

## 論文

## 저속 압축성 유동에서 예조건화 방법을 이용한 수렴성 증진에 대한 연구

이재은\*, 박수형\*\*, 권장혁\*\*\*

### A Study on Convergence Enhancement Using Preconditioning Methods in Compressible Low Speed Flows

Jae-Eun Lee\*, Soo-Hyung Park\*\* and Jang-Hyuk Kwon\*\*\*

#### ABSTRACT

It is well known that preconditioning methods are efficient for convergence acceleration in the compressible low Mach number flows. In this study, the original Euler equations and three differently nondimensionalized preconditioning methods are implemented in two dimensional inviscid bump flows using the 3rd order MUSCL and DADI schemes as numerical flux discretization and time integration, respectively. The multigrid and local time stepping methods are also used to accelerate the convergence. The test case indicates that a properly modified local preconditioning technique involving concepts of a global preconditioning allows Mach number independent convergence. Besides, an asymptotic analysis for properties of preconditioning methods is added.

#### 초 록

저속 압축성 유동에서 사용하는 예조건화 기법은 수렴성 증진에 효과적이다. 본 연구에서는 일반적인 오일러 지배 방정식과 각각 다르게 무차원화한 세 가지 종류의 예조건화 기법을 3차 공간 정확도의 MUSCL, DADI, 다중 격자, 국소 시간 전진 기법을 이용하여 2차원 비점성 bump 유동에 적용하였다. 결과적으로 국소 예조건화 기법에 전역 예조건화 기법의 압력 항 무차원화 방법을 적용하면, 마하수에 무관한 수렴 특성을 얻을 수 있다. 또한, 점근해석을 이용하여 각 예조건화 기법의 특성에 대해 언급하였다.

**Key Words** : Preconditioning Method(예조건화 기법), Low Speed Flow(저속 유동), Euler Equations(오일러 방정식), Convergence Enhancement(수렴성 증진), Pressure Correction(압력 보정), Asymptotic Analysis(점근 해석)

#### 1. 서 론

수년 동안 많은 연구자들이 초음속에서 아음속까지의 넓은 속도 영역의 유동장을 하나의 수치 알고리즘으로 해석하려고 노력하였다. 특히 저속 ( $M=0.1$  이하) 영역에서 압축성 알고리즘의 수렴성 악화에 대한 문제는 자주 거론되어 왔다[1-11]. 이는 Jacobian 행렬의 고유치들 중 최대 고유치

† 2004년 12월 21일 접수 ~ 2005년 7월 6일 심사완료

\* 정희원, 한국과학기술원 항공우주공학전공 대학원

\*\* Research Associate, Center for Computation and Technology, Louisiana State University

\*\*\* 정희원, 한국과학기술원 항공우주공학전공

연락처, E-mail : jhkwon@kaist.ac.kr

대전시 유성구 구성동 373-1

와 최소 고유치의 비가 저 마하수에서 커짐에 따라 최소 고유치의 영향에 의해 수렴성이 나빠지거나 더 이상 수렴하지 않는 특성(stiffness problem)을 가지기 때문에 알려져 있다[1].

시간 항 예조건화 기법(time-derivative preconditioning method)은 정상 상태(steady state) 해를 구할 때 시간 항에 예조건화 행렬(preconditioning matrix)을 곱하여 고유치들의 비를 인위적으로 조절함으로써 수렴성 증진을 얻을 수 있는 방법이다[2,3]. 또한, 높은 받음각을 가진 익형과 같이 전체 유동장은 초음속이지만 부분적으로 저속 영역을 포함하고 있거나 노즐, 터빈과 같이 강한 열원에 의한 온도 변화가 존재하는 저속 유동 등과 같은 경우를 해석할 때 기존의 비압축성 방정식(incompressible equation)으로는 한계가 있다[4].

예조건화 기법을 국소 예조건화(local preconditioning) 기법과 전역 예조건화(global preconditioning) 기법으로 나눌 수 있는데 대부분의 예조건화 기법이 전자에 속한다. 국소 예조건자(local preconditioner)는 예조건화 행렬의 변수로 국지적 유동 변수(point-by-point flow variable)를 사용한다. 그러나 점성(viscous) 유동이나 비정상(unsteady) 유동 해석 시 정체점(stagnation point)에서의 특이성(singularity) 제거를 위한 제한자(limiter) 구성에 고려되어야 할 인자(parameter)들이 늘어나는 단점이 있다[2,3]. 전역 예조건자(global preconditioner)는 주로 Briley에 의해 개발되었는데 자유류의 마하수를 이용하여 알고리즘 전반적으로 고정된 값을 사용한다. 이는 위에서 언급한 국소 예조건자의 단점을 보완한다 할 수 있지만 하나의 유동 영역에 다양한 마하수의 분포가 존재하는 복잡한 유동의 경우 정확도와 효율성에서 문제가 된다[5,6].

본 연구에서는 Weiss와 Smith의 국소 예조건화 기법[3]과 Briley의 전역 예조건화 기법[5,6]을 살펴보고 복잡한 유동 조건에서 유리한 국소 예조건화 기법의 유동해 특징을 가지면서, 압력 보정 후 전역 예조건화 기법과 같이 마하수에 무관한(Mach number independent) 수렴 특성을 가진 예조건화 기법을 개발하였다. 본 연구에서 구성한 예조건화 기법은 국소 예조건화 기법에 전역 예조건화 기법의 압력항 무차원화 방법을 적용하므로 '수정된 국소 예조건화 기법(modified local preconditioning method)'이라 하기로 한다. Reed 등이 Choi와 Merkle의 예조건화 기법을 이용하여 유사한 결과를 낸 바 있다[1].

저속 유동에 대한 접근 해석(asymptotic analysis)

의 결과에 의하면 운동 방정식의 압력 항이 특이성(singularity)을 가지게 되므로 이 항에서 유체 동역학적 압력(hydrodynamic pressure)을 직접적으로 반영해야 한다[7,12,13]. 비점성(invscid) bump 유동에 대하여 압력 보정 전 후 각 예조건화 기법의 수렴성과 원시 변수 벡터에서 유동 변수들의 정확도를 살펴보고 전역 예조건화 기법의 결과에서 밀도 항의 해상도 문제를 접근 해석(asymptotic analysis)을 이용하여 추론하였다.

## II. 무차원화

보통 유체 역학에서 무차원화한 지배 방정식을 사용하게 되는데 이는 수렴 특성에도 영향을 미친다. 본 연구에서는 세 가지 종류의 예조건화 기법에 각각 다른 무차원화 변수를 사용하였다. (-)기호는 차원을 가진 변수를 의미한다.

