

論文

점근해석을 이용한 확대형 채널 내의 천음속 예혼합 연소에 관한 연구

이 장 창*

A Study of Transonic Premixed Combustion in a Diverging Channel Using Asymptotic Analysis

Jang-Chang Lee*

ABSTRACT

A steady transonic dilute premixed combustion in a diverging channel is investigated by using asymptotic analysis. This model explores the nonlinear interactions between the near-sonic speed of the flow, the small changes in geometry from a straight channel, and the small heat release due to the one-step first-order Arrhenius chemical reaction. The reactive flow is described by a nonhomogeneous transonic small-disturbance (TSD) equation coupled with an ordinary differential equation for the calculation of the reactant mass fraction in the combustible gas. Also the asymptotic analysis reveals the similarity parameters that govern the reacting flow problem. The results show the complicated nonlinear interaction between the convection, reaction, and geometry effects and its effect on the flow behavior.

초 록

확대형 채널 내의 정상 천음속 희박 예혼합 연소에 대해 점근해석을 이용하여 연구하였다. 이 모델은 근음속의 유동 속도와 일직선 채널로부터 벗어난 작은 형상변화 그리고 1단 1차 Arrhenius 화학 반응율에 의한 적은 열 방출 사이에서 일어나는 비선형 상호작용에 대하여 탐구하였다. 반응유체 유동은 연소 가스의 질량 분율을 계산하는 상미분 방정식과 연계된 비균질 천음속 미교란 방정식(TSD)을 사용하여 묘사하였다. 또한 점근해석으로부터 반응유체 유동 문제를 지배하는 상사 파라미터들을 유도하였다. 수치 결과들은 대류와 화학반응 그리고 형상효과 사이에 일어나는 복잡한 비선형 상호작용과 유동에 미치는 이것의 영향 등이 잘 나타나 있다.

Key Words : Transonic(천음속) Dilute(희박) Premixed Combustion(예혼합 연소), Reactive Fluid(반응 유체), Asymptotic Analysis(점근해석)

1. 서 론

노즐이나 채널에서 화학 반응을 수반하는 유동(reactive flow)에 대한 압축성 유체 동역학은 기초과학의 문제로서 여러 분야에 응용할 수 있

다. 예를 들어 제트엔진의 연소실과 제트 전투기의 후기 연소기 또는 미사일의 추진 장치와 펄스 데토네이션 엔진 등등의 디자인에 기술적으로 응용할 수 있다. 특히 유동 속도가 초음속에 도달되어 충격파와 데토네이션파가 근원적으로 나타나는 고속 유동 연소는 많은 관심을 불러 일으켰다[1,2,3]. 이러한 경향 속에서 화학반응과 복합 유동 사이의 상호작용에 대한 해석은 상당히 중요하다 할 수 있다.

지난 수년 동안 폭연(deflagration)으로 알려진

† 2005년 1월 17일 접수 ~ 2005년 5월 4일 심사완료

* 정희원, 안동대학교 기계공학부
연락처자, E-mail : leejc@anu.ac.kr
경북 안동시 송천동 388번지

저속 유동 연소에 대한 이론적 연구가 활발히 이루어졌다[4]. 이 연구에서는 유동이 근원적으로 동결(frozen)되었고 열 방출 효과를 전혀 고려하지 않았다. 이것은 기체의 밀도가 일정하다는 가정을 통해 열팽창을 무시하거나 아주 적은 양의 열이 방출된다는 가정을 통하여 가능해진다. 적은 열 방출(small heat release) 가정은 점근해석의 섭동 성분 항으로써 열팽창으로 취급되고 점근해석의 선도 차수항(leading order term)에서는 이러한 열팽창이 소거되기 때문에 밀도가 일정하다는 결론으로 귀결된다[5]. 또한 이 연구[4]에서는 예혼합 연소가 저속 과정에 연관되어 있고 연소와 유동과정 사이에서 일어나는 상호작용에 대해서는 규명하지 못하였다. 이러한 상호작용은 유동 속도가 높은 아음속이거나 근음속일 때는 상당히 중요하다. 이때 밀도변화는 더 이상 무시할 수 없으며 밀도 변화는 유동에도 상당한 영향을 끼치고 연소 동역학과 연소 구조에도 영향을 미친다.

더욱이 최근에는 데토네이션[6,7,8,9]으로 알려진 초음속(고 마하수) 유동과정이 많은 주목을 받아 왔는데 이 연구에서는 채널 형상으로부터 야기되는 규정된(prescribed) 정지 충격파 또는 화학반응으로부터는 아무런 영향을 받지 않으면서 단지 반응유체 속에서 데토네이션을 작열케 하는 진행(traveling) 충격파 또는 맥동(pulsating) 충격파에 대해 집중적으로 연구가 이루어졌다. 그 결과, 연소와 유동 상태량(properties) 사이의 상호작용은 전형적으로 무시되었다.

본 연구에서는 아음속 영역과 초음속 영역 그리고 약한 충격파와 화학반응이 일어나는 천음속 연소 거동에 대하여 연구하였다. 본 연구 모델의 결과들은 데토네이션 엔진의 해석이나 스크램 제트의 연소를 이해하는데 유용하게 쓰일 것이다. 적은 열 방출은 반응물질과 온도장 그리고 밀도장 사이에서 복잡한 비선형 상호작용을 일으키는데 이러한 적은 열 방출을 수반하는 희박 화학반응(dilute chemical reactions)에 국한시켜 연구하였다. 이와 같은 조건 아래서 점근해석의 적용이 가능하며 이 점근해석은 화학반응이 일어나는 압축성 유동을 묘사하기 위해 차수가 낮은 단순화된 모델 방정식들을 제공한다.

