Journal of Natural Sciences
Pai Chai University, Korea
Vol. 15, No. 1 : 1-10, 2004

음악 속의 수학

김 성 숙
배재대학교 자연과학부

Mathematics in Music

Sung Sook Kim
Dept. of Applied Mathematics, Paichai University

Abstract

Mathematics in music play very important roles in our society. In the time of the ancient Greeks, mathematics and music were strongly connected. This paper shows such connection between mathematics and music and concludes that music has mathematical characteristics.

서 론

음악을 전달하는 매개체는 소리이며 소리는 공기의 진동으로 전달된다. 진동수에 따라 음높이가 결정되며 두 개 이상의 진동수가 동시에 생길 때, 진동수의 비례에 따라 화음이 결정되어진다. 이 화음을 구성하는 데는 규칙들이 있다. 이 규칙은 자연의 언어인 숫자를 통해서 발전되어 왔다. 사람들은 음들 사이의 비례가 정수 비례가 될 때, 사람들에게 가장 편안하게 느끼는 화음으로 들려진다고 한다. 사람이 들을 수 있는 주파수는 20 Hz에서 20,000 Hz 라고 한다. 이 범위에 있지 않는 주파수는 사람들에게는 들리지 않는다고 한다. 그러나 집에서 키

우는 강아지는 50 Hz에서 46,000 Hz의 범위를 들을 수 있기에 때론 사람이 감지하지 못하는 소리를 듣고 반응한다. 지진이 날 때, 동물들이 먼저 알고 도망을 가는 것도 동물들은 이미 땅속에서 나오는 소리를 들을 수 있기 때문이라는 이론도 있다. 음악에서는 어느 옥타브에서 연주되건 음높이는 달라도 같은 멜로디로 들려진다. 멜로디의 음들이 움직이는 계단적 구조가 같을 경우, 같은 조의 멜로디로 인식하게 된다. 이것은 수학적으로 동치관계에 있기 때문이다. 숫자는 수학의 기호이며 수학은 과학과 논리의 언어이다. 수가 자연수, 유리수, 무리수로 확장됨에 따라 음악의 음계의 발달에도 많은 변화를 가져왔다. 무리수가 음악에 도입되기 전엔 건반악기를 다른 현악기와 함께 연주할 수가 없었다. 무리수를 도입하여 만든 평균율로 인해 건반악기가 다른 관, 현악기와 함께 연주할 수 있는 영광을 누리게 된 것이다. 이 논문에서는 음악 속에 수학이 관련된 사실을 살펴보고 수학이 음악에 미친 영향을 이해하는데 도움을 주고자 한다.

음계의 기원

피타고라스는 수학과 음악을 연결시킨 최초의 사람이다. 피타고라스학파 시대의 기본학문은 네 과목으로 이루어졌는데, 음악, 천문, 기하학, 정수론이었다. 이 때 학문으로서의 음악은 지금처럼 연주를 중시한 것이 아니고 수의 비율, 비례를 엄밀히 다루는 수학적 학문 분야로서 생각되어 졌다. 즉, 음악은 소리와 화음의 과학이었다. 피타고라스학파는 "라" 음[1])을 내는 줄과 똑같은 두께의 현들이 있을 때, 길이가 1인 현이 "라"음을 낸다면, 다음에 길이가 4:5인 현을 울려서 소리를 내면 "도" 음이 나오며, 길이가 3:4인 현을 울려서 소리를 내면 "레"음이 나오며, 길이가 2:3인 현을 울려서 소리를 내면 "미"음이 나오며, 길이가 3:5인 현을 울려서 소리를 내면 "파"음이 나오며, 길이가 1:2인 현을 울려서 소리를 내면 높은 "라"음이 나오는 것을 발견하였다. 피타고라스는 수 1, 2, 3, 4와 5를 사용한 비례로 다섯 음을 나타낼 수 있음을 알고 매우 기뻐했다. 또한 피타고라스학파들은 현의 길이가 2:1이면 한 옥타브 차이의 음이 나오고 2:3과 같이 정수비가 될 때, 완전 5도 같은 좋은 화음이 난다는 사실을 발견하였다. 그는 이 원리를 기초로 음계를 만들었다. 이것이 오늘날 피타고라스 음계로 알려져 있다.