### 2.1 국소 예조건화 기법

본 연구에서 국소 예조건화 기법에 적용한 무차원화 변수는 식 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\tilde{\rho}}{\rho_r}, (u, v) = \frac{(\tilde{u}, \tilde{v})}{\sqrt{p_r/\rho_r}}, p = \frac{\tilde{p}}{p_r}, T = \frac{\tilde{T}}{T_r} \\ (x, y) &= \frac{(\tilde{x}, \tilde{y})}{L_r}, t = \frac{\tilde{t}}{L_r/\sqrt{p_r/\rho_r}}, \\ E &= \frac{\tilde{E}}{p_r/\rho_r}, H = \frac{\tilde{H}}{p_r/\rho_r} \end{aligned} \quad (1)$$

무차원화된 상태방정식과 총엔탈피는 다음과 같다.

$$p = \rho T \quad (2)$$

$$H = \frac{c^2}{(\gamma - 1)} + \phi, \quad \phi = \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (3)$$

### 2.2 전역 예조건화 기법

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\tilde{\rho}}{\rho_r}, (u, v) = \frac{(\tilde{u}, \tilde{v})}{u_r}, p = \frac{\tilde{p}}{\rho_r u_r^2}, T = \frac{\tilde{T}}{T_r} \\ (x, y) &= \frac{(\tilde{x}, \tilde{y})}{L_r}, t = \frac{\tilde{t}}{L_r/u_r}, E = \frac{\tilde{E}}{h_r}, H = \frac{\tilde{H}}{h_r} \end{aligned} \quad (4)$$

전역 예조건화 기법에서는 저속에서 총엔탈피의 손실을 피하기 위해 기준 엔탈피(reference enthalpy)  $h_r = C_p T_r$  과 Eckardt 수  $E_c = u_r^2/h_r = (\gamma - 1)M_r^2$ 가 도입되고 이로 인해 총엔탈피와 총에너지는  $H = E + E_c p/\rho$ 의 관계가

된다[5].

무차원화된 상태 방정식과 총엔탈피는 식 (5)와 식 (6)으로 나타난다.

$$p = \frac{\rho T}{\gamma M_r^2} = \frac{\rho c^2}{\gamma}, \quad c^2 = \frac{T}{M_r^2} \quad (5)$$

$$H = M_r^2 [c^2 + (\gamma - 1)\phi] \quad (6)$$

### 2.3 수정된 국소 예조건화 기법

본 연구에서 고안한 수정된 국소 예조건화 기법에 대한 소개는 3장에서 하기로 하고 먼저 식 (1)과 식 (4)의 무차원화와 다른 종류의 무차원화 변수를 소개한다[14].

$$\rho = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_r}, \quad (u, v) = \frac{(\tilde{u}, \tilde{v})}{u_r}, \quad p = \frac{\tilde{p}}{\rho_r u_r^2}, \quad T = \frac{\tilde{T}}{T_r} \quad (7)$$

$$(x, y) = \frac{(\tilde{x}, \tilde{y})}{L_r}, \quad t = \frac{\tilde{t}}{L_r/u_r}, \quad E = \frac{\tilde{E}}{u_r^2}, \quad H = \frac{\tilde{H}}{u_r^2}$$

식 (7)에서 식 (1)의 무차원화 방법과 다르면서 수렴 특성에 중요한 역할을 하는 것은  $\rho_r u_r^2$ 으로 무차원화된 압력 항이다. 이 항의 역할은 5장에서 점근 해석(asymptotic analysis)과 더불어 설명하기로 한다. 만약 식 (4)와 같이 총엔탈피와 총에너지를 무차원화하는 변수로 기준 엔탈피(reference enthalpy)를 사용하게 되면 고유치(eigenvalue)와 고유치 벡터행렬(eigenvector)로 구성된 수정된 국소 예조건화 행렬의 고유치계(eigensystem)가 복잡해진다. 식 (7)의 변수들로 무차원화된 상태 방정식은 식 (5)와 동일하고 총엔탈피는 식 (3)과 동일하다.

## III. 예조건화 기법

### 3.1 국소 예조건화 기법과 전역 예조건화 기법

국소 예조건화 기법의 예조건화 행렬  $\Gamma$ 는 Choi와 Merkle이 처음 제안하고 Weiss와 Smith가 확장하여 사용하였다.

$$U_r = \min \left[ c, \max \left( |U|, KU_{cut}, \frac{\mu}{\rho \Delta d}, \sqrt{\frac{|p|}{\rho}} \right) \right] \quad (8)$$

식 (8)은 예조건화 행렬에서 사용하는 기준 속도(reference velocity)로  $p' = p - p_\infty$ ,  $U_{cut} = \min(U_\infty, c_\infty)$ 은 적절히 수정된 항들이 다[8,15].  $U_r$ 은 초음속 영역에서는 예조건화가 적

용되지 않은 고유치 상태에 맞춰지고, 아음속 영역에서는 정체점 부근에서 일어날 수 있는 불안정성을 제거하기 위한 일종의 제한자 역할을 한다. 수정된 국소 예조건화 기법에서도 같은 기준 속도를 사용한다.

전역 예조건화 기법은  $\Gamma_q$ 라는 대각 행렬을 예조건화 행렬로 사용하는데  $\beta_{br} = \min(1, M_r^2)$ 이 초음속 영역에서 예조건화되지 않은 고유치계(eigensystem)로 전환(switch)하는 역할을 하고, 저속에서는 전역 예조건화 기법의 특징인 기준마하수(reference Mach number)가 된다. 전역 예조건화 기법의 시스템 행렬(system matrix)은 국소 예조건화 기법의 시스템 행렬에 비해 매우 간단한 변수로 구성된다[5,6].

원시 변수 벡터의 유동 변수로 국소 예조건화 기법은 압력, 속도, 온도를, 전역 예조건화 기법은 밀도, 속도, 압력을 사용한다[3,5].

### 3.2 수정된 국소 예조건화 기법

본 연구에서 고안한 수정된 국소 예조건화 기법은 국소 예조건화 기법을 기본으로 하고 2.3절에서 설명한 무차원화 방법을 사용한다.

