1)	346(7)	252(32)	169(54)	126(66)	99(73)	95(74)
1.5	378(-2)	332(10)	201(46)	126(66)	92(75)	74(80)	71(81)
2.0	383(-3)	321(13)	173(53)	106(71)	80(78)	62(83)	59(84)
2.5	383(-4)	311(16)	156(58)	97(74)	73(80)	59(84)	56(85)
3.0	390(-5)	297(20)	148(60)	96(74)	69(81)	57(85)	54(85)

1) 괄호 안의 값은 PD(Percent of Difference) =  $\frac{\text{목표 } ARL_0(370.37) - ARL_0}{\text{목표 } ARL_0(370.37)} \times 100$

(b)  $t$  분포의 첨도에 따른 변화

참고값 첨도	0.125	0.25	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0
2.5	368(1)	370(0)	354( 4)	325(12)	293(21)	253(32)	247(33)
2.0	365(1)	359(3)	323(13)	265(28)	218(41)	175(53)	166(55)
1.5	371(0)	357(4)	287(23)	209(43)	161(57)	124(66)	116(69)
1.0	375(-1)	342(8)	239(36)	162(56)	121(67)	92(75)	86(77)

<표 2> 대수정규 및  $t$  분포에 대한 일변량 EWMA 관리도의  $ARL_0$

평활상수 왜도	평활상수				첨도	평활상수			
	0.05	0.1	0.5	1.0		0.05	0.1	0.5	1.0
0.5	368	360	231	176	2.5	370	364	285	247
1.0	364	332	134	96	2.0	364	344	210	166
1.5	373	305	98	71	1.5	359	326	155	116
2.0	369	277	85	60	1.0	341	291	117	85
2.5	361	262	77	56					
3.0	362	245	73	55					

<표 3> 일변량 CUSUM 관리도의 ARL<sub>1</sub>  
(a) 대수정규분포의 왜도에 따른 변화

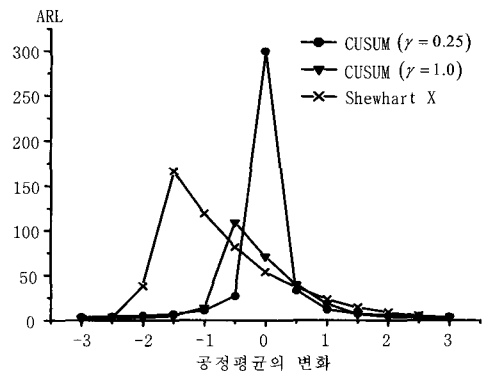
평균변화	참고값 왜도			X 관리도			
	0.5	1.0	3.0	0.0	1.0	3.0	
-3.0	3	3(0 <sup>1)</sup> )	2(2)	2	2(3)	2(5)	2
-2.0	5	5(1)	5(2)	3	3(4)	3(9)	6
-1.0	11	11(2)	11(6)	14	13(3)	14(-2)	43
-0.5	29	28(2)	27(7)	39	115(-67)	109(-58)	155
0.0	370	346(7)	297(20)	370	126(66)	69(81)	370
0.5	29	30(-4)	33(-13)	69	44(37)	40(43)	155
1.0	11	12(-3)	12(-5)	14	15(-7)	18(-33)	44
2.0	5	5(0)	5(0)	3	3(-4)	4(-7)	6
3.0	3	3(0)	3(0)	2	2(-2)	2(-1)	2

주) <sup>1)</sup> 괄호 안의 값은 PD(Percent of Difference) =  $\frac{\text{정규분포에서의 ARL}_1 - \text{ARL}_1}{\text{정규분포에서의 ARL}_1} \times 100$

(b) t 분포의 첨도에 따른 변화

평균변화	참고값 첨도			X 관리도			
	0.5	1.0	3.0	3.0	2.0	1.0	
-3.0	3	3(0)	3(0)	2	2(1)	2(0)	2
-2.0	5	5(0)	5(0)	3	3(0)	3(0)	6
-1.0	11	11(0)	11(0)	14	14(-3)	15(-11)	43
-0.5	29	29(-1)	29(-2)	69	65(5)	62(10)	155
0.0	370	359(3)	342(8)	370	218(41)	121(67)	370
0.5	29	29(0)	29(-1)	69	66(4)	62(10)	155
1.0	11	11(0)	11(0)	14	14(-4)	15(-11)	44
2.0	5	5(1)	5(0)	3	3(1)	3(2)	6
3.0	3	3(0)	3(0)	2	2(-1)	2(1)	2

