

플루트프로파일이 골판지의 재료역학적 특성에 미치는 영향 ②

(Effects of Flute Profile Conformation on the Material Mechanics of Corrugated Fiberboard)

한국포장기술사회 김 청 회장은 “플루트프로파일이 골판지의 재료역학적 특성에 미치는 영향(Effects of Flute Profile Conformation on the Material Mechanics of Corrugated Fiberboard)”이란 제목의 동국대학교 박사학위 논문을 통해 골판지 및 골판지상자의 재료 공학적 강도 특성을 해석하였다. 이에 우리 조합에서는 골판지포장업계에 도움이 될 수 있도록 이 논문을 3회에 걸쳐 발췌 요약 게재하오니 업무에 참고하시기 바랍니다.



김 청 회장 / (사)한국포장기술사회
www.packnet.co.kr

III. 이론적 배경 및 연구방법

1. 이론적 배경

골판지상자는 골심지에 파형의 골을 성형하고 여기에 라이너원지를 접착시킨 골판지로 제조되고, 트라스(truss)구조로 이루어져있는 골형상을 가진 골판지는, 구성요소인 라이너와 골심지 자체의 물성과 성형가공형상에 따라 다양한 구조역학적 성질을 가지고 있는 하나의 공학적 구조체(engineering structure)로서 역학적 변형의 기본적 형태를 지니고 있다. 그러므로 공학적 구조체의 강도적 특성을 최적화하기 위해서는 원지 자체의 물성과 함께 골판지의 플루트 프로파일(flute profile)구조인자의 재료역학적 상관관계를 확보하여 골 성형구조의 합리적 설계에 의한 골판지상자의 압축강도 향상을 위한 최적화 플루트 프로파일을 규명함은 소재의 물성강화보다 더 합리적이고 경제적이라 할 수 있다.

골판지상자의 품질 목표인 압축강도는 골판지의 수직 압축강도, 평면압축강도, 휨강성 등에 따라 결정되는데, 이들은 모두 골판지의 구조적 플루트 프로파일 요소인 골의 구조형상과 깊은 상관성이 있다. 특히 골판지상자의

압축강도에 크게 영향을 미치는 골판지의 휨강성은 상자의 좌굴에 저항하는 성질로 골판지의 단면성질을 나타내는 단면2차모멘트(관성모멘트)와 탄성계수의 함수이다. 그러므로 동일한 품질급수의 원지를 사용해도 골형상의 단면형태에 따라 단면2차모멘트가 달라지므로 골판지의 휨강성 및 상자의 압축강도가 달라진다. 또한, 면압(surface pressure)의 압축하중을 받는 골판지상자의 좌굴은 휨응력의 최대가 되는 위치에서 일어나는 것이다.

따라서 본 연구에서는 골판지상자의 공학적 구조체로서의 이론적인 재료역학적 구조해석과 함께 골판지를 형성하고 있는 구조체로서의 플루트 프로파일이 골판지의 재료역학적 강도특성에 미치는 영향을 이론적으로 해석하여 플루트 프로파일의 최적화설계를 위한 기본을 구하고자 한다. 다시 말하면, 플루트 프로파일 콘포메이션의 구성인자인 골판지 골의 단면형상 및 단면2차모멘트, 골의 높이, 골의 거리(파장), 골형상의 각도, 골심지 및 라이너의 두께, 골판지의 휨응력, 휨강성, 좌굴하중 등의 구조역학적 인자들을 이론적으로 수치계산하고 해석하여 골판지의 플루트 프로파일이 재료역학적 특성에 미치는 영향과 골판지상자의 압축강도와와의 상관관계를 구함으로써, 골판지상자의 압축강도 최적화 설계에 기여하고자 한다.

1.1 골판지의 플루트 프로파일과 휨응력

파상인 웨이브 프로파일(wave profile)의 시트는 골판지 뿐 아니라 포장용 재료 및 구조용 재료로서 널리 이용되고 있다. 그 이용의 역학적 기본형태가 되는 것은 면압이다. 그러므로 면압을 받는 골심지 플루트 프로파일의 내부 응력상황을 밝히고 그 강도를 논함은 골판지의 합리적 이용과 공학적 강도 설계면에서 대단히 중요하다고 사료된다.

골판지는 강한 이방성을 나타내는 골판지원지(라이너 및 골심지) 및 특이한 소재구성에 의하여 종목, 횡목, 두께의 3방향 모두 특성이 다른 이방성을 나타내는 직교이방성 재료(orthotropic anisotropy material)이다(Fig. 13). 골판지의 실제 변형은 휨(좌굴) 및 골의 흐름방향(machine direction, MD, x), 횡방향(cross-machine direction, CD, y), 두께방향(through-the-thickness direction, TD, z)의 인장변형 및 수직 방향의 힘을 받는 변형이 생긴다. 그러므로 골심지의 골형상의 탄성응력을 해석하고, 그리고 휨응력과 골형상과의 관계를 구했다.

골판지의 골형상을 이루는 플루트 프로파일은 파형

(wave) 으로 되어있는 곡면 모양(Fig. 14, 15)으로서, 골의 플루트 팁에 접착제 등의 가공

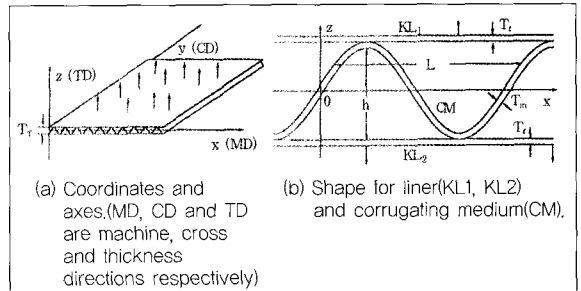


Fig. 14. Coordinates and actions for corrugated fiberboard.

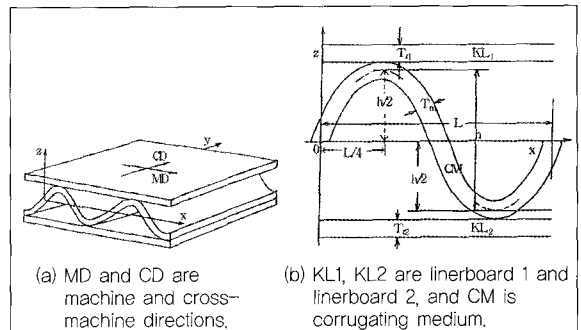


Fig. 15. Coordinates and corrugated fiberboard.