예조건화된 2차원 오일러 지배 방정식은 식 (9)와 같다.

$$\Gamma \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$Q = [p \ u \ v \ T]^T$$

$$F = [\rho u \ \rho u^2 + p \ \rho uv \ \rho uH]$$

$$G = [\rho v \ \rho uv \ \rho v^2 + p \ \rho vH] \quad (10)$$

$Q$ 는 원시 변수 벡터 행렬이고  $F$ 와  $G$ 는 각각  $x$ 와  $y$ 방향의 비점성 수치 유속(flux)을 나타낸다

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Theta & 0 & 0 & -\frac{\rho}{T} \\ \Theta u & \rho & 0 & -\frac{\rho u}{T} \\ \Theta v & 0 & \rho & -\frac{\rho v}{T} \\ \Theta H - 1 & \rho u & \rho v & \rho \left( C_p - \frac{H}{T} \right) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\Theta = \left( \frac{1}{U_r^2} - \frac{1}{c^2} \right) + \frac{1}{RT} \quad (12)$$

$$\Gamma^{-1} A M = \begin{bmatrix} \beta_{\infty} u & \frac{\rho T \beta_{\infty}}{M_r^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ \frac{u M_r^2 (\gamma - 1) (\beta_{\infty} - 1)}{\rho} & T \beta_{\infty} (\gamma - 1) & 0 & u \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \lambda(\Gamma^{-1}AM) &= \{u, u, u' + c', u' - c'\} \\ u' &= u(1 - \alpha) \\ c' &= \sqrt{\alpha^2 u^2 + U_r^2} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{(1 - \beta_{ub} U_r^2)}{2} \quad (15)$$

$$\beta_{ub} = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{\gamma RT}$$

수정된 국소 예조건화 시스템 행렬( $\Gamma^{-1}AM$ )의 기본 구조는 국소 예조건화 시스템 행렬과 동일하지만 무차원화 후 매개 변수  $\theta$  항이 기준 마하수 제곱( $M_r^2$ )항을 포함하는 점이 다르다. 여기서  $M_r^2$  항은 국소 예조건화 행렬의  $1/\gamma$  항을 대신한다. 또한, 고유치의 형태가 국소 예조건화 기법과 유사하므로 저속에서 고유치의 거동도 그와 동일하다. 따라서 수정된 국소 예조건화 기법은 국소 예조건화 기법과 유사한 수치 해를 가진다.

#### IV. 수치 해석 기법

##### 4.1 공간 이산화 기법

격자 중심의 유한 체적법을 사용하여 예조건화된 지배 방정식을 공간 이산화 한다.  $F_{i+1/2}$ 는 각각의 격자 경계면에서 계산된 수치 유속을 의미하고 식 (16)과 같다.

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} (F_R + F_L) - \frac{1}{2} \Gamma |A_r| \Delta Q \quad (16)$$

$$A_r = \Gamma^{-1}AM, |A_r| = X |A_r| X^{-1} \quad (17)$$

$$A_r = \text{diagonal}(u, u, u' + c', u' - c') \quad (18)$$

일반적으로 비점성 유동이나 점성 항의 영향이 적은 경우 저속 유동장에서도 적절한 상류 차분법이 필요하다. 예조건화된 지배 방정식의 고유치계는 예조건화 행렬에 의해 보정되므로 Roe의 FDS를 적용할 때 인공 점성 항에 이 효과를 반영해야 저속에서 해의 정확도를 보장할 수 있다 [3].

단순한 상류 차분법만 적용하는 경우 수치 기법의 공간 정확도는 1차가 되고, 보다 정확한 해를 얻기 위해서 3차 정확도의 MUSCL(Monotone Upstream-centered for Conservation Laws)기법을 적용한다. MUSCL기법을 적용할 때 유동 변수로서 비보존 변수들을 보정한 후 보존 변수들을 계산하였다[9].

##### 4.2 시간 전진 기법

본 연구에서 사용한 시간 전진 기법은 다중 격자 기법이 적용된 DADI(Diagonalized Alternate Directional Implicit)기법이다[16,17].

$$\begin{aligned} X_{Rk} [I + \Delta t \{ \nabla^- A_{Rk}^+ + \nabla^+ A_{Rk}^- \}] X_{Rk}^{-1} \cdot \\ X_{Rn} [I + \Delta t \{ \nabla^+ A_{Rn}^- + \nabla^- A_{Rn}^+ \}] X_{Rn}^{-1} \cdot \end{aligned} \quad (19)$$

$$\Delta Q = -\Delta t \Gamma^{-1}R$$

식 (19)는 DADI기법의 최종식이고  $\nabla^\pm$ 는 각각 전 후방 차분을 의미하며  $X_r$ 와  $A_r$ 는 예조건화된 시스템 행렬  $A_r$ 의 고유치 벡터행렬(eigenvector), 고유치(eigenvalue) 행렬을 표기한다[8,18].

정상 상태 해를 구할 때 각 계산 격자마다 다른 시간 간격을 적용해 최대의 시간 간격을 사용하도록 하는 국소 시간 간격(local time stepping)을 적용했고 이 때 속도와 음속은 예조건화 기법에 의해 보정된 수치를 사용해야 한다[9].

#### V. 점근 해석

##### 5.1 해석 과정

점근 해석(asymptotic analysis)은 복잡한 문제의 간단한 해석적 형태의 근사 해를 얻기 위해 응용 수학 뿐만 아니라 수치 해석 분야에서도 유용하게 사용되는 수학적 도구이다. 본 연구에서는 참고문헌 [7]을 토대로 다음과 같은 절차로 해석하였다.

- 1) 지배 방정식의 준이산화(semi-discretization)
- 2) 무차원화
- 3) 모든 변수들을 마하수의 수열로 정리하여 대입

$$(*) = (*)_0 + M_r (*)_1 + M_r^2 (*)_2 + \dots$$

- 4) 마하수의 차수(order)에 맞게 각 항들을 정리

##### 5.2 압력 보정

Guillard와 Viozat[7]의 점근 해석에 의하면 보존 형태의 지배 방정식에서 동압의 크기가  $O(M_r^2)$ 으로 해석되지만 예조건화 되지 않은 Roe의 FDS에서는 동압이  $O(M_r)$ 로 해석된다. 여기서 예조건화 기법에 의해 보정된 지배 방정식은 압력 항이  $O(M_r^2)$ 의 동압을 포함하게 되고 따라서 저속에서 수치 해의 정확도를 보장한다고 설명하였다. 보존형 지배 방정식을  $O(1)$ 인 항들로만 구성된 방정식으로 정리하면 식 (20)에