II. 본 론

2.1 지배방정식

입구 높이가 $2H$ 이고 전체 길이가 L 인 2차

원 채널 내에 있는 반응유체의 압축성 유동을 고려한다. 채널 벽은 $\bar{y} = \pm H(1 + \epsilon F_{u,l}(\bar{x}/H))$ 로 주어지고 함수 $\epsilon F_{u,l}(\bar{x}/H)$ 는 채널의 위쪽 표면과 아래쪽 표면을 각각 나타낸다. 여기서 ϵ 은 일직선 채널로부터의 벗어난 채널 벽의 편차를 나타낸다.

2차원 채널 내의 정상, 비점성, 압축성 유동을 묘사하는 지배 방정식은 다음과 같다.

(Buckmaster & Ludford, 1982) :

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T}, \quad (1)$$

$$(\bar{\rho} \bar{u})_{\bar{x}} + (\bar{\rho} \bar{v})_{\bar{y}} = 0, \quad (2)$$

$$\bar{\rho} (\bar{u} \bar{u}_{\bar{x}} + \bar{v} \bar{u}_{\bar{y}}) = -\bar{p}_{\bar{x}}, \quad (3)$$

$$\bar{\rho} (\bar{u} \bar{v}_{\bar{x}} + \bar{v} \bar{v}_{\bar{y}}) = -\bar{p}_{\bar{y}}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \bar{\rho} C_p (\bar{u} \bar{T}_{\bar{x}} + \bar{v} \bar{T}_{\bar{y}}) - (\bar{u} \bar{p}_{\bar{x}} + \bar{v} \bar{p}_{\bar{y}}) \\ & = \lambda (\bar{T}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{T}_{\bar{y}\bar{y}}) + B \bar{W}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\bar{\rho} (\bar{u} \bar{Y}_{\bar{x}} + \bar{v} \bar{Y}_{\bar{y}}) = D (\bar{Y}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{Y}_{\bar{y}\bar{y}}) - \bar{W}, \quad (6)$$

$$\bar{W} = \bar{A} \bar{\rho} \bar{Y} e^{-\bar{E}/R\bar{T}}. \quad (7)$$

여기서 \bar{p} 는 압력, $\bar{\rho}$ 는 밀도, \bar{T} 는 유체의 온도, \bar{u} 는 축방향 속도, \bar{v} 는 횡방향 속도, \bar{Y} 는 반응물질의 질량분율(mass fraction)을 각각 나타낸다. 반응유체의 열역학적 상태량으로써 R 은 기체상수, D 는 확산계수, C_p 는 정압비열, γ 는 비열비, λ 는 열전도율, B 는 비 열방출(specific heat release)을 각각 나타내며 이 파라미터들은 모두 상수라고 가정한다. 식(7)은 1단 1차 Arrhenius 반응을 식이다. 여기서 \bar{A} 는 반응을 선지수함수 인자(pre-exponential factor)이고 \bar{E} 는 활성화 에너지를 나타낸다.

채널 입구에서 유체는 균일(uniform)상태라고 가정하며 $\bar{\rho}_0$ 는 입구 균일밀도, \bar{T}_0 는 입구 균일 온도, $\bar{p}_0 = \bar{\rho}_0 R \bar{T}_0$ 는 입구 균일압력, \bar{U}_0 는 축방향 입구 균일속도이다. 이러한 균일 상태의 상태량들은 지배방정식을 무차원화 시킬 때 기준상태로 사용되고 또한 채널 입구 높이의 반인 H 를 길이의 기준 상태로 사용하였다. 무차원 변수들을 다음과 같이 정의하였다;

$$p = \bar{p} / \bar{p}_0, \quad \rho = \bar{\rho} / \bar{\rho}_0, \quad T = \bar{T} / \bar{T}_0,$$

$$u = \overline{u} / \overline{U}_0, \quad v = \overline{v} / \overline{U}_0, \quad x = \overline{x} / H, \quad y = \overline{y} / H.$$

식 (1)~(7)을 무차원 형태의 방정식으로 다시 정리하면;

$$p = \rho T, \tag{8}$$

$$(\rho u)_x + (\rho v)_y = 0 \tag{9}$$

$$\rho(uu_x + vv_y) = -\frac{1}{\gamma M_0^2} p_x, \tag{10}$$

$$\rho(uv_x + vw_y) = -\frac{1}{\gamma M_0^2} p_y, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \rho(uT_x + vT_y) - \frac{\gamma-1}{\gamma}(up_x + vp_y) \\ = \frac{\mathcal{L}}{P_e}(T_{xx} + T_{yy}) + \beta W, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\rho(uY_x + vY_y) = \frac{1}{P_e}(Y_{xx} + Y_{yy}) - W, \tag{13}$$

$$W = A \rho Y e^{-\theta/T}. \tag{14}$$

위 식에서 나타난 무차원 파라미터들은 다음과 같다; 입구 마하수 $M_0 = \sqrt{\overline{U}_0^2 / (\gamma R \overline{T}_0)}$, Peclet 수 $P_e = \overline{\rho}_0 \overline{U}_0 H / D$, Lewis 수 $\mathcal{L} = \lambda / C_p D$, 열 방출 파라미터 $\beta = B / C_p \overline{T}_0$, 스케일된 활성화 에너지 $\theta = \overline{E} / R \overline{T}_0$, 스케일된 빈도인자(scaled frequency factor) $A = \overline{A} H / \overline{U}_0$.