1) 영어로는 A라고 하며 일반적으로 다장조에서 "라" 음이라고도 한다.

이 음계의 한 옥타브는 다섯 음으로 이루어졌으며 단조 음계였다. 피타고라스는 이것을 위의 설명한 실험으로 증명하였는데 우리도 바이올린 줄로 쉽게 증명해 볼 수 있다. 바이올린의 가장 가는 첫번 줄을 개방현으로 키면 “미” 음이 나오고 줄의 가운데를 누르고 키면 소리내기 힘든 한 옥타브 높은 “미” 음이 나온다. 후에 피타고라스학파는 이러한 5도 음정을 만드는 현의 길이의 비례를 계속 적용시켜서 모든 음의 길이를 만들어 내는 조율법을 만들어 기본 8음계를 완성하였다.

음높이와 주파수의 관계

줄의 길이와 음높이가 반비례한다는 사실은 기원전 6세기 경 피타고라스 시대에 알려졌으나, 주파수의 개념이나 음의 높이와 관련된 주파수의 비례라는 개념을 피타고라스가 정확히 파악하지는 못했다. 16세기나 17세기에 와서 갈릴레오(Galileo Galilei) 와 Mersenne가 독립적으로 소리(pitch)와 주파수의 관계를 실험을 통하여 확실하게 발견하게 되었다고 한다. 갈릴레오는 두 음의 주파수가 정수비례일 때 화음이 되는 규칙이 있다고 설명하였다.

줄의 길이가 반이 되면 음의 주파수가 2배로 많아진다. 주파수는 현의 길이에 반비례한다. 음의 높이는 현의 길이에 반비례하고 주파수에 비례한다. 한 옥타브간격이 1:2의 주파수[2] 비례에 의해 표현된다. 수학적으로 표현하면, 두음이 같은 음정, 즉 한 옥타브 간격이라는 사실은 두음의 주파수 x와 y가 다음 관계에서 동치(equivalent)일 때이다. 즉, $x \sim y \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 y, \pmod 1$이다. 우리가 보통 사용하는 주파수로 예를 들면, 다장조 음계에서의 “도”에서 여섯 번 째 음인 "라" 음은 주파수가 440 Hertz이다. 즉 1초에 440번 진동한다. 한 옥타브 올라간 “라" 는 880 Hertz이며, 다시 한 옥타브 올라간 “라" 는 1760 Hertz이다. 즉, “라" 음이 한 옥타브 올라갈 때마다 주파수가 두 배씩 커진다.

$$\log_2 880 = 1 + \log_2 440,$$
$$\log_2 1760 = 2 + \log_2 440,$$

---

2) 일초 동안에 발생한 진동수를 나타내는 것으로, 그 단위는 헤르츠 (Hz)를 사용한다. 만약 1초 동안 2회 진동하면 2Hz, 1000회를 진동하면 1000Hz(1KHz)가 된다.

$$\log_2 1760 = 1 + \log_2 880$$

이므로

$$\log_2 880 = \log_2 440 = \log_2 1760 \ (\bmod 1)$$

가 되어 주파수 440, 880과 1760은 동치가 된다.