<그림 1>은 참고값에 따른 ARL의 변화를 살펴보기 위해 왜도가 3인 대수정규분포 하에서 공정평균이 변화하는 경우 참고값이 각각 0.25와 1.0인 CUSUM 관리도, Shewhart X 관리도의 ARL을 나타낸 것이다. 이 그림에서 참고값이 작은 경우에는 ARL<sub>1</sub>에 비해 ARL<sub>0</sub>가 큰 값을 갖게 되나, 참고값이 증가할수록 공정평균이 감소한 경우의 ARL<sub>1</sub>이 가장 크게 되는 것을 알 수 있다. 즉, 비대칭 정도가 심한 모집단의 경우에 참고값이 큰 CUSUM 관리도 혹은 X 관리도를 사용하게 되면, 관리상태보다 이상상태가 더욱 오래 지속될 가능성이 존재하여 관리도 사용의 목적을 달성할 수 없게 된다.

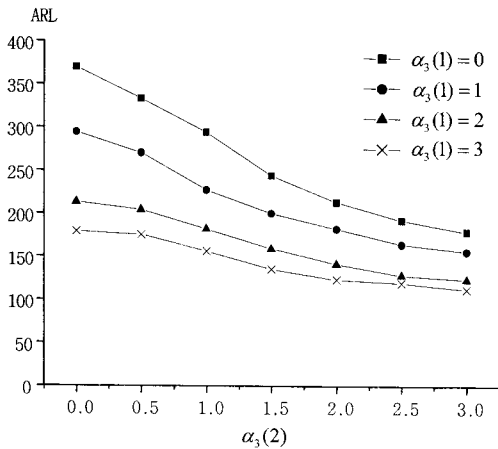


<그림 1> 왜도가 3인 대수정규분포 하에서 공정평균의 변동에 따른 CUSUM 관리도의 ARL

### 4. 비정규분포에 대한 다변량 CUSUM 관리도의 성능 분석

이 절에서는 모집단이 2변량 대수정규분포와  $t$  분포를 따르는 경우 3.1절에서와 동일한 방법으로 모의실험을 통해 다변량 CUSUM 관리도(MCUSUM 관리도)의 성능을 분석한다.

<그림 2>는 상관계수가 0.5인 2변량 대수정규분포의 왜도에 따른 MCUSUM 관리도의  $ARL_0$ , <표 4>는 참고값의 변화에 따른  $ARL_0$ , <표 5>는 2변량  $t$  분포 하에서의  $ARL_0$ 를 나타낸 것이다. <그림 2>와 <표 4>에서  $\alpha_3(1)$ 은  $X_1$ 의 왜도를  $\alpha_3(2)$ 는  $X_2$ 의 왜도를 나타낸다. 이들 그림과 표로부터 MCUSUM 관리도의  $ARL_0$ 는 일변량 CUSUM 관리도와 마찬가지로 모집단의 왜도가 증가하거나 첨도가 감소할수록 그 값이 작아지는 것을 알 수 있다. 그러나 참고값이 작을수록 모집단의 왜도 및 첨도의 변화에 비교적 강건하게 된다.



<그림 2> 2변량 대수정규분포 하에서 왜도에 따른 MCUSUM 관리도의  $ARL_0$

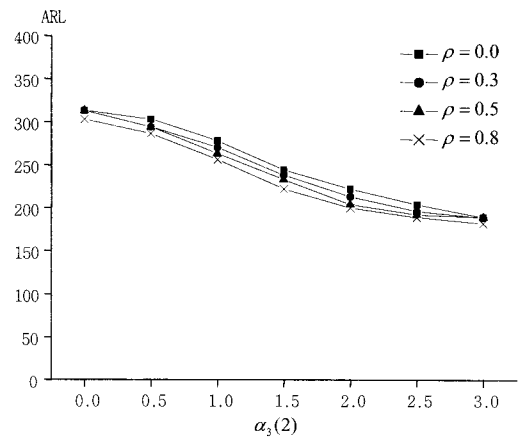
<표 4> 2변량 대수정규분포 하에서 참고값에 따른 MCUSUM 관리도의  $ARL_0$

참고값 $\alpha_3(2)$	0.25	0.5	1.0	2.0
0.5	357	294	152	89
1.0	357	263	115	65
1.5	345	233	93	55
2.0	333	204	83	50
3.0	323	189	75	47

<표 5> 2변량  $t$  분포 하에서 MCUSUM 관리도의  $ARL_0$

참고값 첨도	0.25	0.5	1.0	2.0
2.5	361	351	287	210
2.0	365	337	212	126
1.5	357	290	144	80
1.0	343	229	100	57

<그림 3>은 2변량 대수정규분포를 따르는 모집단에 참고값이 0.5인 MCUSUM 관리도를 사용하는 경우 품질특성치 간의 상관관계에 따른  $ARL_0$ 를 나타낸 것으로 MCUSUM 관리도의 성능은 품질특성치들 간의 상관관계수에는 큰 영향을 받지 않는 것을 알 수 있다.