반응유체 유동에 대한 경계 조건들은 아래와 같이 고려하였다. 먼저 채널 입구 앞쪽에서 연료 공기 혼합기에 의해 정상 유동 반응유체가 생성되고 반응유체는 채널 입구에서 다음과 같은 경계 조건들을 가진다;

$$\begin{aligned} u(0, y) = 1 + \mu u_0(y), \quad v_x(0, y) = 0, \\ T(0, y) = 1 + \mu T_0(y), \\ Y(0, y) = \delta Y_0(y) \quad \text{for } -1 \leq y \leq 1. \end{aligned} \tag{15}$$

여기서 μ 는 입구에서 축방향 속도와 온도가 균일 상태로부터 벗어난 정도를 나타낸 측정치이며 δ 는 채널 입구로 들어가는 반응유체의 질량을 나타낸 측정치이다. 여기서 주목해야 할 것은 채널 입구에서의 횡방향 속도 성분이 묘사되지 않았다는 점이다. 하지만 입구에서의 상태는 언제 든지 횡방향으로 속도가 발전할 수 있으며 따라서 하류에서 교란이 생성될 수도 있다. 즉, 입구 상태는 하류에서 생성될 교란에 대한 상류의 영

향력을 내재하고 있다. 이러한 가정은 본 연구의 기하학적 형상(Fig. 1 참조), 입구조건(균일한 흡입유동) 및 비점성 해석이라는 관점에서 본 연구 결과에 미치는 영향은 무시할 만하다.

$x_e (= L/H)$ 가 충분히 크다면, 출구 $x = x_e$ 에서의 횡방향 속도 성분은 0이고 이는 입구로부터 멀리 떨어진 곳의 유동이 평행 유동 상태라는 것과 일치한다;

$$v(x_e, y) = 0 \quad \text{for } -y_0 \leq y \leq y_1 \tag{16}$$

여기서, $y_0 = 1 + \epsilon F_{u,l}(x_e)$ 이고 $y_1 = 1 + \epsilon F_{u,l}(x_e)$ 이다. 채널 벽 $y = \pm(1 + \epsilon F_{u,l}(x))$ 를 따라 법선 속도 성분은 무시된다;

$$\begin{aligned} v(x, y) = \pm(1 + \epsilon F_{u,l}(x)) \times u(x, y) \\ = \pm(1 + \epsilon F_{u,l}(x)) \left[\epsilon \frac{dF_{u,l}(x)}{dx} \right] \quad \text{for } 0 \leq x \leq x_e. \end{aligned} \tag{17}$$

채널 내의 대칭 유동의 경우에는 축($y=0$)을 따라 다음과 같은 대칭 조건을 가정할 수 있다 ;

$$\begin{aligned} u(x, 0) = T_y(x, 0) = Y_y(x, 0) = 0 \\ \text{for } 0 \leq x \leq x_e. \end{aligned} \tag{18}$$

식 (8)~(14)는 경계조건 (15)~(18)과 함께 속도장, 온도장, 압력장, 밀도장, 질량분율 등을 구하기 위한 점근해석에 사용될 것이다. 본 연구는 아주 작게 확대된 채널 ($0 \leq \epsilon \ll 1$) 내에서 균일 상태로부터 약간 벗어난 ($0 \leq \mu \ll 1$) 속도로 입구에서 축방향으로 유입되는 희박 혼합물 ($0 \leq \delta \ll 1$)이 근음속 ($M_0 \sim 1$)으로 유동하는 문제에 그 초점을 맞추었다. 또한 공기와 혼합된 연료의 고속 연소에서는 전형적으로 $\mathcal{L} \sim 1$ 이고 $P_e \gg 1$ 이다. 이것은 식(12)와 (13)에서 열 확산 효과와 반응유체의 확산 효과가 무시됨을 의미한다. 이러한 조건 아래서 반응유체 유동의 상태량은 점근적으로 확장될 수 있다. 이때 $\delta \rightarrow 0, M_0 \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0$ 그리고 $P_e \rightarrow \infty$ 라는 극한을 둔다.

2.2 점근해석

아주 작게 확대된 채널 내를 희박 반응유체가 균일 상태에 가까운 상태로 근음속으로 유동할 경우, 대류와 화학반응 그리고 채널 형상은 균일 유동 상태량에 작은 섭동을 유발하는 효과가 있다. 이러한 섭동은 서로 복잡하게 비선형적으로

상호작용 할 것이다. 다양한 천음속 반응유체 상태량들 사이의 비선형 상호작용을 묘사하기 위해 다음을 고려한다;

$$x^* = \frac{x}{\varepsilon^{1/3}}, \quad (19)$$

$$K = \frac{1 - M_0^2}{\varepsilon^{2/3}}, \quad (20)$$

$$K_\delta = \frac{\delta}{\varepsilon^{4/3}}, \quad (21)$$

$$\mu = \varepsilon^{2/3}. \quad (22)$$

여기서 K 는 고전 천음속 유동 상사 파라미터 [11]이며 K_δ 은 채널로 들어가는 반응유체의 적은 양, 직선 채널로부터 벗어난 확대형 채널의 편차, 또는 음속 흐름(stream)으로부터 벗어난 입구 유동 속도의 편차 사이에 관련된 상사 파라미터이다. 여기서 주목해야 할 점은 Rusak과 Lee[13]의 응축 현상을 수반하는 근음속 유동에 대한 연구 경험으로 비추어 볼 때 채널 [$O(\varepsilon^{4/3})$]로 유입되는 반응유체의 양 [$O(\delta)$]은 크기가 훨씬 큰 유동 교란 성분 [$O(\varepsilon^{2/3})$]과 상호작용 할 것으로 기대된다. 또한 스케일된 축방향 좌표를 사용하였는데 이는 채널 내 천음속 유동에서 섭동들이 축방향을 따라 촘촘히 집중되어 있기 때문이다. 따라서 비선형 상호 작용들을 해석하기 위해서는 축방향 길이를 확대하는 것이 필요하다. 다음은 유동과 연소 상태량들을 점근적으로 근사 시킨 형태이다;

$$u = 1 + \varepsilon^{2/3}u_1 + \varepsilon^{4/3}u_2 + \dots, \quad (23)$$

$$v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^{5/3}v_2 + \dots, \quad (24)$$