서 식 (22)와 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_0 + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{u}_0) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \vec{u}_0) + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{u}_0 \vec{u}_0) + \nabla p_2 = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 E_0) + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{u}_0 H_0) = 0 \quad (22)$$

$$p(x, t) = P_0(t) + M_r^2 p_2(x, t) \quad (23)$$

식 (23)에서  $P_0$ 가 상수로 열역학적 압력이라 한다면  $p_2$ 는 유체 동역학적(hydrodynamic) 압력으로 마하수 제곱의 크기를 가진다[7,12,13]. 기본적인 개념은 같으나 수치 기법에 적용할 때 참고문헌 [2]와 [4]에서는 마무리 오차(round-off error) 제어를 목적으로 계기 압력(gauge pressure)을 사용한다.

$$p' = \bar{p} - \bar{p}_r, \bar{p} = \frac{p}{\rho_r u_r^2} = \frac{1}{M_r^2} \frac{p}{p_r}, \bar{p}_r = \frac{1}{\gamma M_r^2} \quad (24)$$

$$p' = \frac{p - p_r}{\rho_r u_r^2} = \frac{C_p}{2} \quad (25)$$

식 (21)에서 살펴 볼 수 있듯이 운동 방정식에서 압력 항의 보정은 수렴 가속의 중요한 역할을 한다. 특히, 식 (4)와 식 (7)과 같은 방법으로 압력 항을 무차원화하면 식 (24)와 식 (25)의  $p'$ 에서 압력 계수를 유도할 수 있고 이로 인해 마하수에 무관한 수렴 특성을 가진다고 할 수 있다 [1, 19].

### 5.3 인공 점성 항에 대한 해석

6장의 비점성 bump 유동의 수치 계산 결과를 살펴보면 Weiss와 Smith의 국소 예조건화 기법과 수정된 국소 예조건화 기법의 경우 마하수가  $10^{-7}$ 인 경우를 제외하고 유동 변수들의 수치해가 잘 해상되는 반면, 전역 예조건화 기법의 결과에서는 밀도의 해상에 문제가 있음을 볼 수 있다. 저속 영역( $M \leq 0.1$ )에서 그 특징이 나타나는데 비보존 변수 중의 하나인 밀도의 정확도가 떨어지므로 온도의 정확도에서 문제가 있다.

본 연구에서는 대략적인 점근 해석을 통해 원인을 규명하였다.

#### 5.3.1 각 예조건화 기법의 인공 점성 항

국소 예조건화 기법과 전역 예조건화 기법을 준이산화하기 전에 시간 항에 곱해지는 예조건화 행렬의 역할이 수렴성 향상과 고유치의 보정이라

고 한다면, 수치 유속에서 인공 점성 항은 해의 정확성에 영향을 주게 되므로[10] 두 종류의 예조건화 기법의 인공 점성 항만을 참고문헌 [3]에서 소개된 수식으로 정리하였다. 단, 수정된 국소 예조건화 기법의 인공 점성 항은 국소 예조건화 기법과 거의 같으므로 국소 예조건화 기법으로 비교를 대신한다.

$$\Gamma |A_r| \Delta Q = |U| \begin{bmatrix} \Delta(\rho) \\ \Delta(\rho u) \\ \Delta(\rho v) \\ \Delta(\rho E) \end{bmatrix} + \delta u \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho H \end{bmatrix} + \delta p \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\delta u = M^* \Delta U + [c^* - (1 - 2\alpha)|u| - \alpha M^*] \frac{\Delta p}{\rho U_r^2} \quad (27)$$

$$\delta p = M^* \Delta p + [c^* - |u| + \alpha M^*] \rho \Delta U \quad (28)$$

$$c^* = \frac{|u' + c'| + |u' - c'|}{2}, M^* = \frac{|u' + c'| - |u' - c'|}{2c'} \quad (29)$$

먼저 국소 예조건화 기법의 인공 점성 항은 식 (26)과 같고 y방향도 같은 방식으로 적용할 수 있다.

$$M_r^{-1} |r_{\rho}| \Delta q = |U| \begin{bmatrix} \Delta(\rho) \\ \Delta(\rho u) \\ \Delta(\rho v) \\ \Delta(\rho E \phi) \end{bmatrix} + \delta u \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \phi \end{bmatrix} + \delta p \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\delta u = -M^* \Delta U + [c^* - |u| - \alpha M^*] \frac{2\alpha u \Delta U}{c^2 \beta_r} + [c^* - |u| - \alpha M^*] \frac{\Delta p}{\rho c^2 \beta_r} \quad (31)$$

$$\delta p = -M^* \Delta p + [c^* - |u| - \alpha M^*] \rho \Delta U \quad (32)$$

$$\delta = \left[ -\rho M^* \Delta U + (c^* + \alpha M^*) \frac{\Delta p}{c^2 \beta_r} \right] M_r^2 c^2 \quad (33)$$

$$c' = \frac{|u' - c'| + |u' + c'|}{2}, M^* = \frac{|u' - c'| - |u' + c'|}{2c'} \quad (34)$$

식 (30)은 전역 예조건화 기법의 인공 점성 항을 나타내는데 식 (26)과 비교했을 때  $\delta u$ 와 에너지 방정식의 인공 점성 항에서 차이가 난다.

#### 5.3.2 에너지 방정식에 대한 고찰

점근 해석 과정의 두 번째 절차 후 에너지 방정식을 정리하면 식 (35)와 식 (37)과 같다. 연속 방정식과 운동 방정식에서는 국소 예조건화 기법과 전역 예조건화 기법 간의 특징적인 차이나 문제점을 발견하지 못하여 본문에서는 생략하기로 한다.

식 (35)는 국소 예조건화 기법에서 준 이산화 후 마하수의 차수에 따라 정리한 에너지 방정식이다. 전역 예조건화 기법의 경우 식 (37)과 같다.