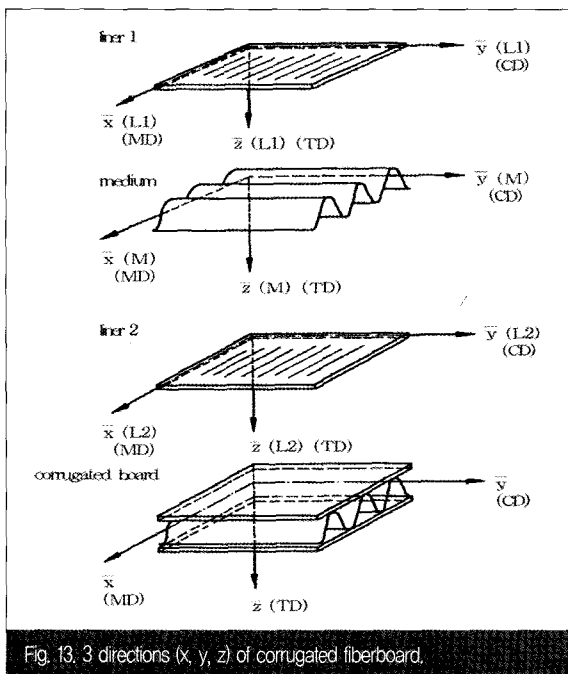


Fig. 13. 3 directions (x, y, z) of corrugated fiberboard.

처리시 형상 및 재질 등에 대하여 복잡한 변화가 생길 수 있지만, 편의상재질이 균일하다고 보고, 골의 형상은, 정현파 모양(sinusoidal wave) 또는 반타원형파 모양(elliptic wave)의 곡면으로서(Fig. 16), 역방향으로 교차하여 결합하고 있는 골형상이라 고려했다.

반타원형 형상 설정의 경우에 있어서 골판지 골심지 플루트의 곡률반경을 가능한 크게 취하는 것이 최적의 파형 설정이라고 볼 수 있겠지만, 이것은 원형형상의 파형이 되고, 반원파형은 골심지의 파장의 1/2과 파고와 같은 상태로 형상변화가 부족하여 비교적 형상변화가 풍부한 반타원파형 골심지에 대한 면압하의 응력해석을 구하면 파장(wave length)과 파고(wave height)와의 관계에 유연성을 줄 수 있다.

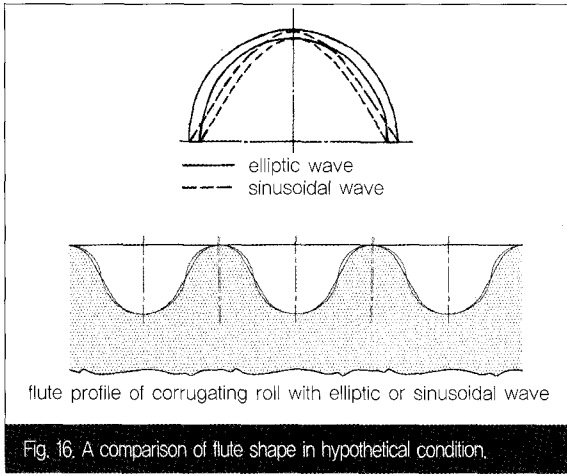


Fig. 16. A comparison of flute shape in hypothetical condition.

따라서 골심지의 높이 중앙부의 경사를 변화시키고, 응력무한대 발생의 방지가 용이한 골심지 파형으로서 편타원, 즉 타원의 일부대칭 곡선으로 이루어지는 파형의 골심지 탄성휨응력을 구하며, 그 골심지의 응력 강도와 정현파형상의 응력과 비교검토하여 계산하고, 계산은 휨 보(flexural beam)의 휨변형 해석에 의한 계산 방법을 이용했다. 종이 및 골판지는 직교이방성재료로서 취급되고 있으므로, 휨응력(bending stress) 또는 굽힘응력(flexural stress)상태의 계산은 직교이방성 재료의 탄성변형방정식이 이용되고 있으며, 이 방정식은 종이의 응력상태와 합치하고 있다.⁵³⁾

이론적 해석을 위하여 골성형 특성에 크게 관계되는 골의 형상은 양면골판지의 A플루트로 선정했다. A플루트(A-flute)는 골판지의 골 중에서 가장 많이 사용되고, 다른 골에 비하여 골 높이가 높으며 압축강도뿐 아니라 골 성형시에 받는 파형저항력이 크게 관여하고 있기 때문이다.

양면골판지의 상·하표면의 라이너(KL₁, KL₂)는 일정한 두께(T₁, T₂)를 가진 평판(T_m로 가정)으로 보고, 골심지 플루트 프로파일은 근사적으로 골심지 두께가 일정하고 플루트 웨이브의 높이(h) 및 파장(L)을 가진 정현파형(sinusoidal wave) 및 반타원파형(elliptic wave)의 판이라고 보았다. 또한 골판지의 골심지 골 상하부는 접착처리에 의하여 고정처리되어 있고, 그 접착부 부근은 가공에의

하여 복잡한 변화가 있을 수 있지만 근사적으로 균일하다고 보았다. 골심지의 골형상에 관한 주기성 및 대칭성은 1/4 웨이브 프로파일을 기본적인 형상으로 고려했다.

그리고 골판지를 3차원 탄성변형표시를 기본으로 양면골판지 및 골심지 골의 골 높이(h)의 중앙에서 골심지 두께의 중심이 되는 중앙의 위치를 원점(0)으로 해서, 플루트의 흐름방향(MD)을 x축에, 횡방향(CD)을 y축에, 두께(높이) 방향을 z축으로 좌표를 취했다. y방향에 따라 골판지의 기하학적 상태는 변화하지 않지만, x방향에 따라서는 주기적으로 변화한다. 여기에서 z 방향의 임의점으로 어느 임의의 위치를 취하고 그 z위치의 xz면의 원점(0)은 골판지의 두께(T_m) 및 높이(h)의 중심위치로 했다(Fig. 14-b, 15-b). 단, 그 두께(T_m)의 값은 파형의 파장(L), 골 높이(h)의 값에 비해 무시할 수 없는 것으로 간주했다.