$$p = 1 + \varepsilon^{2/3}p_1 + \varepsilon^{4/3}p_2 + \dots, \quad (25)$$

$$\rho = 1 + \varepsilon^{2/3}\rho_1 + \varepsilon^{4/3}\rho_2 + \dots, \quad (26)$$

$$T = 1 + \varepsilon^{2/3}T_1 + \varepsilon^{4/3}T_2 + \dots, \quad (27)$$

$$Y = \varepsilon^{4/3}K_\delta Y_1 + \dots. \quad (28)$$

식(19)~(28)에 나타난 다양한 멱들은 미지수 멱으로 표현된 점근확장(asymptotic expansions)의 일반식들을 식(8)~(14)에 대입하고 서로의 오더를 비교 매칭(matching)하여 결정된다. 이때 속도 성분 v 는 다른 변수의 차수(order)보다 낮은 차수를 갖는데 이는 채널입구에서 x 축을 따라 균일하게 유입된 유체가 채널 벽에 의해서 y 방향으로 ε 만

큼 변위(deflection)되기 때문이다. 다양한 섭동항들 중에서 차수가 제일 큰 것(1차)과 두 번째로 큰 차수(2차)만을 모으면 다음과 같다.

상태방정식 (8)로부터;

$$O(\varepsilon^{2/3}): p_1 = \rho_1 + T_1, \quad (29)$$

$$O(\varepsilon^{4/3}): p_2 = \rho_2 + T_2 + \rho_1 T_1; \quad (30)$$

연속방정식 (9)로부터;

$$O(\varepsilon^{1/3}): (\rho_1 + u_1)_{x^*} = 0, \quad (31)$$

$$O(\varepsilon): (\rho_2 + u_2 + \rho_1 u_1)_{x^*} + v_{1y} = 0; \quad (32)$$

x -운동량방정식 (10)로부터;

$$O(\varepsilon^{1/3}): \gamma u_{1x^*} + p_{1x^*} = 0, \quad (33)$$

$$O(\varepsilon): \gamma u_{1x^*}(\rho_1 + u_1) + \gamma u_{2x^*} - \gamma K u_{1x^*} + p_{2x^*} = 0, \quad (34)$$

y -운동량방정식 (11)로부터;

$$O(\varepsilon^{2/3}): \gamma v_{1x^*} + p_{1y} = 0, \quad (35)$$

$$O(\varepsilon^{4/3}): \gamma v_{1x^*}(\rho_1 + u_1) + \gamma v_{2x^*} - \gamma K v_{1x^*} + p_{2y} = 0. \quad (36)$$

에너지방정식 (12)와 식(14)로부터;

$$O(\varepsilon^{1/3}): T_{1x^*} - \frac{\gamma-1}{\gamma} p_{1x^*} = 0, \quad (37)$$

$$O(\varepsilon): T_{1x^*}(\rho_1 + u_1) + T_{2x^*} - \frac{\gamma-1}{\gamma} (u_1 p_{1x^*} + p_{2x^*}) - \beta K_\delta \bar{A} Y_1 e^{-\theta(1+\varepsilon^{2/3}T_1+\dots)} = 0. \quad (38)$$

$$O(\varepsilon^{-1/3}): Y_{1x^*} = -\bar{A} Y_1 e^{-\theta(1+\varepsilon^{2/3}T_1+\dots)}. \quad (39)$$

여기서, 수정 스케일된 빈도인자 $\bar{A} = \varepsilon^{1/3}A$ 이다. 1차 차수 식들[(29), (31), (33), (35), (37)]을 먼저 분석하면 식(31), (33), (37)로부터 아래의 식들을 구할 수 있다;

$$\rho_1 + u_1 = f(y), \quad \gamma u_1 + p_1 = g(y), \quad (40)$$

$$T_1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} p_1 = h(y).$$

여기서, 함수 $f(y)$, $g(y)$, $h(y)$ 는 입구 조건들로부터 결정된다. 식(29)를 사용하여;

$$h(y) = \frac{g(y)}{\gamma} - f(y). \quad (41)$$

식(40)으로부터; $p_1 = g(y) - \gamma u_1$.

식(35)로부터; $\gamma v_{1x} + g_y(y) - \gamma u_{1y} = 0$. (42)

$\bar{u}_1 = u_1 - g(y)/\gamma$ 라고 놓으면 식(42)로부터

$$\bar{u}_{1y} = v_{1x}. \quad (43)$$

식(43)으로부터 속도 섭동 포텐셜 ϕ_1 을 구할 수 있다;

$$\bar{u}_1 = \phi_{1x}, \quad v_1 = \phi_{1y}. \quad (44)$$

따라서 1차 섭동들은 다음과 같이 표현된다;

$$\begin{aligned} u_1 &= \phi_{1x} + \frac{g}{\gamma}, & p_1 &= -\gamma \phi_{1x}, \\ \rho_1 &= -\phi_{1x} + f(y) - \frac{g(y)}{\gamma}, & & \\ T_1 &= -(\gamma - 1)\phi_{1x} - f(y) + \frac{g(y)}{\gamma}. \end{aligned} \quad (45)$$

입구 조건 식(15)와 함께 일반성을 유지하면서 식(45)는 다음과 같이 표현된다;

$$\begin{aligned} g(y) &= \gamma u_0(y), & f(y) &= u_0(y) - T_0(y), \\ h(y) &= T_0(y), & \phi_{1x}(0, y) &= 0. \end{aligned} \quad (46)$$

함수 $g(y)$ 는 입구 와도를 나타내고 함수 $h(y)$ 는 온도의 입구 변화를 나타낸다. 여기서 주목해야 할 점은 입구에서의 압력 섭동은 없다는 것이다; $p_1(0, y) = 0$.