순정율(Pure Temperament)의 문제점

순정조(Just Intonation)는 3개의 주요 삼화음"도:미:솔, 파:라:도, 솔:시:레"의 주파수의 비례가 4:5:6이 되도록 조율한 8도 음계로 이루어져 있는 것을 말한다. 이렇게 조율하는 것을 순정율이라 하는데, 이 조율법은 기본음으로 부터 순수하게 일정한 정수비에 의해서 모든 음의 주파수를 결정하게 되어 사람들이 아주 편안하고 자연스럽게 느끼게 된다. 이것은 중세에 쓰이기 시작하였는데 이때에 연주되는 곡은 아카펠라나 플렛이 없는 현악기위주의 곡이 대부분이었다. 바이올린의 전신이 되는 비올(Viol) 및 여러 가지 다양한 악기들이 서양에 도입되어 기악 합주 및 화성(Chord)에 대한 음악 기법이 발전하게 되면서 순정율이 많이 쓰이기 시작하였다. 기존의 파타고라스음계는 완전 5도 음정에 대해서는 멋진 협화음을 들려주지만 장 3도나 장 6도등의 나머지 음정에 대해서는 완전한 정수비의 음정이 나오지 않기 때문에 기본 3화음에서도 불협화음 구성을 보이게 되었다. 결국 12개 음에 대한 완전한 정수비가 완성된 15, 16세기에 들어서면서 새로운 순정율을 요구하게 되었고 아래의 표에서와 같은 7계의 음정에 대한 주파수의 비율만으로 12개의 새로운 순정율을 만들게 되었다.

도	레	미	파	솔	라	시	도
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

위 표를 보면"도:레"와 "라:시"는 주파수 비례로 8:9 이다. 현의 길이는 주파수에 반비례하므로, 현의 길이의 비례로는 9:8이 된다. 예술의 여왕인 음악과 과학의 왕인 수학이 만난 결과가 바로 이 순정율이기 때문에 화음 구성시 가장 완벽한 화성을 들려주게 된다.

그러나 이 방법도 문제가 있다. 그 이유는 유리수의 비례를 적용하였기 때문이다. 예를 들어 "도"를 1로 잡으면 높은 "라"는 5/3이 된다. 다시 2/3을 곱하면 아래 "레"가되고 여기에 4/3을 곱하면 "솔"이 되며, 마지막으로 2/3을 곱하면 처음 "도"가 된다. 이 과정을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{5}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{80}{81}$$

즉, 처음의 도가 1이 나오는 것이 아니라 $\frac{80}{81}$이 나와 $\frac{1}{80}$의 오차가 생긴다.

이 문제를 수학적으로 다시 설명하기 위하여 밑이 2인 로그함수를 도입하여 음정을 나타내어 보자. 만약 "도"의 주파수를 1이라 한다면, 로그함수에서는 $\log_2 1 = 0$ 이 된다. 한 옥타브 높은 도는 주파수 2가 되어 $\log_2 2 = 1$이 된다. $x = \log_2 p$일 때, $f(x) = x + \log_2 3/2 \pmod 1$로 하면 기본 음계는 [0, 1]에 있는 수로 표현되어질 수 있다. 1과 0을 동일점으로 만들면 $f(x) = x + \log_2 3/2 \pmod 1$은 x를 $f(x)$로 보내는 원의 무리수만큼의 회전으로 생각할 수 있다. $\log_2 3/2$이 무리수이므로 한 시작점 x_0가 위의 대응에 의하여 절대로 x_0로 돌아올 수 없고 x_0의 상(image)이 원주를 dense하게 채운다는 것은 잘 알려져 있다. [6] 그러므로 5도 음정의 주파수 비례로 움직인다면 첫 번째 주파수로 돌아올 수 없게 되는 것이다.

17, 18세기, 서양 음악에 온음과 반음사이의 간격이 일정함을 요구하는 합시코드, 피아노와 같은 건반악기가 합주에 사용되기 시작하고 튜닝이 고정된 관악기가 나타나기 시작하면서 순정율의 문제가 나타나기 시작하였다. 순정율은 건반악기에서 구현이 불가능하다. 조옮김할 때 변하는 주파수의 변화를 건반악기로서는 나타낼 수가 없기 때문이다. 같은 노래를 “다(도)”에서 시작해서 부르는 것과 “라(레)”에서 부르는 것은 완전히 다른 주파수를 가진 음들을 필요로 한다. 기본 베이스음이 “라(레)” 키의 경우 기본 베이스음이 “다(도)” 키의 조율에 비해 “도”와 “레”, 그리고 “미”와 “파”사이의 온음의 주파수 비율이 서로 바뀌게 된다. 순정율에서는 기본 베이스음에서부터 일정비율로 주파수를 결정하기 때문에 기본음이 변하면 전체 음들의 주파수를 같이 바꿔 주어야 한다. 그런데 오르간, 피아노로 대표되는 건반악기는 같은 음에 같은 주파수만 사용할 수 있는 치명적인 단점을 가지고 있었기 대문에 순정율을 사용하는 것이 불가능하게 되었던 것이다. 또한 순정율은 기본 베이스음에 따라 가변적인 주파수 체계