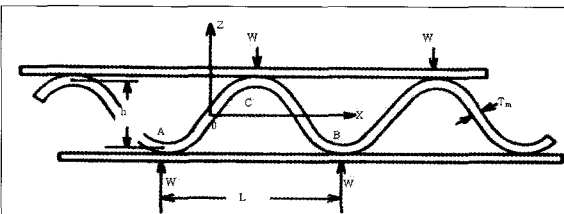
Fig. 16은 골의 정형파 및 반타원형파 형상을 근사적으로 비교하여 나타내고, Fig. 17은 골심지의 형상이 일부대칭인 타원곡선의 파형이 거꾸로 서로 교차하여 결합한 플루트 프로파일로 고려한 것으로, 결합부의 구배도 연속이 된다. 여기에서도, 그 플루트 프로파일의 높이(h) 및 골심지 두께(T_m)의 중앙을 원점 0으로, 플루트의 흐름방향을 x, 임의 높이방향을 z로, 골심지 두께 중앙의 위치를 z₀로 나타내고, Fig. 17-c에서 x* 및 z*는 골심지 플루트 프로파일의 기본이 되는 z₀의 타원파형의 x 및 z방향의 축반경이다.

골심지의 형상은 파형곡면 모양이지만, 골판지에 MD방향의 모멘트 축(모멘트, 벡터방향)을 가진, 1방향 휨 모멘트(M)가 작용할 때 그 변형은 근사적으로 간격이 일정한 파상단면을 가진 직진 보(beam)의 휨(굽힘)과 같은 것으로 보았다. 골판지의 골흐름방향에 모멘트축을 가진 휨모멘트가 1파장당 ML(M은 단위파장당 휨 모멘트로 1 N mm/mm)의 크기로 작용할 때의 골심지 플루트 프로파일의 정현파형 및 반타원형파의 주기성 및 대칭성에 따라 변형에 관한 기본적 형상을 1/4파장의 부분으로 생각하면(Fig. 14, 15, 16, 17), 정현파의 경우, 골심지골 두께의 중앙 위치를 z₀, z₀로부터 골심지 두께 방향의 거리 t의 임의의 변위 위치를

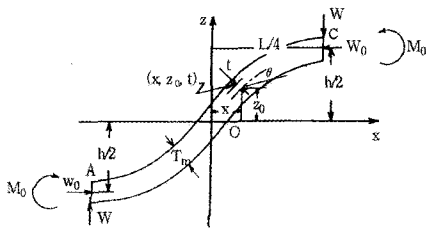
z로 나타내면, z₀ (정현파는 z_{0s}, 반타원형파는 z_{0e}로 나타낸다) 및 z는 각 다음 (1)식과 (2)식으로 나타낼 수 있다.^{9,14,15)} 단, z₀, z는 각각 반타원형파에서는 z_{0e}, z_e, 정현파형에서는 z_{0s}, z_s로 나타내는 값으로 했다.

$$Z_{0s} = \left(\frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (L = 2h) \quad (L/4 = h/2) \quad (1)$$

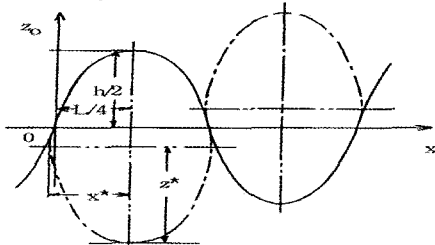
반경 R(L/4=h/2)의 파형골심지(반타원형파) 두께의 중심의 위치는



(a) A schematic picture of corrugated fiberboard.



(b) A fundamental element of corrugated fiberboard. Positions(x, z₀, t) are for medium of wave. Here T_m, L, h, W, M₀ and W₀ represent thickness of medium, wave length, wave height, weight, fixed moment and lateral force of corrugated board.



(c) A partial ellipse wave and ellipses. x*, z* represent radius of curvature at z₀ of ellipses in the direction x, z.

Fig. 17. Composition and a fundamental element of corrugated fiberboard.

$$Z_{0e} = \left[\left(\frac{L}{4}\right)^2 - \left(\frac{L}{4} - x\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

로 나타냈다. x는 파상진행방향(골의 흐름방향, 골판지의 종방향)의 기준위치 0(골 높이의 중앙위치)으로 부터의

거리이고, z₀는 그 x에 있어서 골심지 골의 0로 부터의 두께 중심의 높이, h는 골심지 플루트 프로파일의 골 높이, L은 파형의 길이(파장)이다(Fig. 15, 17).

따라서 반타원파형, 정현파형의 골심지 두께의 중앙으로부터 골심지의 두께방향(t)의 중심위치에 있는 점(x_t, z_{0e}) 및 (z_t, z_{0s})로 부터 두께방향의 t의 곳에 있는 임의위치(x_t, z)(z_e는 반타원파형 및 z_s는 정현파형)는

$$x_t = x - t \cos \theta \quad (3)$$

$$x_t = z_{0e} + t \cos \theta_e \quad (4)$$

$$x_t = z_{0s} + t \cos \theta_s \quad (5)$$

$$(-T_m/2 \leq t \leq T_m/2)$$

로 각각 나타냈다. 단, t는 임의위치 x에서의 골심지 두께 중앙으로부터 골심지 두께 방향의 거리(z₀로부터 골심지 두께방향에 취한 임의위치의 거리)이고, θ_e 및 θ_s는 각 점(x, z_{0e}) 및 (x, z_{0s})의 반타원형파 및 정현파형에 있어서 각 골심지 두께 중심면의 접선(dz₀/dx)과 흐름방향 x와의 이루는 z₀의 경사 각도이다.

$$\frac{dz_0}{dx} = \tan \theta = \left(\frac{\pi h}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (6)$$

에서 θ는 다음 (7)식으로 구했다.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{dz_0}{dx}\right) = \tan^{-1}\left[\left(\frac{\pi h}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right] \quad (7)$$