$$\begin{aligned} & \delta \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum (\rho E + p) U \\ & - \frac{1}{2} \sum \left[ \frac{H \Delta p}{U_r^2} \left( \frac{\sqrt{Y}}{2} - \frac{U^2}{2\sqrt{Y}} \right) + \frac{U^2 \Delta p}{\sqrt{Y}} \right. \\ & \quad \left. + \rho U \Delta U \left( \frac{\sqrt{Y}}{2} - |U| + \frac{U^2}{2\sqrt{Y}} \right) \right] \quad (35) \\ & - \frac{M_r^2}{2} \sum \left\{ \frac{B \rho H U \Delta U}{\sqrt{Y}} - \frac{H |U| B \Delta p}{U_r^2} + \frac{B U^2 \Delta p}{\sqrt{Y}} \right\} \\ & - \frac{M_r^4}{2} \sum \left\{ \frac{H B^2 U^2 \Delta p}{2 U_r^2 \sqrt{Y}} - \frac{\rho B^2 U^3 \Delta U}{2 \sqrt{Y}} \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$B = \beta_{wa} U_r^2, \quad Y = \frac{X}{u_r^2} = (1 - B)^2 U^2 + 4 U^2 \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \delta \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum (\rho U E) \\ & - \frac{1}{2} \sum \left\{ \frac{c^2 \rho U \Delta U}{\sqrt{Y}} + \frac{\Delta p}{\beta_{br}} \left( \frac{\sqrt{Y}}{2} - \frac{U^2}{2\sqrt{Y}} \right) \right\} \quad (37) \\ & - \frac{M_r^2}{2} \sum (\gamma - 1) \left[ \begin{aligned} & - \rho U + |U| \Delta (\rho \phi) + \frac{\rho \phi U \Delta U + U^2 \Delta p}{\sqrt{Y}} \\ & + \left( \frac{\rho \phi U \Delta U + \phi \Delta p}{\beta_{br} c^2} + \rho U \Delta U \right) \cdot \\ & \quad \left( \frac{\sqrt{Y}}{2} - |U| + \frac{U^2}{2\sqrt{Y}} \right) \\ & \quad + \frac{\rho c^2 \beta_{br} U \Delta U}{\sqrt{Y}} \end{aligned} \right] \\ & - \frac{M_r^4}{2} \sum (\gamma - 1) \left[ \begin{aligned} & \frac{\rho \phi \beta_{br} U \Delta U + U^2 \beta_{br} \Delta p}{\sqrt{Y}} \\ & - \frac{\rho \phi U \Delta U}{\beta_{br} c^2} \left( \frac{\sqrt{Y}}{2} - |U| + \frac{U^2}{2\sqrt{Y}} \right) \\ & \quad + \frac{\beta_{br} U^2 \Delta p}{2 \sqrt{Y}} \end{aligned} \right] \\ & + \frac{M_r^6}{2} \sum (\gamma - 1) \left\{ \frac{\beta_{br}^2 U^2}{2 \sqrt{Y}} \left( \frac{\rho \phi U \Delta U}{\beta_{br} c^2} + \frac{\phi \Delta p}{\beta_{br} c^2} \right) + \frac{\rho U^3 \beta_{br}^2 \Delta U}{2 \sqrt{Y}} \right\} \\ & - \frac{M_r^8}{2} \sum (\gamma - 1) \left\{ \frac{\rho \phi \Delta U}{c^2} \frac{\beta_{br}^2 U^3}{2 \sqrt{Y}} \right\} = 0 \\ & Y = \frac{X}{u_r^2} = (1 - \beta_{br})^2 U^2 + 4 \beta_{br} c^2 \quad (38) \end{aligned}$$

마하수가 작아지면  $O(1)$ 인 항들의 영향이 상대적으로 커지게 되는데 식 (35)와 식 (37)을 비교해 보면 국소 예조건화 기법의 총엔탈피와 총에너지의 인공 점성 항이 마하수가 0에 근접하더라도  $O(1)$ 을 유지하는 반면, 전역 예조건화 기법의 경우 총엔탈피와 총에너지의 일부만이  $O(1)$ 을 유지하고 있다.

편의상 전역 예조건화 기법에서 에너지 방정식의 인공 점성 항들을 따로 정리하면 식 (39)와 같다.

$$U \Delta (\rho E_c \phi) + \delta u (\rho E_c \phi) + \delta p (E_c U) + \delta \quad (39)$$

식 (39)에서  $E_c = (\gamma - 1) M_r^2$  이므로 마하수가 작아질수록  $O(1)$ 을 유지하는 항은  $\delta$  인데 식 (39)에서 첫 번째와 두 번째 항이 총에너지와 총엔탈피의 일부이므로 국소 예조건화 기법의 인공 점성 항과 같이 총에너지와 총엔탈피로 다시 정리하면 식 (40)의  $\delta''$  항이 부족함을 알 수 있다.

$$|U| \Delta (\rho E) + \delta u (\rho H) + \delta p (E_c U) - \delta'' \quad (40)$$

식 (40)의  $\delta''$  항을 해석절차에 따라 정리하면 결과적으로 식 (41)과 같다.

$$\begin{aligned} \delta'' &= \frac{\rho \Delta U}{\beta_{br}} \left\{ U \left( \frac{\sqrt{Y}}{2} - |U| + \frac{U^2}{2\sqrt{Y}} \right) + \frac{U^2 \Delta p}{\beta_{br} \sqrt{Y}} \right\} \\ & - M_r^2 \left\{ \rho U \Delta U \left( \frac{\sqrt{Y}}{2} - |U| + \frac{U^2}{2\sqrt{Y}} \right) \right\} \\ & + M_r^4 \left\{ \frac{\rho U^2 \Delta U}{2 \sqrt{Y}} - \frac{\beta_{br}^2 U^2 \Delta p}{\sqrt{Y}} \right\} \\ & - M_r^6 \left\{ \frac{\rho \beta_{br}^2 U \Delta U}{2 \sqrt{Y}} \right\} \quad (41) \end{aligned}$$

식 (40)에서 전역 예조건화 기법의 총에너지와 총엔탈피는 무차원화된 에너지 방정식에서 전체적인 크기는  $O(1)$ 을 가지나 내부적으로 식(6)에서처럼 마하수 제곱의 크기를 가진다. 따라서 마하수가 작아질수록 반영되어야 하는 항이 필요함을 확인할 수 있다. 그러므로 전역 예조건화 기법이 저속에서 밀도를 해상하지 못하는 것은 에너지 항의 수치 점성이 충분하지 않기 때문이라는 결론을 얻을 수 있다. 예조건화된 방정식의 인공 점성 항이 예조건화 행렬에 영향을 받기 때문에 이를 해결하기 위해서는 예조건화 행렬의 수정이 필요하다. 본 연구는 수렴성 증진에 중점을 두고 있으므로 예조건화 행렬의 수정이 필요한 밀도 항의 정확성 문제의 해결은 남겨두기로 한다.

## VI. 수치 계산

### 6.1 계산 조건

본 연구에서는 10% 원호를 가진 2차원 비점성 bump 유동에 대해 수치 해석을 했다. 격자는  $65 \times 17$ 개의 격자점으로 이루어진 정렬 격자이고 bump가 있는 바닥 면과 bump 전후로 밀집시켰다. 참고문헌 [20]에서 소개된 특성(characteristic) 경계 조건과 같은 결과를 가지는 입, 출구 경계 조건을 사용하였다[8]. 또한, 수렴가속을 위해 4 level 다중 격자 기법을 적용하였다. CFL 수는 5

로 고정하고, 마하수  $10^{-1}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-7}$  각각에 대해 single CPU에서 계산 하였다.. 단, 유동해의 등선은 마하수  $10^{-5}$ 까지 유사하므로 마하수  $10^{-1}$ 과  $10^{-3}$ 의 경우는 생략하였다.