다음은 2차 차수 식들[(30), (32), (34), (36)]을 분석한다. 먼저 식(30)을 x^* 에 대해 1차 미분하고 정리하면 다음과 같이 표현된다;

$$\begin{aligned} p_{2x} - \rho_{2x} - T_{2x} &= (\rho_1 T_1)_{x^*}, \\ \rho_{2x} - u_{2x} &= -(\rho_1 u_1)_{x^*} - v_{1y}, \\ -u_{2x} - p_{2x} \frac{1}{\gamma} &= (\rho_1 + u_1)u_{1x} - K u_{1x}, \\ T_{2x} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} p_{2x} &= -T_{1x}(\rho_1 + u_1) + \\ &\frac{\gamma - 1}{\gamma} u_1 p_{1x} + \beta K_\delta \bar{A} Y_1 e^{-\theta(1 + \epsilon^{2/3} T_1 + \dots)}. \end{aligned}$$

위에 나타낸 4개의 식들을 모두 합치면 다음과 같이 표현된다;

$$\begin{aligned} &(\rho_1 u_1)_{x^*} - (\rho_1 + u_1 - K)u_{1x} + T_{1x}(\rho_1 + u_1) \\ &- \frac{\gamma - 1}{\gamma} u_1 p_{1x} - (\rho_1 T_1)_{x^*} + v_{1y} \\ &= \beta K_\delta \bar{A} Y_1 e^{-\theta(1 + \epsilon^{2/3} T_1)}. \end{aligned} \quad (47)$$

식(44)와 (45)를 식(47)에 대입하면 최종적으로 속도 섭동 포텐셜 $\phi_1(x^*, y)$ 로 표현된 식을 얻을 수 있다;

$$\begin{aligned} &\left[K - \left(f(y) + \frac{g(y)}{\gamma} \right) - (\gamma + 1)\phi_{1x} \right] \phi_{1x^*} \\ &+ \phi_{1yy} = \beta K_\delta \bar{A} Y_1 e^{-\theta(1 + \epsilon^{2/3} T_1)}. \end{aligned} \quad (48)$$

여기서 식(46)으로부터 $f(y) + g(y)/\gamma = 2u_0(y) - T_0(y)$ 이다. 식(48)은 연소 효과(식의 오른쪽 소스항)를 포함하는 수정된 Karman-Guderley 방정식이다. 이 식은 비제차 비선형 편미분 방정식이며 국부 마하수 M 에 따라 방정식의 형태가 바뀐다. 국부 마하수 $M^2 = 1 - \epsilon^{2/3}[K - f(y) - g(y)/\gamma - (\gamma + 1)\phi_{1x}]$ 이다. 유동이 국부적으로 아음속 ($M < 1$)이면 방정식은 타원형(elliptic)이고, 초음속이면 ($M > 1$) 방정식은 쌍곡선(hyperbolic)이다. 또한 주목해야 할 점은 연소가 없는 경우 ($\bar{A} = 0$)에는 식(48)은 채널 유동에 대한 고전 천음속 미교란 방정식(TSD)으로 단순화된다[11].

식(48)은 $Y_1(x^*, y)$ 의 단순화된 상미분 방정식 (39)과 $\phi_1(x^*, y)$ 의 함수로 이루어진 $T_1(x^*, y)$ 에 대한 식(45)와 함께 풀어야 된다. 또한 3개의 식으로 결합된 이 시스템은 식(15)~(18)로부터 유도된 아래의 경계 조건들을 만족해야 한다;

$$\begin{aligned} \phi_{1x}(0, y) &= 0, & \phi(x_e, y) &= 0 \text{ for } -1 \leq y \leq 1, \\ \phi_{1y}(x^*, \pm 1) &= \frac{dF_{u,t}}{dx}(\epsilon^{1/3} x^*) \\ &\text{for } 0 \leq x^* \leq x_e^* = \frac{x_e}{\epsilon^{1/3}}, \end{aligned}$$

$$Y_1(0, y) = Y_0(y) \text{ for } -1 \leq y \leq 1. \quad (49)$$

여기서, 벽 경계조건은 $0 \leq x^* \leq x_e^* = x_e/\epsilon^{1/3}$ 사이의 모든 점에서 $y = \pm 1$ 인 선을 따라 적용된다.

반응 유체의 압축성 유동에 대한 천음속 미교란 모델은 ϕ_1 의 해를 구하기 위한 식(48), Y_1 의 해를 구하기 위한 식(39), 경계 조건 식(49)로 구성되어 있다. 이 모델의 해로부터 축방

향 및 횡방향의 속도장, 마하수, 온도장, 압력계수 $c_p = (\bar{p} - \bar{p}_0) / \left(\frac{1}{2} \bar{\rho}_0 \bar{U}_0^2 \right)$ 가 포함된 압력장, 반응유체 질량분율장 등을 구할 수 있다. 식(48)로부터 다음과 같은 사실이 기대된다. 즉, 어떤 고정값 ϵ 및 K 에 대해서 K_δ 또는 \tilde{A} 또는 β 의 값이 증가할 때 영역 내에서 더욱 강한 연소와 더 큰 열 방출이 일어날 것이다.

2.3 수치 해석

식 (39), (45), (48), (49)로 주어진 천음속 반응유체에 대한 점근해석 모델은 국부 유동 조건에 따라 그 유동 형태가 바뀐다. 따라서 이 모델은 수치 해석적으로 형태민감(type-sensitive) 차분법이 요구된다. 본 연구에서는 식(48)을 차분화하기 위해 Murman & Cole의 테크닉을 사용하였다 [12]. 이 차분법에 따라 각 격자점에서 식(48)이 타원형(elliptic)형태, 쌍곡선(hyperbolic)형태 또는 혼합형태(mixed type)인지를 먼저 결정하는 테스트 장치를 고안하고, 수치 계산을 반복 수행하는 동안에는 각 단계에서 격자점의 유동 형태에 적합한 차분법을 사용하였다. 수치해석의 일관성을 위하여 식(48)의 보존적 형태를 사용하였다;

$$\left(\mathcal{K}(y)\phi_{1x} - \frac{1}{2}(\gamma+1)\phi_{1x}^2 \right)_{x^*} + (\phi_{1y})_y = \beta K_\delta \tilde{A} Y_1 e^{-\theta(1+\epsilon^{2/3}T_1)} \quad (50)$$