골심지의 변형을 근사적으로 일정한 단위폭을 가진 휨 보(Fig. 15-b, 17-b)로 고려하면 휨 보의 이론에 의하여, 위치 x, t에 있어서 골심지의 휨응력 σ(σ_e, σ_s)는 근사적으로

$$\sigma = \left(\frac{N}{T_m}\right) + \left[\frac{M}{(T_m \rho)}\right] \times \left[1 + \left(\frac{1}{K}\right) \left(\frac{t}{\rho + t}\right)\right] \quad (8)$$

로 나타냈다.

$$K = \left(\frac{1}{3}\right) \left[\frac{T_m}{2\rho}\right]^2 + \left(\frac{1}{5}\right) \left[\frac{T_m}{2\rho}\right]^4 + \left(\frac{1}{7}\right) \left[\frac{T_m}{2\rho}\right]^6 + \dots \quad (9)$$

$$\rho = -\frac{\left[1 + \left(\frac{dz_0}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[\left(\frac{d^2 z_0}{dx^2}\right)\right]} \quad (10)$$

$$\frac{1}{\rho} = -\left(\frac{d^2 z_0}{dx^2}\right) / \left[1 + \left(\frac{dz_0}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \quad (11)$$

로 나타냈다. 단, T 는 휨 보(즉, 골심지)의 두께, K 는 보의 단면계수, ρ 는 임의의 위치 x 에 있어서 골 중앙 위치 $z_0(x, z_0)$ 의 곡률반경(radius of curvature at the flute top of medium), M 은 두께 중앙부에 따라 작용하는 휨 모멘트, N 은 축력, t 는 두께방향의 위치에서 z_0 로 부터의 거리이다.

곡률반경 (ρ)에 대한 표현식을 (8)식에 대입하면 휨응력 (σ)을 구할 수 있다. 또한 골판지의 라이너 접착부를 통하여 골심지에 작용하는 부하는 플루트 프로파일 위치의 최상·하부인 플루트의 톱과 보톱에 집중하여 생기고, 그 부분에서 상하방향에 압축하중 W_0 가, 또한 좌우방향에 횡 하중 W_0 가 작용하는 것으로 나타냈다(Fig. 17-b).

그런데 그 변형은 플루트 팁의 접착부 영향 및 가공에 의한 변화가 있을 수 있어 복잡하지만, 그 부분은 전체중에서 극히 좁은 부분으로, 라이너와의 접착부 부근에서는 Saint-Vernant의 원리에 따라 집중응력은 그 집중위치로 부터 형상치수(여기에서는 두께) 정도 떨어지면 본래의 변형상태와 거의 같고 단순한 변형을 하는 응력을 나타낸다고 고려했다. 그리고 근사적으로, 보 설계의 일반적 방법에 따라 하중위치는 Fig. 17-b와 같이 양단이 상하이동을 하는 휨 보(양단의 각도변화 및 횡 방향의 변화는 0인 것)이라 고려했다. 즉, 골심지는 마주보는 접착부를 상하하중이 작용하는 양단 고정단이 되고, 그 양 접착부가 x 방향으로 일정한 간격을 가지고, 서로 반대되는 상하방향으로 이동하는 휨 보라고 고려했다. 따라서 일반 빔(보)설계와 같이, 하중위치를 Fig. 17-b와 같이 양단이 상하이동을 하는 양단 고정 휨 보로 했다.

Fig. 17-b와 같이, 골심지의 각 플루트 팁에 단위폭당 일정한 면압하중 W 가 작용할때, W 와 여기에 따르는 x 방향의 변위를 저지하는 횡하중 $W_0(W_{0e}, W_{0s})$ 를 고려하면 골판지에 z 방향 인장하중이 작용할 때의 골심지 임의 착안점의 단위폭당의 축력(axial force, N) 및 전단력(shearing force, F)은 힘의 평형방정식에 의하여

$$N = -(W \sin \theta + W_0 \cos \theta) \dots\dots\dots (12)$$

$$F = -(W \cos \theta + W_0 \sin \theta) \dots\dots\dots (13)$$

로 나타냈다. 단, θ 는 파형의 임의의 위치 x 에 있어서 골심지의 접선(기울기는 dz_0/dx)과 x 방향과의 이루는 각도이다.

W_0 는 x 방향의 변위를 저지하는 횡압(Fig. 17-b)이고, W 는 플루트 팁에 작용하는 수직하중이다. 여기에서 전단응력의 최대치는 라이너 접합부의 골심지 중앙위치에 있어 최대휨하중 (σ_{max})에 비해 극히 적으므로 계산의 편의를 위해 무시했다.

또한 휨모멘트(bending moment, M)는 모멘트의 평형방정식으로 부터

$$M = M_0 - W[(L/4) - x] + W_0[h/2 - z_0] \dots\dots\dots (14)$$

로 나타냈다. z_0 는 반타원파형 및 정현파형에 대하여 각 z_{0e}, z_{0s} 이고, $M_0(M_{0e}, M_{0s})$ 는 라이너 접촉부의 단위 폭당 작용하는 고정 모멘트(fixed moment)이다. 단면상에 분포하는 응력의 합력은 모멘트(우력)를 형성하므로 그 합은 0이 되어야 한다. 즉, 중립축에 관한 단면적의 모멘트는 0이되고 중립축은 단면의 도심(centroid)을 통과한다.

골심지 형상의 원점에 대한 반(反)대칭성의 조건(M 의 반 대칭)에 따라, $x = 0, z_0 = 0$ 에서 $M = 0$ 으로 됨에 따라, 고정모멘트 M_0 는

$$M_0 = [W(L/4)] - [W_0(h/2)] \dots\dots\dots (15)$$

즉, $M(=M_0)$ 는 다음 (16)식으로 나타냈다.

$$M = Wx - W_0z_0 \dots\dots\dots (16)$$

또한 $W_0(W_{0e}, W_{0s})$ 는 (15)식에 따라 (17)식으로 나타낼 수 있다.