## 6.2 결과 및 검토

### 6.2.1 국소 예조건화 기법과 전역 예조건화 기법

Fig. 1에서 Fig. 5까지는 국소 예조건화 기법과 전역 예조건화 기법의 유동 변수들의 수치 해와 수렴 곡선이다.

마하수가  $10^{-5}$ 까지는 Fig. 1과 Fig. 6의 (a)에서 볼 수 있듯이 각 유동 변수의 등선들이 잘 해

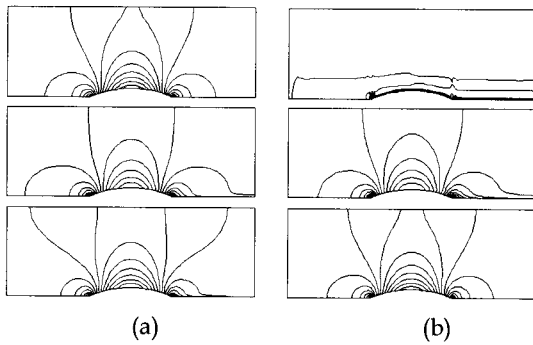


Fig. 1. Primitive variable isolines at  $M=10^{-5}$

- (a) Local preconditioner(left) :  $\rho$ (top),  $u$ (middle),  $T$ (bottom)
- (b) Global preconditioner(right) :  $\rho$ (top),  $u$ (middle),  $p$ (bottom)

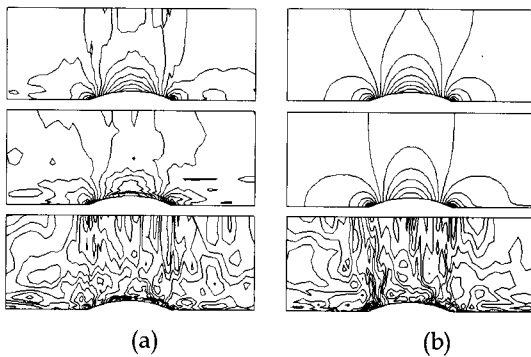


Fig. 2. Primitive variable isolines of the local preconditioner at  $M=10^{-7}$

- (a) without pressure correction(left)
- (b) with pressure correction(right) :  $\rho$ (top),  $u$ (middle),  $T$ (bottom)

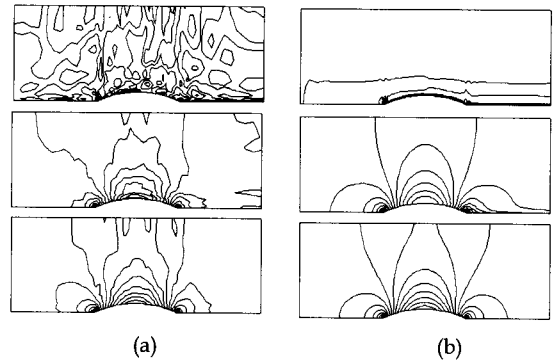
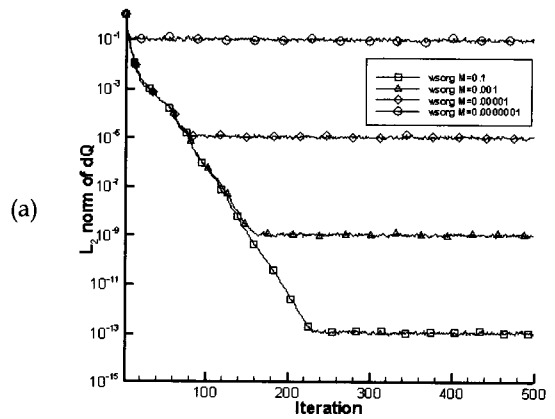
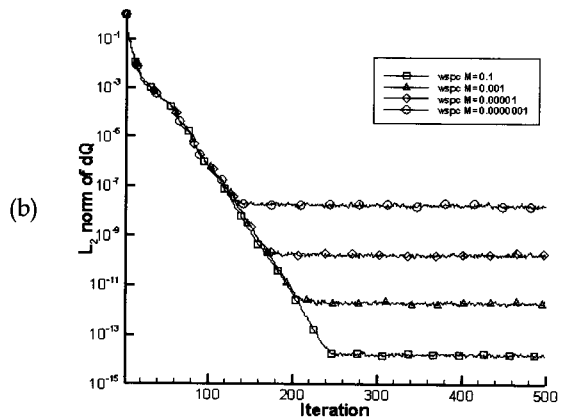


Fig. 3. Primitive variable isolines of the global preconditioner at  $M=10^{-7}$

- (a) without pressure correction(left)
- (b) with pressure correction(right) :  $\rho$ (top),  $u$ (middle),  $p$ (bottom)



(a)



(b)

Fig. 4. Convergence histories of the local preconditioner at each Mach number  
(a) without pressure correction  
(b) with pressure correction

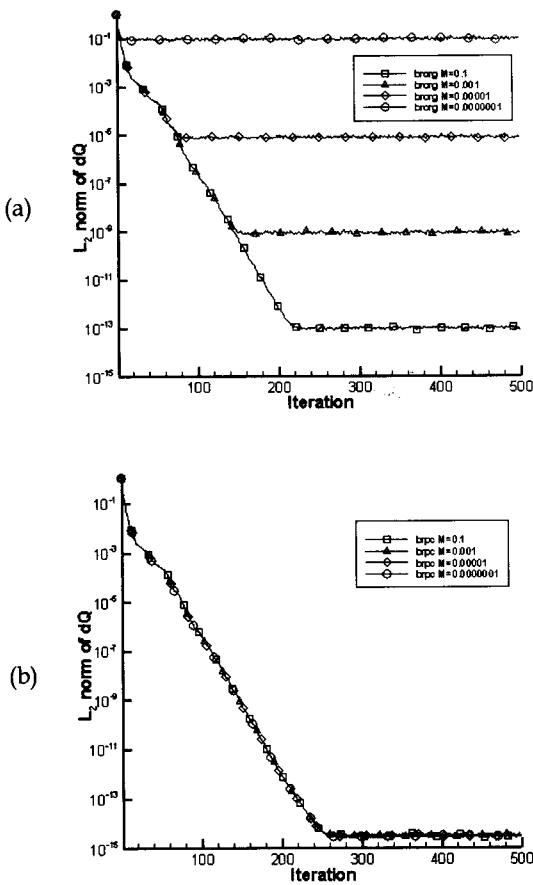


Fig. 5. Convergence histories of the global preconditioner at each Mach number  
(a) without pressure correction  
(b) with pressure correction