여기서 $\mathcal{K}(y) = K - (f(y) + g(y)/\gamma)$. 또한 외재적 반복 계산법을 사용하였으며 이 반복 계산법은 보통 화학 반응이 없는 채널 유동의 해로부터 주어진 초기 섭동들로부터 시작한다. 식(50)은 기지의 반응유체 질량분율 $Y_1(x^*, y)$ 의 분포에 대해서 수치계산을 수행하고 이로부터 구해진 속도 섭동 포텐셜 ϕ_1 의 해는 온도장 T_1 을 제공하며 이 온도장은 반응유체 방정식 (39)를 계산할 때 필요하다. Y_1 장을 결정하기 위하여, 식(39)는 $Y_{1x} = Q(x^*) = -\tilde{A} Y_1 e^{-\theta(1+\epsilon^{2/3}T_1)}$ 형태의 1차 상미분 방정식을 푸는데 적합한 Simpson의 적분법을 사용하였다;

$$Y_{1i,j} = Y_{1i-1,j} + \frac{\Delta x^*}{6} (Q_{i-1,j} + 4Q_{i-\frac{1}{2},j} + Q_{i,j}) + O[(\Delta x^*)^5] \quad (51)$$

여기서 $Q_{i-\frac{1}{2},j} = (Q_{i-1,j} - Q_{i,j})/2$ 가 사용되었

다. 식(48)과 (39)는 해가 수렴할 때까지 반복 계산되었다.

2.4 계산 결과

본 연구에서 사용된 프로그램은 Rusak과 Lee[13]가 개발한 코드를 수정 보완한 것이다. Rusak과 Lee[13]의 논문에서는 격자정밀(grid refinement)에 따른 수치 알고리즘의 민감도가 폭 넓게 연구되었고 격자가 정밀해짐에 따라 수치 결과의 수렴성이 개선됨을 예시하였다.

입구와 출구 부분이 일직선이고 x 축에 대해 대칭인 확대형 채널 (Fig. 1)의 각 파라미터들의 값은 다음과 같다 ;

$$\epsilon = 0.12, \quad x_e = 1,$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{ 일 때 } F_{u,i}(x) = 0,$$

$$1 \leq x \leq 2 \text{ 일 때 } F_{u,i}(x) = \pm(1 - \cos(\pi x))/2,$$

$$2 \leq x \leq 3 \text{ 일 때 } F_{u,i}(x) = \pm 1.$$

또한 $K_\delta = 1, \beta = 2, \theta = 12$ 인 고정값들이 모든 경우에 대해 사용되었다. 입구 상태는 균일 상태이고 $u_0(y) = T_0(y) = 0$ (또는 $f(y) = g(y) = 0$)이며 $Y_0(y) = 1$ 이다. 유동이 x 축 대칭이기 때문에 수치계산은 채널의 반쪽인 아래 영역에서만 수행되었다. $300(x^*$ 방향) $\times 200(y$ 방향)의 격자를 사용하여 입구 마하수 $M_0 = 0.80$ 에 대한 다양한 빈도인자 ($\tilde{A} = 10,000 \sim 30,000$)에 대하여 충분히 수렴된 수치결과를 얻을 수 있었다.

Fig. 2a-2c와 3a-3c는 입구 마하수 $M_0 = 0.8$ (또는 $K = 1.48$)이고 $\tilde{A} = 10,000$ 및 $20,000$ 그리고 $30,000$ 인 각각의 경우에 대하여 무차원 온도장 $T = 1 + \epsilon^{2/3}T_1$ 과 반응유체 질량 분율장 Y_1 을 나타내었다. 이 그림들에서 유동은 왼쪽에