$$W_0 = 2[W(L/4) - M_0]/h \dots\dots\dots (17)$$

골판지의 골의 형상 및 구성에 기초하여, 골심지의 라이너 접촉부인 골의 꼭대기부와 골 바닥부의 횡(x 방향의) 변위(λ_h)는 강도가 높은 라이너와 접착가공에 의한 속박에 의하여 골심지는 근사적으로 횡변위(λ_h)가 생기지 않는다고 보아 $\lambda = 0$ 이라고 보았다. 또한 파판은 횡방향의 속박 없이 자유이므로 횡하중 $W_0=0$ 으로 고려했다. 이 조건을 변형에너지법(Castigliano's theorem)에 의하여, 면하중 W 를 받는 때(용이한 계산을 위하여 $W = 1 \mu N/mm$ 로 한다)

의 횡변위(λ)의 표시식을 구할 수 있고, 그 변위(하중방향) λ 가 0 ($\lambda(x=L/4)=0$)이 되는 때의 변형조건(18식)에 적용하여 골의 변위(횡방향) (displacement in the MD for fiberboard) $\lambda h = 0$ 일때, 즉, λ 가 0이 되는 때의 변형조건(19, 20식)에 의하여 횡하중의 값을 결정했다.

$$\lambda = [\partial U / \partial W_0] \quad (18)$$

$$= [1/ET] \int_{x=0}^{\frac{L}{4}} [N + (M/\rho) \times (1 + (1/K))] [(h/2 - z_0)] d\theta = 0 \quad (19)$$

$$= \frac{1}{ET} \int_0^x [-N \cos \theta + \frac{M(1+K)}{k\rho^2} (\frac{h}{2} - z_0)] ds$$

$$+ \frac{1}{ET\rho} \int_0^x [N(\frac{h}{2} - z_0) - M \cos \theta] ds$$

$$\lambda(x=L/4) = \lambda(x=h/2) = 0 \quad (20)$$

포아송 관련한 식으로는 (19), (20)식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$= \frac{1}{ET} \int_0^x [-N \cos \theta + \frac{M(1+K)}{k\rho^2} (\frac{h}{2} - z_0)] ds$$

$$+ \frac{1}{ET\rho} \int_0^x [N(\frac{h}{2} - z_0) - M \cos \theta] ds$$

$$= 0 \quad (21)$$

여기에서 ν 는 포아송비(Poisson's ratio)이다.

골판지 플루트의 $\lambda h = 0$ 일때의 W_0 및 파판(골판지시트)의 $W_0 = 0$ 의 상태의 응력을 각각 결정할 수 있다. (18)식의 U 는 변형에너지를 나타내고, 근사적으로

$$U = \int \frac{N^2}{2ET} ds + \int \frac{(1+K)M^2}{2ETk\rho} ds + \int \frac{MN}{ET\rho} ds \quad (22)$$

로 나타낼 수 있다. 단, 앞 식의 U 는 변형에너지(strain energy), S 는 기준위치로부터 골판지의 중심부, 즉, 골심지의 두께 중심에 따른 길이이다. E 는 종탄성계수(modulus of longitudinal elasticity)이다.

(12), (16)식에 의하여 축력 N , 모멘트 M 을 구하고, 앞 식에 의하여 응력과 밀접한 관계에 있는 횡하중(lateral force of corrugated board) $W_0(W_{0e}, W_{0s})$ 가 결정되고 이에 따라 (8), (12), (16)식에 의하여 각 파형의 골심지 플루트 프로파일의 휨응력(σ_{oe}, σ_s)을 구했다.

1.2 골판지의 플루트 프로파일과 단면2차모멘트

1.2.1 골판지의 단면형상 및 단면2차모멘트와의 관계

골판지 플루트의 흐름방향(MD)에 모멘트 축을 가진 휨모멘트(M)가 1파장(L)당 ML (M 은 단위 휨모멘트, 1 Nmm/mm)의 크기로 작용할 때의 골판지 골의 휨응력을 고려했다(Fig. 18). 이 경우 1방향에 일정한 ML 이 작용하는 보의 휨(bending of beam)은, 외력은 0이고, 보 내부의 응력은 휨응력만 작용하기 때문에 일정한 휨 변형이 된다. 따라서 전단력이 0, 축력이 0의 상태로 된다. 그리고 점(x, z_0) = (0, 0)에 관한 점 대칭성을 고려하면 중립축은 $z_0=0$ 의 면에 있다고 고려했다.

직진 보(beam)의 단면내의 임의 곳에서의 휨응력(σ)은 휨공식(flexure formula)인 다음 (23)식과 같이 나타났다.

$$\text{휨응력}(\sigma) = \frac{(\text{휨모멘트})(M) \times (\text{중립축으로부터 말단까지의 거리})(z)}{\text{단면2차 모멘트}(I)}$$

$$\sigma = Mz/I \quad (23)$$

모멘트(M) = 일정(1 Nmm/mm)으로 나타내고, 단, 단면2차모멘트(I)는 골심지 골의 단면 2차 모멘트로서 여기에서는 1파형(wave)의 단면2차휨모멘트를 L 로 나눈 값(단위: mm⁴)으로 보았다($=Iz$).

z 는 Fig. 18-d 좌표의 z 로서, 앞 (4), (5)식($z=z_0+t \cos \theta$)으로부터 구한 값, 즉, 중립축(neutral axis)($z_0=0$)으로부터의 임의위치까지의 수직거리(높이방향의 간격)이다. 특히 최대휨모멘트 M 과 단면의 주변 경계에서 가장 큰 z 의 값을 이 식에 대입하면 최대휨응력(σ_x)인 σ_{max} 가 산출된다. (23)식에서 휨응력을 구할 수 있다.

이 휨 공식에서, 휨응력은 휨모멘트(M)에 정비례하고 단면의 단면2차모멘트(I)에 반비례 한다는 것을 보여준다. 또한 응력은 중립축으로부터의 거리 z 에 따라 선형적으로 변한다. 여기에서 응력(σ)을 그 단면에 작용하는 휨모멘트(M) 및 단면의 단면계수(modulus of section, Z)로 표

시하면, 이므로, 또는 로 나타낼 수 있다.

(23)식에서 나타낸 응력을 구하기 위해서 필요한 단위 폭당의 골심지의 평균 단면2차모멘트(I)는 정의에 따라

$$I = 4 \left[\int_A (z^2 dA) \right] / L = \int_A (z^2 / L) dA = \int_0^{\frac{h}{2}} (\Delta b / L) z^2 dz \quad (24)$$

으로 나타낼 수 있다. 단, A는 x=0에서 부터 x=L/4까지의 골의 1파형의 골심지 단면적을 나타내고, z는 임의 위치의 높이, dA는 위치 z의 미소단면적, Δb는 위치 z의 횡폭(Fig. 18-d)이다.