상된다. 단, 전역 예조건화 기법의 등밀도 선도가 등속선, 등압선과는 다르게, bump 부근에서 등선이 평행하게 나타나는 것은 5.3절에서 언급했듯이 에너지 방정식의 수치 점성이 충분하지 않기 때문으로 추론된다. Fig. 2와 Fig. 3은 마하수  $10^{-7}$ 일 때 국소 예조건화 기법과 전역 예조건화 기법의 운동 방정식에서 압력 보정 전후 등선의 변화인데 압력과 온도 항이 물리적인 유효 숫자 범위 안에서 최소 마하수까지 등선을 유지하는 반면, 온도는 마하수  $10^{-7}$ 이하에서 파편화되기 시작한다. 참고문헌 [11]에 따르면 에너지 방정식의 감지 엔탈피와 운동 에너지 부분이 더해지는 과정에서 두 항의 크기 차이로 인한 유효 숫자 손실이 원인이라 보고, 일반적으로 압력이나 속도 항만으로 상대적 변수로 표현하는데 반해 압력, 엔탈피, 대류 항까지 상대적 변수로 표현하고

확장 2배 정확도(long double precision)를 사용하여 마하수  $10^{-7}$ 에서  $10^{-9}$  사이의 영역에서 수치 해석한 결과를 논하였다. Fig. 4와 Fig. 5는 압력 보정 전후의 국소 예조건화 기법과 전역 예조건화 기법의 수렴 곡선을 보여준다. 2차원 비점성 bump 유동의 경우, 압력 보정 전의 국소 예조건화 기법과 전역 예조건화 기법의 수렴 곡선이 마하수에 따라 계단화되는 것을 확인할 수 있다. 압력 보정 후에는 전역 예조건화 기법의 수렴 특성이 마하수에 관계없이 하나의 수렴 곡선을 따라 가는 반면, 국소 예조건화 기법은 압력 보정 전보다 전체적인  $l_2$  norm은 줄어들었으나 여전히 계단화 현상이 남아있다. 단, 여기서  $l_2$  norm dQ는 섭동(perturbed) 형태의 원시 변수 전체에 대한  $l_2$  norm을 의미한다.

### 6.2.2 수정된 국소 예조건화 기법

Fig. 6에서 Fig. 8까지는 수정된 국소 예조건화 기법의 결과인데 Fig. 6의 (a)에서 알 수 있듯이 유동의 수치 해의 등선도는 국소 예조건화 기법의 결과와 거의 같다. Fig. 7의 수렴 곡선을 살펴보면 전역 예조건화 기법과 유사한데 이러한 마하수에 무관한 수렴 특성은 앞서 설명했듯이 압력 항의 무차원화 변수와 운동 방정식에서의 압력 항의 보정이 큰 역할을 한다. Fig. 6 (b)에서 등온선의 파편화 원인을 찾기 위해 Fig. 8과 같이 각 유동 변수들의 수렴성을 검산한 결과 압력과 속도의  $l_2$  norm이  $10^{-15}$  부근까지 수렴하는 반면, 온도는 압력 보정 전의 전체 수렴 곡선과 같이 계단화되어 마하수  $10^{-7}$ 에서는 수렴하지 않는다[11].

본문에서는 생략했지만 압력 계수 선도는 세

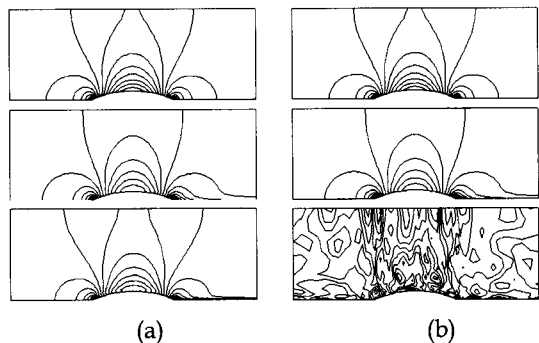


Fig. 6. Primitive variable isolines of the modified local preconditioner  
(a)  $M=10^{-5}$ (left), (b)  $M=10^{-7}$ (right) : p(top), u(middle), T(bottom)



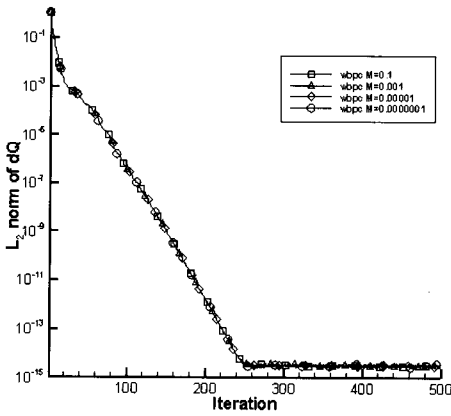


Fig. 7. Convergence histories of the modified local preconditioner at each Mach number with pressure correction

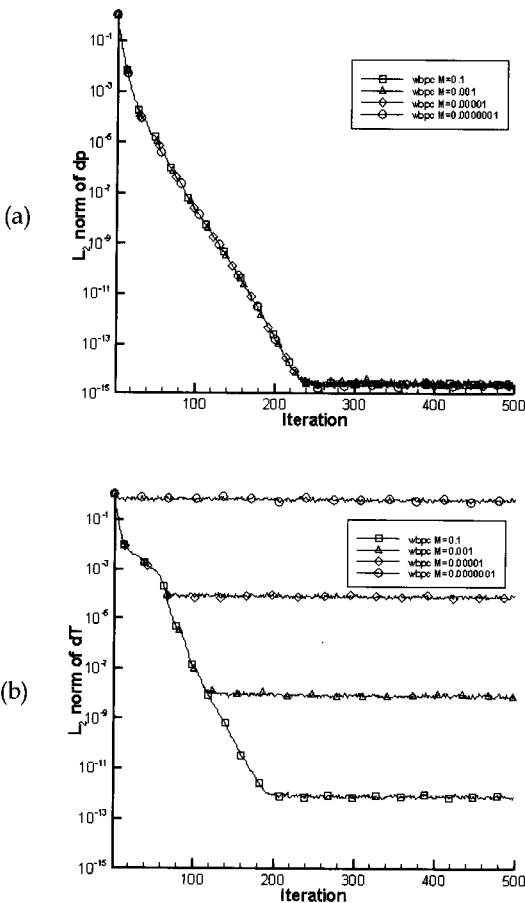


Fig. 8. Convergence histories of the modified local preconditioner at each Mach number according to each primitive variable (a) p, (b) T