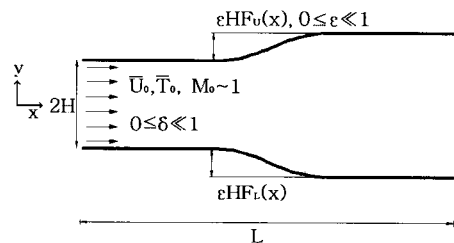


Fig. 1. Physical model of a transonic flow of a reactive fluid in a channel

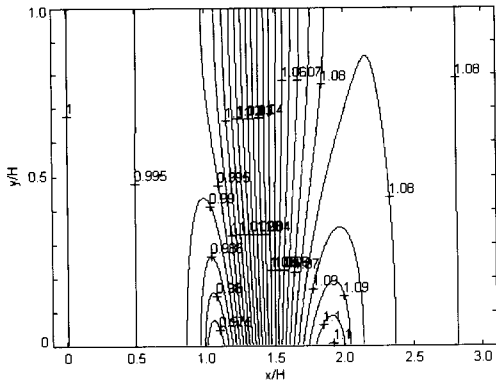


Fig. 2a. Temperature Contours for $M_0=0.8$ and $\tilde{A}=10,000$

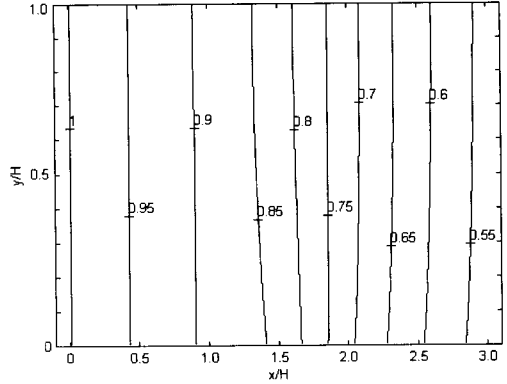


Fig. 3a. Reactant Mass Fraction Contours for $M_0=0.8$ and $\tilde{A}=10,000$

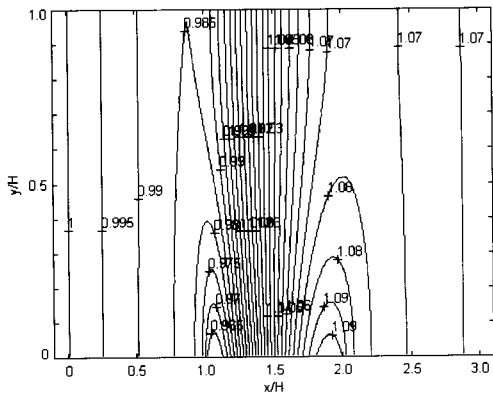


Fig. 2b. Temperature Contours for $M_0=0.8$ and $\tilde{A}=20,000$

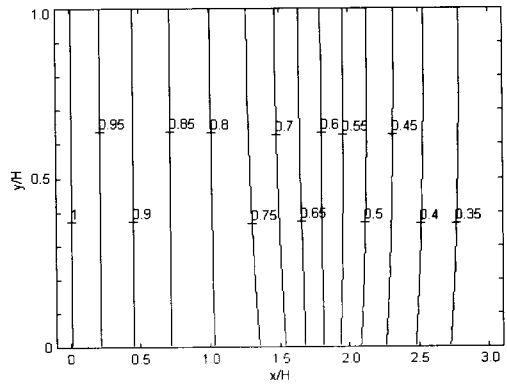


Fig. 3b. Reactant Mass Fraction Contours for $M_0=0.8$ and $\tilde{A}=20,000$

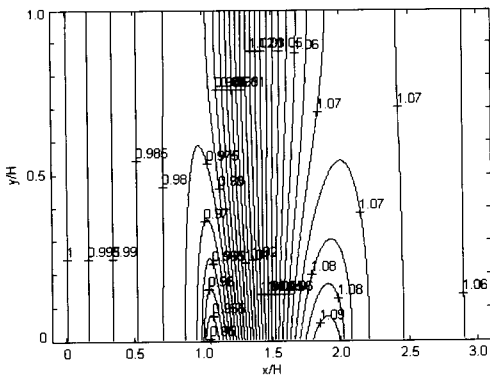


Fig. 2c. Temperature Contours for $M_0=0.8$ and $\tilde{A}=30,000$

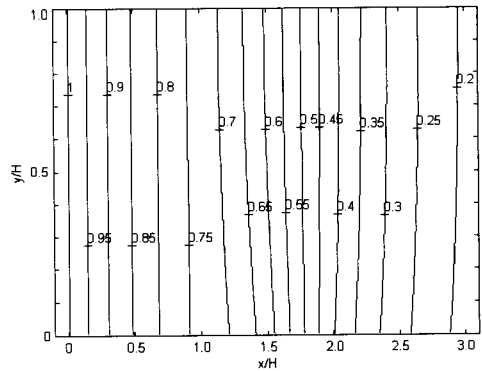


Fig. 3c. Reactant Mass Fraction Contours for $M_0=0.8$ and $\tilde{A}=30,000$

서 오른쪽으로 흐르고 아래쪽 선은 채널의 아래쪽 벽을 나타내며 위쪽 선은 중심선을 나타낸다. Fig. 2a-2c는 $\Delta T = 0.005$ 인 등온선들로 구성되어

어있고 Fig. 3a-3c는 $\Delta Y_1 = 0.05$ 인 등질량 분율 선으로 구성되어 있다. 각각의 \tilde{A} 값에 대해 온도 장과 반응유체 질량 분율장은 채널 벽 근처에서

비선형적으로 거동하고 있다. 또한 2개의 뚜렷한 중심점이 존재하는데 하나는 $x=1$ 근처에 있고 다른 하나는 $x=2$ 근처에 있다. $x=1$ 은 채널 형상이 오목하게(concave) 확대되기 시작하는 지점이다. 이 지점에서 온도는 최소 값에 도달하고 화학반응은 조금 느려진다. $x=2$ 에서는 채널 형상이 볼록하게(convex)되면서 채널 확대가 끝나는 지점이다. 이 지점에서 온도는 최고 값에 도달하고 화학반응은 조금 증가할 것이다. 다른 한편으로 채널 중심선 근처에서의 T 와 Y_1 은 단조롭게 변화하고 있다. 또한 빈도인자 \bar{A} 의 증가는 온도장에서의 변화를 증가시키고 있다. 각 온도장의 출구온도는 입구온도 보다 더 높아진 것을 알 수 있으며 높아진 온도는 출구에서 반응유체가 더 많이 소모 되도록 도와준다.

Fig. 4a와 4b는 다양한 \bar{A} 값에 대하여 확대형 채널 내의 벽과 중심선을 따라 유동 압력 분포를 나타내고 있다. $x=1$ 근처에서 유동의 가속과 흡입(suction)(낮은 압력)이 분명하게 나타나고 있으며 그 결과 이 영역에서는 온도가 낮고 화학반응이 천천히 일어난다. 빈도인자 \bar{A} 의 값이 증가할수록 이러한 효과는 더욱 강화되고 있다. 벽면이 점점 덜 오목하게 됨에 따라 유동의 속도는 감소하게 되고 온도와 압력은 증가한다. 반대로 벽면이 볼록한 $x=2$ 근처에서는 온도와 압력이 최고값에 도달하고 있으며 \bar{A} 의 값이 증가할수록 이러한 효과는 더욱 심화되고 있음을 볼 수 있다. 또한 입출구의 압력계수를 비교해 보면 출구 유동 속도가 입구 유동 속도보다 더 느리다는