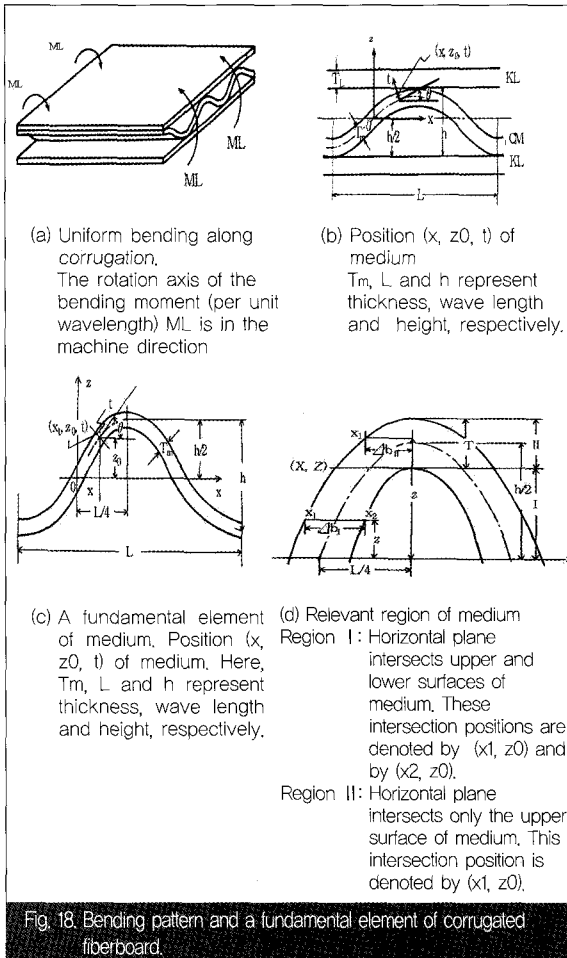


Fig. 18. Bending pattern and a fundamental element of corrugated fiberboard.

위치 z의 미소면적 dA와, x축과 z축까지의 거리인 x, z₀의 제곱을 각각 곱한 것을 각 축에 대한 미소단면의 단

면2차모멘트(second moment of area) 또는 관성모멘트(moment of inertia)라 하고, 도형전체의 면적 A에 대하여 적분한 것이 그 도형의 그 축에 대한 단면2차모멘트이다. 재료의 단면에 수직 또는 전단하중이 작용할 때 단면에 작용하는 응력은 그 단면적에 의하여 결정되지만, 재료에 휨모멘트가 작용하면 재료 내부에 발생하는 응력은 단면적으로만 결정하기 어렵기 때문에 단면2차모멘트가 필요하다.

미소면적 dA의 x축, z축에대한 단면2차모멘트를 I로서 나타내면 dI_x, dI_z는 각각 dI_x=z²dA, dI_z=x²dA로 나타내고, 따라서 면적 A에 대한 단면2차모멘트는

$$I_x = \int_A z^2 dA, I_z = \int_A x^2 dA \text{의 적분으로 얻을 수 있다.}$$

단면2차모멘트 (I)의 차원이 L⁴이므로 mm⁴으로 표시했다. 주어진 도형이 단면2차모멘트가 알려져 있는 몇개의 부분으로 나눌 수 있는 경우에는, 각 부분 도형들의 단면2차모멘트를 합하여 전체도형의 단면2차모멘트를 구할 수 있다. 그리고 도심을 지나는 축에 대한 단면2차모멘트 (I)를, 그 축에서 부터 도형의 끝까지의 거리(골판지의 경우)로 나눈 것을 이 축에 대한 단면계수(Z)라 하고 단위는 차원이 L³이므로, mm³으로 표시했다.

골심지 형상이 정현파상의 경우, h >> T_m이외는 I의 계산이 복잡하지만, h >> T_m의 경우는 다음과 같이 구할 수 있다.

위치 x, z₀를 통과하는 골심지의 두께 방향에 따른 평면(θ에 직각)과 교차하는 위표면, 아래표면 위치의 높이 값 z₁, z₂는 z₀의 값과는 다르고, 각각 (25), (26)식으로 나타냈다.

$$z_1 = z_0 + (T_m/2) \cos \theta \quad (25)$$

$$z_2 = z_0 - (T_m/2) \cos \theta \quad (26)$$

h >> 일때, 높이 z₁, z₂의 차이(z₁-z₂)는 근사적으로 h >> (z₁-z₂)이라고 보았다.

(24)식의 골심지의 미소면적 dA는 dA = T_mdS 이라고 볼 수 있다. 단, dS는 골심지의 두께 중심에 따른 미소길이이다. 따라서 (24)식으로부터 골판지 골심지 골의 평균

단면 2차 모멘트(I)는 근사적으로

$$I = \int_s (2T_m/L)z^2 ds \quad (27)$$

로 나타낼 수 있다. 단, 적분구역은 $z = -h/2$ 의 S값으로부터 $z=h/2$ 의 S값까지이다.

Fig. 18-d에서와 같이, 수평면에서 골심지를 절단하여 그 단면의 횡폭을 보면, 플루트 팁 부분과 떨어져있는 위, 아래의 표면을 잘라낸 거의 직선부의 경우(영역 I)와, 골심지의 플루트팁 부근의 곡선 부분의 경우(영역 II)로 나누어진다. 여기에서 이 2개의 경우로 나누어 을 구했다. 영역 I과 영역 II 경계면의 위표면 및 아래표면의 위치를 각각 (X, Z), (L/4, Z)로 나타낼 수 있다. 단, Z는 다음과 같다.

$$Z = (h - T_m)/2 \quad (28)$$

영역 I (Fig. 18-d)의 경우 정현파형상의 곡면으로 보아, 식(1)($z_0 = (h/2)\sin(2\pi x/L)$)의 곡면상의 위치(x, z_0)를 통과하는 수평면은 골심지 골의 위표면 및 아래표면과 각각 위치(x_1, z_0), (x_2, z_0)에서 교차한다.