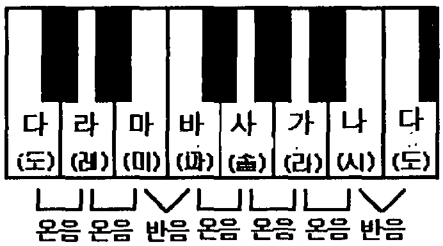
를 가지고 있기 때문에 같은 곡 안에서도 조옮김이 있을 때마다 주파수를 다시 잡아야한다. 오르간 주자였던 바흐는 이러한 문제를 평균율로 조율하여 해결할 것을 주장하였다.

바흐의 평균율(Equal Temperament)

평균율이란 한 옥타브를 12개의 반음(halftone)으로 나누어 균등 분할하는 피아노 건반상의 음체계이다. 이 경우 각 음의 간격은 동일하다. 앞의 순정율에 따르면 도와 레의 비율은 $\frac{9}{8} = 1.125$이고 평균율에 따르면 $2^{\frac{1}{6}} = 1.1225$가 된다. 평균율에 의한 오차 비율이 순정율보다 약간 적다.

도	레	미	파	솔	라	시	도
1	$2^{\frac{1}{6}}$	$2^{\frac{1}{3}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{3}{4}}$	$2^{\frac{11}{12}}$	2

순정율에 의하여 튜닝을 하였을 때는 피아노가 다른 현악기나 관악기와 함께 연주하는 것이 불가능한 것을 고민하던 바흐가 수학자와 만나 이 고민을 무리수를 이용하여 해결하였다는 것은 유명한 일화[3]로 내려오고 있다. 음이 12 반음이 올라가면 한 옥타브가 되어 주파수가 두 배가 되므로 한음에서 반음 올라가면 올라간 음의 주파수는 본래 음의 주파수의 $\sqrt[12]{2}$ 배가 된다. $\sqrt[12]{2}$은 분모와 분자가 정수인 분수, 즉 유리수로 나타낼 수 없는 무리수이다. 무리수가 널리 사용되기 전에, 조율의 최소 단위를 분수로 나타내려고 했던 많은 학자들이 그 수를 찾으려고 했으나 성공할 수 없었다. 그러나 무리수를 이 비율에 적용함으로 해결된 것이다. 평균율의 음은 도, 도#, 레, 레# , 미, 파, 파#, 솔, 솔#, 라 라#, 시로 구성되어있다. 다장조 음계에서 "도"에서 여섯 번 째 음인 "라" 음은 주파수가 440 Hertz이고



3) 오일러가 사랑한수 e의 바흐와 베르누이의 역사적인 만남에서 잘 묘사되고 있음.

낮은 "도"는 기준이 되는 "라" 음과 세 개의 반음의 차이가 나므로 주파수는 $440\times3\times\sqrt[12]{2}$ 으로 약 523이 된다. 이 주파수들은 등비수열을 이룬다. 바흐(1685-1750) 이전에도 평균율의 이론적인 바탕은 마련되어 있었으나 작곡에 처음으로 적용한 사람은 바흐였다. 오르간 주자였던 바흐는 1722년에 평균율 “클라비어곡집”제 1권의 작곡을 통하여 모든 조로 음악을 만들 수 있음을 보여 평균율이 갖고 있는 장점을 보여주었다. 바흐의 곡들을 보면 한마디에서도 여러번 조옮김이 나오는데, 이런 조옮김을 통하여 바흐는 평균율의 대중화에 결정적인 역할을 하게 되었다. 평균율은 순정율에서의 완벽한 화성 구조를 어느 정도는 희생하지만 조율이 고정된 악기들과의 합주를 가능하게 했고 또한, 조옮김이라는 전혀 새로운 작곡 기법을 가능하게 하는 절충안이 되게 하였다. 그러나 무리수를 이용한 평균율이 모든 문제를 해결한 조율법 같지만 사길 평균율에도 문제가 있다. 실제도 $C\#$과 D^b 의 음이 다르지만 건반악기를 위하여 같은 음으로 정의를 한 것이다. 현대에는 건반형 신서사이저들이 나와 인토네이션(Intonatin)을 변경할 수 있게 되어 평균율의 단점을 보안해 주고 있다.