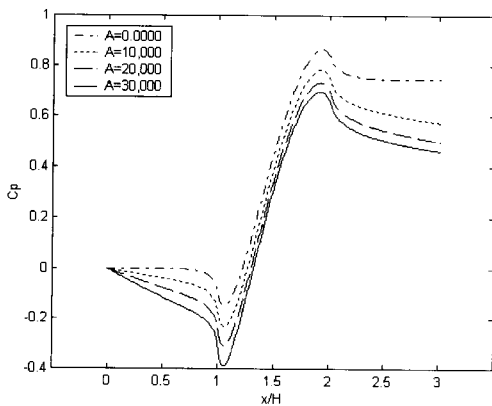


Fig. 4a. Pressure coefficient distribution along wall for $M_0=0.8$ and various \bar{A}

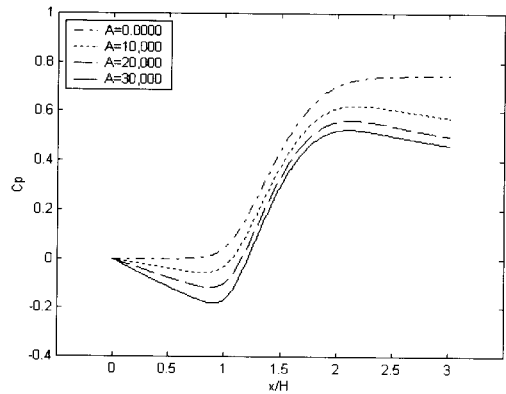


Fig. 4b. Pressure coefficient distribution along centerline for $M_0=0.8$ and various \bar{A}

것을 알 수 있고 이는 출구에서의 온도와 압력이 더 증가되었음을 의미한다. 따라서 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다. 화학 반응율이 고정되어 있다면 채널입구로 들어오는 높은 운동에너지가 화학반응과 채널확장을 통해 출구에서의 더 높은 열에너지로 전환되었음을 알 수 있다. 하지만 빈도인자 \bar{A} 값의 증가는 출구에서의 온도(열에너지)와 압력을 떨어뜨리는 요인이 된다.

III. 결 론

확대형 채널 내에서 정상 천음속 희박 예혼합 연소에 대해 점근해석 모델을 이용하여 연구하였다. 이 모델을 이용하여 근음속 유동 속도, 일직선 채널로부터 벗어난 형상의 작은 변화, 1단 1차 Arrhenius 화학 반응율 식에 의한 적은 열 방출 사이에 일어나는 비선형 상호작용에 대해 탐구하였다. 반응유체 유동은 연소 가스의 질량 분율을 계산하는 상미분 방정식과 연립하여 비균질 천음속 미교란 방정식(TSD)을 사용하여 해석하였으며 또한 점근해석으로부터 반응유체 유동 문제를 지배하는 상사 파라미터들을 유도하였다. 수치해석 결과들은 대류와 화학반응 그리고 형상 효과 사이에서 일어나는 복잡한 비선형 상호작용과 이러한 상호작용이 유동에 미치는 영향 등을 잘 조명하고 있으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1)채널형상의 확대는 반응유체가 더 많이 소모 되도록 도와주고 또한 입구 운동에너지를 출구의 높은 열에너지로 전환시켰다.

(2)반응유체 빈도인자가 증가하면 할수록 반응유체는 더 많이 소모되었고 채널 내의 유동은 가속되었으며 채널 출구의 열에너지는 낮아졌다.

후 기

본 논문은 2004학년도 안동대학교 학술연구지원사업에 의하여 연구되었으며 이에 감사드립니다. 또한 본 연구에 많은 조언을 해준 Zvi Rusak 교수께 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

- 1) Clarke, J. F., Kassoy, D. R., and Riley, N., "On the direct initiation of a plane detonation wave", Proceedings of the Royal Society, London, Vol. A408, 1986, pp. 129-148.
- 2) Clarke, J. F., Kassoy, D. R., Meharzi, N. E., Riley, N., and Vasantha, R., "On the evolution of plane detonations", Proceedings of the Royal Society, London, A429, 1990, pp. 259-283.
- 3) Short, M., Kapila, A., and Quirk, J. J., "The chemical-gas dynamic mechanisms of pulsating detonation wave instability", Phil. Transactions the Royal Society, London, Vol. A357, 1999, pp. 3621-3637.
- 4) Williams, F. A., Combustion Theory, Benjamin Cummings, New York, 1985.
- 5) Buckmaster, J. D. and Ludford, G. S. S., Theory of Laminar Flames, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- 6) Cheryni, G.G. "Supersonic flow past

bodies with formation of detonation and combustionfronts", *Astronautics Acta / bf* 13, 1968, 467-475.

7) Clarke, J.F., Kassoy, D.R., Riley, N. "On the direct initiation of a plane detonation wave", Proceedings of the Royal Society, London, A408, 1986, 129-148.

8) Clarke, J.F., Kassoy, D.R., Meharzi, N.E., Riley, N., Vasantha, R. "On the evolution of plane detonations", Proceedings of the Royal Society, London, A429, 1990, 259-283.

9) Short, M., Kapila, A., Quirk, J.J. "The chemical-gas dynamic mechanisms of pulsating detonation wave instability", Phil. Transactions the Royal Society, London, A357, 1999, 3621-3637.

10) Cai, J., Icoz, O., Lui, F., and Sirignano, W.A, "Combustion in a transonic flow with large axial and transverse pressure gradients", Proc. 2nd Joint Meeting of the US Sections of the Combustion Institute, 2001b, pp. 1-9.

11) Cole, J. D. and Cook, L. P., Transonic aerodynamics, North-Holland, 1986.

12) Murman, E. M. and Cole, J. D., "Calculation of plane study transonic flows" AIAA Journal, Vol. 9, 1971, pp. 114-121.

13) Rusak, Z. and Lee, J.-C., "Transonic flow of moist air around a thin airfoil with non-equilibrium and homegeneous condensation", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 403, 2000, pp. 173-199.