본 연구에서는 (1), (3), (4), (5), (6), (7)식의 관계를 이용하여, x_1, x_2 의 값을 컴퓨터에 의한 수치계산으로 구하고, 영역 I의 횡폭 Δb_I 의 값을 (29)식으로 계산했다.

$$\Delta b_I(z_0) = x_2 - x_1 \quad (29)$$

또한 같은 방법으로 영역 II의 표면위치 (x_1, z_0)의 x_1 의 값을 (1)~(7)식으로부터 컴퓨터에 의한 수치계산으로, 플루트 팁 부근(영역 II)의 횡폭 Δb_{II} 의 값을 계산했다.

$$\Delta b_{II}(z_0) = (L/4) - x_1 \quad (30)$$

다음, (24), (29), (30)식으로부터 골심지의 평균 단면2차모멘트 I는

$$I = I_1 + I_2 \quad (31)$$

를 구했다. 단, 는 각각 영역 I, 영역 II의 단면2차모멘트, 즉

$$I_1(z) = 4 \times \int_0^z (\Delta b_I/L)z^2 ds \quad (32)$$

$$I_2(z) = 4 \times \int_z^h (\Delta b_{II}/L)z^2 ds \quad (33)$$

이다. (31), (32), (33)식으로부터 의 값을 구하고, (23), (31)식으로부터 골심지내부의 각 점의 응력을 결정할 수 있다.

재료강도의 계산은 내부에 작용하는 응력에 의하고, 휨(굽힘)응력을 결정하는데 필요한 값은 휨 모멘트(ML)를 나누면 단면2차모멘트(I)만 남는다. 여기에서 단면2차모멘트(I)와 골심지 골의 플루트 프로파일인자(T_m, L, h)의 관계가 나올 수 있고, 골심지의 횡폭 Δb 와 파형 형상과의 관계를 논할 수 있다.

임의 위치의 평균 단면2차모멘트의 증가분 dI 는 (24), (31)식으로부터 횡폭 Δb 와 높이 위치 z 에 관계하여 다음 (34)식으로 나타낼 수 있다.

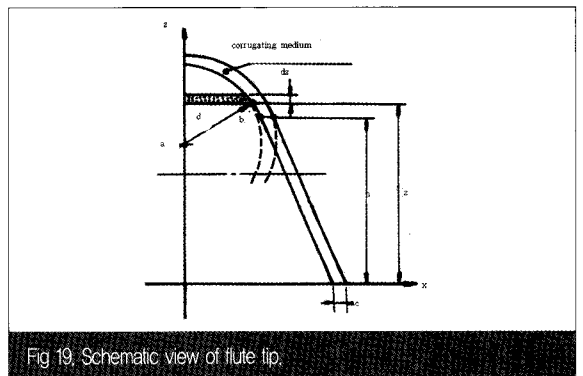
$$dI = (\Delta b/L)z^2 dz \quad (34)$$

Δb 는 의 중요인자로서, (34)식 및 Fig. 18-d를 보면, Δb 는 골심지의 파형형상에 크게 의존하고 있음을 알 수 있다. 그리고 z 와 Δb 의 관계($z_0=0 \sim h/2, x=0 \sim L/4$ 의 영역)는 수치계산에 의하여 T_m, L, h 에 의한 변화를 구했다.

1.2.2 코루게이팅 롤의 단면2차모멘트

현재 국내에서 상업적으로 사용되고 있는 표준 코루게이팅 롤(S회사)을 실례로 하여 단면2차모멘트를 해석했다. 수치계산으로 해석하기위한 식을 도입하기 위하여 다음과 같이 정리하여 수식화 했다.

Fig. 19는 코루게이팅 롤(corrugating roll) 골형상의



1/4형상을 단순 모델화한 그림으로, 도심(centroid)인 중심 축을 통하는 x축에서 z만큼 떨어진 거리에 있는 미소면적을 dA라 하면, x축에서 θ 각만큼 표시되므로 $x=(d/2)\cos\theta$, $z=(d/2)\sin\theta$, 그리고, $dz=(d/2)\cos\theta \cdot d\theta$, $dA=2xdz=(d/2)\cos 2\theta \cdot d\theta$, $z=(d/2)\sin\theta$, 그리고, $dz=(d/2)\cos\theta \cdot d\theta$, $dA=2xdz=(d/2)\cos 2\theta \cdot d\theta$ 이다. 그러므로 x축에 대한 단면2차모멘트 I_x 는

$$I_x = \int z^2 dA = (d^4/8) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^2\theta \cdot d\theta \quad \text{로 표현된다.}$$

Fig. 19의 가정조건으로 부터 수식의 전개를 하면 최종적으로 (38)식이 나오고, 이 식은 플루트 원호부분의 단면2차모멘트(0)이다.

Fig. 19에 있어서, 플루트 팁의 단면2차모멘트(0)는 (35)식이 된다.

$$I = \int_A z^2 dA \quad \text{이므로} \quad I = \int_b^{a+b} z^2 dA \quad \text{..... (35)}$$

여기에서, $a \leq b \leq a+d$, $dA = \sqrt{d^2 - (z-a)^2} \cdot dz$ 로 두면, (35)식은 $\int_b^{a+b} z^2 \sqrt{d^2 - (z-a)^2} \cdot dz$ 이 되고, 또한 $z-a=dsin\theta$ 로 보면 가 되어 다음 (36)식과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_x^{\pi/2} (dsin\theta+a)^2 \sqrt{d^2(1-\sin^2\theta)} \cdot dcos\theta d\theta \quad \text{..... (36)}$$

$\sin X = b-a/d$ 를 $\cos X = \sqrt{1-(b-a/d)^2}$ 로 두면 (36)식은 다음 (37)식으로 전개할 수 있다.

$$I = d^4 \int_x^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^2\theta d\theta + 2ad^3 \int_x^{\pi/2} \sin\theta \cos^2\theta d\theta + a^2 d^2 \int_x^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta \quad \text{..... (36)}$$

여기에서 (37)식은 플루트 팁 부분의 단면2차모멘트 $I(I=I_1)$ 이다. (37)식을 각 항별로 적분하면 다음과 같다.