로그함수를 이용한 센트

엘리스(Alexan-der Ellis)가 1875년에 로그함수를 사용하여 싸이클릭 센트(Cyclic Cents)라는 단위를 고안함으로서 음정의 단위를 주파수의 정수 비에서 일정한 간격의 대수적인 수로 바꾸어 새로운 단위를 만든 것이 엘리스의 센트 단위이다. 음정의 최대 단위인 옥타브 즉, 2의 log 값인 log2=0.3010을 1200센트로 놓는 로그함수를 이용한 척도이다. 온음은 200 센트이고 반음은 100센트이므로 수가 나오지 않아 계산하기가 편리하다. $a\times b=c$의 형식을 로그함수의 성질 $\log(a\times b)=\log a+\log b$를 사용하여 A+B=C의 형식으로 바꾸어 새로운 단위를 만든 것이다. $\log(a\times b)=\log a+\log b$이므로 우리가 모든 음정 비례를 $\log$로 바꾸면, 이들 단위를 곱하고 나누는 것 대신 더하고 뺄 수 있게 된다. 평균율(Equal temperament)은 반음을 100, 온음을 200센트로 했기 때문에 현악기와 건반악기 또는 관악기와의 협주시 조옮김이 발생하더라도 아무런 문제가 발생하지 않는다.[6] 주파수 x를 센트로 바꾸려면

$$1200\log_{2}x = 1200\frac{\ln x}{\ln 2}$$

를 구하면 된다.

x 센트를 주파수로 바꾸려면 $2^{\frac{x}{1200}}$ 을 구하면 된다.

황금비를 적용한 작곡가

유명한 작곡가의 작품을 황금비[4]를 적용하여 분석한 최초의 음악가는 에밀 나우만(Emil Naumann, 1827-1888)으로 알려져 있다. 그는 1869년 "문화 속에서의 예술적인 음(Die Tonkunst in der Culturgeschuichte)'이라는 책에서 "미는 대칭과 비례의 성격과 밀접한 관계를 갖으며 이런 성격을 통하여만 시각예술과 청각예술을 설명할 수 있다."는 이론을 제시했다. 작곡가 바르톡(Bela Bartok)은 20세기 최고의 관현악 작품의 하나로 꼽히는 그의 "Music for Strings, Percussion and Celesta(현악기, 타악기, 첼레스타를 위한 음악" 에서 황금비를 교묘하게 사용하고 있다. 이 곡 첫 악장은 89 마디로 구성되어 있는 데 마치 산을 올라갔다가 내려오듯이 처음에는 피아니시모부터 시작해 점점 강해져 55번째 마디에서 포르테시모로 클라이맥스를 이루고 다시 피아니시모로 줄어드는 구조이다. 89마디 중 55번째 마디는 황금비를 이루는 부분이다. 55마디 앞부분은 34와 21 마디 두 부분으로 나뉘고, 34마디는 다시 21과 13마디로 나뉜다. 뒷부분의 34 마디도 13과 21마디로 나뉘어 황금비를 그대로 적용됐다. 유명한 핸델의 '할렐루야'도 94 마디로 구성되어 있는 데, 황금비인 57, 58번째 마디에서 포르테시모로 클라이맥스를 이루고 다시 피아니시모로 줄어드는 구조이다. D. Webster는 1950년 황금비가 모차르트(Mozart), 베토벤(Beethoven), 그리고 브람스(Brahms)의 교향곡 중 소나타형식으로 된 1악장 모두에서 황금비가 형식적 기초로 쓰였다고 말하고 있다.[6] Derek Haylock는 베토벤(Beethoven)의 5번 교향곡에도 황금비가 쓰였다고 주장한다. 음악의 주제구가 첫마디와 마지