종류의 예조건화 기법 모두 마하수가  $10^{-7}$ 인 경우를 제외하고 비점성 bump 유동과 같은 간단한 유동장에서 거의 동일하게 나타난다. 마하수  $10^{-7}$ 에서의 압력 계수 선도는 Fig. 6의 (b)처럼 등압선이 잘 해상됨에도 불구하고 약간의 수치 불안정이 발생하는데 압력 계수의 정의에 따라 계기 압력보다는 압력 항 자체를 사용하기 때문에 나타나는 유효 숫자 손실의 효과로 보인다.

### VII. 결 론

지금까지 Weiss와 Smith의 국소 예조건화 기법과 Briley의 전역 예조건화 기법을 살펴보고, 전자를 기본으로 후자의 무차원화 방법을 이용한 두 종류의 예조건화 기법의 특징을 포함하는 수정된 국소 예조건화 기법을 구성하여 비점성 bump 유동에서 결과를 평가하였다. 본 연구에서 고안한 수정된 국소 예조건화 기법은 국소 예조건화 기법의 유동해의 등선도 특징과 전역 예조건화 기법의 마하수에 무관한 수렴 특성을 동시에 가지고 있다. 저 마하수 접근 해석에 의하면 운동 방정식에서 압력항의 보정이 필요한데, 압력 보정 후의 계기 압력이 압력 계수 형태를 가지고 있어서 마하수에 무관한 수렴 특성에 기여한다고 할 수 있다. 또한, 저속 유동에서 전역예조건화 기법의 등밀도 선도가 평행하게 나타나는 것은 에너지 방정식에서 총에너지와 총엔탈피의 인공 점성이 부족하기 때문으로 추론하였다. 마지막으로, 마하수가  $10^{-7}$ 이하에서는 온도항의  $L_2$  norm이 더 이상 수렴하지 않는데 에너지 방정식에서 총엔탈피, 총에너지의 상대적 표현과 유효 숫자 손실에 대한 연구가 필요하다. 본 연구는 비점성 bump 유동에만 한정되어 있으나 점성 유동에서의 수렴 특성에 대한 연구는 차후에 이루어 질 것이다.

### 참고문헌

- 1) Reed, Christopher L. and Anderson, Dale A., "Application of Low Speed Preconditioning to the Compressible Navier-Stokes Equations", *AIAA conference*, 1997.
- 2) Choi, Y.-H. and Merkle, C. L., "The Application of Preconditioning in Viscous Flows", *Journal of Computational Physics*, Vol. 105, No. 1, 1993, pp.207~223.
- 3) Weiss, J. M. and Smith, W. A.,

"Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows", *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 11, 1995, pp. 2050~2057.

4) Turkel, E., "Review of Preconditioning Methods for Fluid Dynamics", *NASA Contractor Report 189712*, Sept. 2002.

5) Briley, W. R., Taylor, L. K., and Whitfield, D. L., "High-Resolution Viscous Flow Simulations at Arbitrary Mach Number", *Journal of Computational Physics*, Vol. 184, 2003, pp. 79~105.

6) Yildirim, B. and Cinnella, P., "On the Validation of a Global Preconditioner for the Euler Equations", *AIAA paper 2004-740*, Jan. 2004.

7) Guillard, H. and Viozat, C., "On the Behaviour of Upwind Schemes in the Low Mach Number Limit", *Computers & Fluids*, Vol. 28, No. 1, 1999, pp. 63~86.

8) Park, S. H. and Kwon, J. H., "A Preconditioned HLLC Method for Flows at All Mach Numbers", *AIAA paper 2004-2709*, Jan. 2004.

9) 성춘호, 권장혁, 최윤호, 이승수, "저마하수 예조건화 기법을 위한 다중격자 DADI 기법", 한국전산유체공학회 추계학술대회논문집, 10월 2001, pp. 20~30.

10) Turkel, E., "Preconditioning Techniques in Computational Fluid Dynamics", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 31, 1999, pp. 385~416.

11) 이상현, "저속 압축성 유동장 해석을 위한 예조건화 방법론 연구 II - 온도장 계산 성능 개선", 한국항공우주학회지, 제29권, 제8호, 2001, pp. 26~36.

12) Klein, R., "Semi-Implicit Extension of a Godunov-Type Scheme Based on Low Mach

Number Asymptotics I: One-Dimensional Flow", *Journal of Computational Physics*, Vol. 121, 1995, pp. 213~237.

13) Munz, C.-D., Roller, S., Klein, R., and Geratz, K. J., "The Extension of Incompressible Flow Solvers to the Weakly Compressible Regime", *Computers & Fluids*, Vol. 32, 2003, pp. 173~196.

14) Tannehill, John C., Anderson, Dale A., and Pletcher, Richard H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 2nd ed., Taylor & Francis, 1997.

15) Venkateswaran, S., Li, D., and Merkle, C. L., "Influence of Stagnation Regions on Preconditioned Solutions at Low Speeds", *AIAA paper 2003-0435*, Jan. 2003.

16) Pulliam, T. H. and Chaussee, D. S., "A Diagonal Form of and Implicit Approximate-Factorization Algorithm", *Journal of Computational Physics*, Vol. 39, 1981, pp. 347~363.

17) Ni, R.-H., "A Multiple-Grid Scheme for Solving the Euler Equations", *AIAA Journal*, Vol. 2, No. 11, 1982, pp. 1565~1571.

18) Jespersen, D., Pulliam, T., and Buning, P., "Recent Enhancements to OVERFLOW", *AIAA Paper 97-0644*, Jan. 1997.

19) Briley, W. R., McDonald, H., and Shamroth, S. J., "A Low Mach Number Euler Formulation and Application to Time-Iterative LBI Schemes", *AIAA journal*, Vol. 21, No. 10, Oct. 1983, pp. 1467~1469.

20) Turkel, E., Radespiel, R., and Kroll, N., "Assessment of Preconditioning Methods for Multidimensional Aerodynamics", *Computers & Fluids*, Vol. 25, No. 6, 1997, pp. 613~634.