<그림 3> 2변량 대수정규분포의 상관계수 변화에 따른 MCUSUM 관리도의  $ARL_0$

<표 6>은 모집단이 상관계수가 0.5인 2변량 대수정규 및  $t$  분포를 따르는 경우 공정 평균의 변화량  $d(\mu_1)=[(\mu_1-\mu)^t \Sigma^{-1}(\mu_1-\mu)]^{1/2}$ 에 따른 MCUSUM 관리도의  $ARL_1$ 을 나타낸 것이다. 표에서 제 6열과 7열은 비교를 위해 모집단이 정규분포를 따르는 경우의  $ARL_1$ 을 구한 것이다. 이 때, 공정평균의 이동 방향은 <그림 4>에서와 같이 ①과 ③은 품질특성치들의 평균이 모두 증가하거나 감소하는 경우, ②와 ④는 하나는 증가하고 다른 하나는 감소한 경우를 대상으로 하였다. <표 6>으로부터 다음의 결과를 얻을 수 있다.

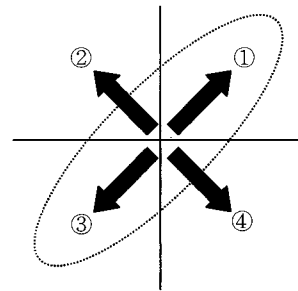
<표 6> MCUSUM 관리도의 ARL<sub>1</sub>  
(a) 대수정규분포의 왜도에 따른 변화

$d(\mu_1)$	경우	대수정규분포			정규분포	
		왜도	참고값		참고값	
			0.5	1.0	0.5	1.0
1.0	1	(1,1)	11.6	14.2	11.2	13.9
		(2,2)	12.0	15.2		
		(3,3)	12.5	16.8		
	2	(1,1)	11.3	14.5	11.2	13.9
(2,2)		11.5	15.7			
(3,3)		11.5	17.1			
2.0	3	(1,1)	11.1	13.8	11.3	14.0
		(2,2)	10.9	14.1		
		(3,3)	10.7	14.5		
	4	(1,1)	11.3	14.5	11.2	14.0
(2,2)		11.4	15.8			
(3,3)		11.5	16.9			
2.0	1	(1,1)	4.7	3.9	4.6	3.7
		(2,2)	4.7	4.0		
		(3,3)	4.7	4.1		
	2	(1,1)	4.6	3.7	4.6	3.7
(2,2)		4.6	3.8			
(3,3)		4.6	3.8			
2.0	3	(1,1)	4.6	3.6	4.6	3.7
		(2,2)	4.5	3.5		
		(3,3)	4.5	3.5		
	4	(1,1)	4.6	3.7	4.6	3.7
(2,2)		4.6	3.8			
(3,3)		4.6	3.8			

(a)  $t$  분포의 첨도에 따른 변화

$d(\mu_1)$	경우	$t$ 분포			정규분포	
		첨도	참고값		참고값	
			0.5	1.0	0.5	1.0
1.0	1	2.0	11.3	14.3	11.2	13.9
		1.0	11.3	15.0		
	2	2.0	11.3	14.1	11.2	13.9
		1.0	11.3	15.2		
2.0	3	2.0	11.2	14.2	11.3	14.0
		1.0	11.4	15.1		
	4	2.0	11.3	14.2	11.2	14.0
		1.0	11.4	14.9		
2.0	1	2.0	4.6	3.7	4.6	3.7
		1.0	4.6	3.7		
	2	2.0	4.6	3.7	4.6	3.7
		1.0	4.6	3.7		
2.0	3	2.0	4.6	3.7	4.6	3.7
		1.0	4.6	3.7		
	4	2.0	4.6	3.7	4.6	3.7
		1.0	4.6	3.7		

- i) 일변량 CUSUM 관리도에서와 마찬가지로 비대칭 모집단의 경우에는 공정평균의 이동방향에 따라 ARL<sub>1</sub>이 다르게 되나, 첨도가 변화하는 경우에는 평균의 이동방향에 상관없이 ARL<sub>1</sub>은 일정하다. 즉, 공정평균이 꼬리가 긴 방향으로 이동하는 경우(경우 1)가 꼬리가 짧은 방향으로 이동하는 경우(경우 3)에 비해 다소 큰 ARL<sub>1</sub>을 갖는다.
- ii) 참고값이 작은 경우가 큰 경우에 비해 ARL<sub>1</sub> 측면에서도 강건하며, 공정평균의 작은 변화를 빠르게 탐지한다.