- $d^4 \int_x^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^2\theta d\theta = \frac{d^4}{8} \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_x^{\pi/2} = \frac{d^4}{8} \left(\frac{\pi}{2} - X + \frac{1}{4} \sin 4X \right)$
- $2ad^3 \int_x^{\pi/2} \sin\theta \cos^2\theta d\theta = -\frac{2}{3} ad^3 [X]_x^{\pi/2} = \frac{2}{3} ad^3 z^3$

여기에서 $\cos X = \sqrt{1-(b-a)^2} = Z$ 로

$$\frac{2}{3} ad^3 Z^3 = \frac{2}{3} ad^3 \left\{ 1 - \left(\frac{b-a}{d} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{b-a}{d} \right)^2} \right\}$$

이 된다.

- $a^2 d^2 \int_x^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta = \frac{a^2 d^2}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_x^{\pi/2} = \frac{a^2 d^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - X - \frac{1}{2} \sin 2X \right)$

(37)식을 위와같이 적분하고 수학적계산으로 간소화하여 결국 다음 (38)식과 같이 나타냈다.

$$I_1 = \frac{d^4}{8} \left(\frac{\pi}{2} - X + \frac{1}{4} \sin 4X \right) + \frac{2}{3} ad^3 z^3 + \frac{a^2 d^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - X - \frac{1}{2} \sin 2X \right) \quad \text{..... (38)}$$

다음, Fig. 19의 직선부분의 단면2차모멘트(0)(=I_{II})를 구하는 식은

$$I_{II} = \int_0^h Z^2 dA \quad \text{..... (39)}$$

으로, 여기에서 dA는 면적요소로서 $dA = cdz$ 로 두면 위 (39)식은 다음과 같이 된다.

$$I_{II} = \int_0^h Z^2 dA = \int_0^h Z^2 cdz = c \int_0^h Z^2 dA = -\frac{c}{3} [z^3]_0^h = -\frac{ch^3}{3} \quad \text{..... (40)}$$

(38)식과 (40)식을 이용하여 상업용 코루게이팅 롤을 사용해 제조된 양면골판지의 플루트 단면2차모멘트를 계산했다.

1.2.3 단면2차모멘트와 골판지 두께의 변화

하이로 골의 발생 및 제판, 제상공정 중에서 각종 물에 의하여 발생하는 골판지의 두께감소로 인하여 골판지의 평면압축강도, 수직압축강도, 휨강성 등이 저하되고 결과적으로 골판지상자의 압축강도 저하를 초래하고 있다. 골판지의 강도는 플루트 프로파일의 형상보존력과 강한 상관관계를 가지고 있고, 특히 골의 높이와 근사적 상관관계가 있다고 발표된바 있다.

골판지시트의 단면2차모멘트(I)와 골 높이의 저하에 의

한 골판지시트의 두께손실(caliper loss)과의 관계를 검토하기 위하여 양면골판지의 두께 변화에 따른 양면골판지의 단면2차모멘트 및 골심지 플루트의 단면2차모멘트 비율을 수치계산에 의하여 구했다.

실제 골판지의 두께감소가 골판지 제조 작업 공정 중에서 발생했다고 가정하면 골의 성형공정 중에서 발생하는 하이로 골성형(high and low corrugation)으로 인한 두께손실과 함께 주로 라이더 롤(rider-roll), 웨이트 롤(weight-roll)의 간격량(roll clearance)이 글루 머신(glue-machine)의 라이더 롤, 더블 페이스의 웨이트 롤 등의 선압 과대에, 가공공정상에서 발생한다면 슬리터(slitter), 슬로터(slotter), 프린터(printer), 다이 컷터(die-cutter) 등에서 여러 피드 롤(feed-roll), 프레스 실린더(press cylinder) 등을 지나면서 골판지는 두께방향으로 압축을 받아 발생한다. 이 압축이 탄성한계를 지날때 골판지의 골은 영구변형을 하게 되고, 이때 골판지의 강도 로스가 발생한다.

Nordman 등은, C-플루트 양면 골판지의 경우, 0.001인치(= 0.25 mm)의 두께손실은 압축강도를 약 10 % 이상 감소시킨다고 보고했다.

휨강성($S_b = E \cdot I$)인자인 단면2차모멘트(I)에 대하여 하이로 골 성형 혹은 작업공정 중에서 일어나는 골높이의 감소로 인한 영향을 검토하기위해 SK 210 × SCP 125 × SK 210으로 구성된 양면 골판지시트를 기준으로 그 변화를 구했다.

또한 골심지 골의 MD방향, CD방향의 휨강성을 각각 D_{mx} , D_{my} , 라이너의 MD방향, CD방향의 휨강성을 각각 D_{lx} , D_{ly} 로 하면,

$$D_{mx} = E_{mx} \cdot I_{mx}, D_{my} = E_{my} \cdot I_{my}$$

$$D_{lx} = E_{lx} \cdot I_{lx}, D_{ly} = E_{ly} \cdot I_{ly}$$

로 나타낼 수 있고, 이들 식으로부터 골판지 시트의 MD방향, CD방향의 휨강성인 D_x , D_y 는 각각 다음식으로 주어진다.


$$D_x = E_{lx} \cdot I_{lx} + E_{mx} \cdot I_{mx}$$

$$D_y = E_{ly} \cdot I_{ly} + E_{my} \cdot I_{my}$$

수직압축강도의 파괴메커니즘은, 압축, 인장, 전단, 휨강성에 의한 변형이 주요 원인이다. 그러나, 골판지의 수직압축강도와 원지의 수직압축강도의 파괴는 다르다. 전자는 상당 세장비(slenderness ratio)(λ)가 30을 넘어서기 때문에, 전단으로부터 휨에 의한 파괴이고, 후자는 세장비가 30 이하이기 때문에 전단파괴이다.

따라서 골판지의 압축강도는, 탄성형(橫)좌굴을 고려하는 것이 타당하다고 본다. 이 관점에서 $E_y \cdot I_y$ 를 계산에 의하여 구했다.

다음호에 계속...



축 발 전

뜻깊은 창립이 무궁한 발전과 번영의
초석이 되기를 기원합니다.

(주)동흥포장

대표이사 강문남

12월 27일 창립기념일을 축하합니다.