---

4) 황금비의 정확한 정의는 $\phi/1=(1+\phi)/\phi$ 가 되는 수 ϕ이다. 황금비로 불리는 이유는 비율로 정의되기 때문이다. ϕ를 구하기 위하여 $\phi^2=1+\phi$를 근의 공식을 사용하여 풀면 $\phi=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 가 나오며 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618033989...$ 가 된다.

막 마디에 나올 뿐만 아니라 601 마디 중 황금비에 해당하는 0.618의 자리가 되는 372 째 마디에서도 주제구가 나온다고 분석하고 있다. [5] 위대한 작곡가들은 자신이 좋아하는 수를 작품에 반영하거나 미적 균형을 유지하기 위해 치밀한 황금비와 같은 수학적 지식을 동원하고 있음을 알 수 있다.[5]

결 론

음계를 만들고 음을 조율할 때, 또한 화음을 구성하는 규칙들 속에는 수학의 원리가 들어 있고 또한 수학적으로 해석되어질 수 있음을 살펴보았다. 피타고라스학파는 현의 길이의 비율이 정수비가 될 때, 듣기 좋은 멋진 화음이 나타나며, 이런 수의 질서가 천체의 운행이나 인생의 질서를 유지한다고 보았으며 비율에 근거한 미학의 개념을 발전시켰다. 그들은 이 발견을 통해 모든 조화, 아름다움, 자연현상을 정수의 비례, 즉, 정수들의 분수인 유리수로 표현할 수 있다고 확신하였다. 그러나 그가 발견한 피타고라스의 정리에 의해 한변이 1인 이등변삼각형의 빗변의 길이인 $\sqrt{2}$를 정수로 표현하려고 노력하지만 실패하게 되고 곧, 무리수를 인정하게 되지만 이를 비밀로 하여 사용은 금지한다. 그러나 모든 것이 정수의 비례 따른다는 피타고라스학파의 철학에 위배되었기에 피타고라스학파는 혼란에 빠지게 되었다. 그 후 중세를 지나며 종교적인 이유로 무리수의 사용이 널리 퍼지지 못하였다. 무리수가 널리 사용되고야 평균율의 이론이 나오기 시작하였다. 수학과 음악이 아무 관계가 없는 학문 같지만, 사실 수학의 발전에 따라 음악도 발전해 왔음을 알 수 있다. 현대 음악이 자연을 모델로 삼는 것이 아니라 자연의 어떤 모델을 앞질러 제공하는 학문이라면 현대는 음악창작을 위하여 더욱 수학적인 이론이 필요하며 음악 속에 있는 수학적 원리들을 잘 이해하는 것이 음악이나 다른 예술에서의 새로운 변화를 가져올 수 있는 원동력이 된다고 생각된다.

참 고 문 헌

1. 김영집, 음악형식강의 황금분할 비례구조연구, 1991, 연세대 석사논문
2. 김성숙, 수학과 음악, 2002, 수학사학회지 15권 2호
3. 허민옮김/Eli Maor 저, 오일러가 사랑한 수 e, 경문사
4. Concise History of Music. Gerald Abraham 1979. London.
5. Derek Haylock, The Golden Section in Beethoven's Fifth, Mathematics Teaching vol. 84 1978 pp56-57.
6. Michael Beer, How do Mathematics and Music relate to each other
7. Rachel W. Hall & Kresimir Josic, The mathematics of Musical Instruments
8. Mike May, Did Mozart use the golden section?, American Scientist, 84(1), 1996, 118-119
9. 서우석, 서양 음악의 이해 강의록 (http://usoc.snu.ac.kr/lecture/lecture.htm)