<그림 4> <표 6>의 각 경우에 대한 공정평균의 이동 방향

### 5. 결 론

이 논문에서는 모집단의 분포가 정규분포를 따르지 않는 경우 일변량 및 다변량 누적합 관리도의 성능을 평균 런의 길이 측면에서 분석하였다. 모의실험을 통해 CUSUM 관리도의 참고값이 작은 경우에는 모집단의 비정규성에 상당히 강건한 것을 보였다. 그러나 참고값이 증가함에 따라 모집단의 비정규성에 대한 관리도의 성능이 상당히 저하되며, 참고값이 매우 큰 경우에는 Shewhart 형태의 관리도에 비해서도 비정규성에 더욱 민감하게 된다. 특히, 모집단이 비대칭 분포를 따르는 경우에는 ARL<sub>1</sub>이 ARL<sub>0</sub>보다 큰 경우가 발생하는 등 관리도를 사용하는 목적을 충분히 달성할 수 없게 된다. 따라서 품질특성치의 분포를 정확히 알 수 없는 공정초기에 일변량 혹은 다변량 누적합 관리도를 사용하기 위해서는 참고값을 0.5 이하로 설정하여 사용하는 것이 바람직하다.

### 참 고 문 헌

[1] Balakrishnan, N. and Kocherlakota, S.(1986),

- “Effects of Non-normality on  $\bar{x}$  Charts : Single Assignable Cause Model”, *Sankya Series B*, Vol. 48, pp. 439-444.
- [2] Borror, C. M., Montgomery, D. C., and Runger, G. C.(1999), “Robustness of the EWMA Control Chart to Non-normality”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 31, pp. 309-316.
- [3] Chang, Y. S. and Bai, D. S.(2001), “Control Charts for Positively-Skewed Populations with Weighted Standard Deviations”, *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 17, pp. 397-406.
- [4] Cheng, A. Y., Liu, R. Y., and Luxhøj, J. T. (2000), “Monitoring Multivariate Aviation Safety Data by Data Depth : Control Charts and Threshold Systems”, *IIE Transactions*, Vol. 32, pp. 861-872.
- [5] Coleman, D. E.(1997), “Individual Contributions in a Discussion on Statistically-based Process Monitoring and Control eds. Montgomery, D. C. and Woodall, W. H.”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 29, pp. 148-149.
- [6] Crosier, R. B.(1988), “Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality-Control Schemes”, *Technometrics*, Vol. 30, pp. 291-303.
- [7] Hawkins, D. M.(1991), “Multivariate Quality Control Based on Regression-adjusted Variables”, *Technometrics*, Vol. 33, pp. 61-75.
- [8] Healy, J. D.(1987), “A Note on Multivariate CUSUM Procedures”, *Technometrics*, Vol. 29, pp. 409-412.
- [9] IMSL Library(1990), *Reference Manual*, Visual Numerics, Inc., Houston, TX.
- [10] Lowry, C. A. and Montgomery, D. C.(1995), “A Review of Multivariate Control Charts”, *IIE Transactions*, Vol. 27, pp. 800-810.
- [11] Maravelakis, P. E., Panaretos, J., and Psarakis, S.(2005), “An Examination of the Robustness to Non Normality of the EWMA Control Charts for the Dispersion”, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, Vol. 34, pp. 1069-1079.
- [12] Mason, R. L., Champ, C. W., Tracy, N. D., Wierda, S. J., and Young, J. C.(1997), “Assessment of Multivariate Process Control Techniques”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 29, pp. 140-143.
- [13] Montgomery, D. C.(2001), *Introduction to Statistical Quality Control* 4th ed., Wiley, New York, NY.
- [14] Page, E. S.(1954), “Continuous Inspection Schemes”, *Biometrika*, Vol. 41, pp. 100-115.
- [15] Pignatiello, J. J. and Runger, G. C.(1990), “Comparisons of Multivariate CUSUM Charts”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 22, pp. 173-186.
- [16] Qiu, P. and Hawkins, D.(2001), “A Rank-based Multivariate CUSUM Procedure”, *Technometrics*, Vol. 43, pp. 120-132.
- [17] Stoumbos, Z. G. and Reynolds, M. R. Jr. (2000), “Robustness to Non-normality and Autocorrelation of Individuals Control Charts”, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. 66, pp. 145-187.
- [18] Stoumbos, Z. G. and Sullivan, J. H.(2002), “Robustness to Non-normality of the Multivariate EWMA Control Chart”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 34, pp. 260-276.
- [19] Testik, M. C., Runger, G. C., and Borror, C. M.(2003), “Robustness Properties of Multivariate EWMA Control Charts”, *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 19, pp. 31-38.
- [20] Woodall, W. H. and Ncube, M. M.(1985), “A Multivariate CUSUM Quality-control Procedures”, *Technometrics*, Vol. 27, pp. 285-292.