

論文

국소개선기법을 이용한 삼각격자 균질화

최형일*, 전상욱**, 이동호*, 이도형***

Triangular Grid Homogenization Using Local Improvement Method

Hyung-il Choi*, Sangook Jun**, Dong-ho Lee* and Dohyung Lee***

ABSTRACT

This paper proposes a local improvement method that combines extended topological clean up and optimization-based smoothing for homogenizing triangular grid system. First extended topological clean up procedures are applied to improve the connectivities of grid elements. Then, local optimization-based smoothing is performed for maximizing the distortion metric that measures grid quality. Using the local improvement strategy, we implement the grid homogenizations for two triangular grid examples. It is shown that the suggested algorithm improves the quality of the triangular grids to a great degree in an efficient manner and also can be easily applied to the remeshing algorithm in adaptive mesh refinement technique.

초 록

본 연구에서는 삼각격자 균질화를 위하여, 확장된 위상학적 개선과정과 국소 최적화 기반 평활화를 결합한 국소 개선기법을 제안하였다. 먼저 격자의 연결 구조를 확장된 위상학적 개선과정을 적용하여 최적의 연결구조로 개선한다. 다음으로 격자의 질을 나타내는 비틀림척도를 최대화하기 위해 국소 최적화 기반 평활화를 수행한다. 이 국소 개선기법을 이용하여, 두 가지 격자 예제에 대하여 삼각격자 균질화를 수행하였다. 이 예들을 통하여, 본 연구에서 제안한 국소 개선알고리즘이 삼각격자의 질을 크게 향상시켜주는 경제적이고 효과적인 방법임을 보여준다. 또한, 이 기법은 적용격자 세분화의 격자 재생성과정에도 용이하게 적용될 수 있다.

Key Words : Grid homogenization(격자 균질화), Unstructured grid(비정렬격자), Topological clean up procedures(위상학적 개선과정), Optimization-based smoothing(최적화기반 평활화)

1. 서 론

1980년대 중반 이후, 전산자원의 발달로 인하여 비정렬격자를 이용한 전산유체역학기법이 널리

사용되어 오고 있다. 이에 따라, 효율적이며 양질의 비정렬격자를 생성하는 알고리즘에 대한 연구도 활발히 진행되어 왔다.

먼저 기본적인 삼각격자 생성 알고리즘은 크게 전방전진기법(advancing front method)[1,2], Delaunay 삼각화[3,4], Octree/Quadtree 알고리즘[5] 등이 있다. 전방전진기법은 상당히 양질의 격자를 생성시켜주나, 격자 생성시간이 상대적으로 길다. Delaunay 삼각화는 격자 생성시간이 짧고, 수학적으로 명료하나 격자의 질이 상대적으로 떨어진다. Octree/Quadtree 알고리즘은 내부

† 2005년 1월 24일 접수 ~ 2005년 6월 29일 심사완료

* 정회원, 서울대학교 기계항공공학부

** 정회원, 서울대학교 기계항공공학부 대학원

*** 정회원, 한양대학교 기계공학과

연락처, E-mail : dohyung@hanyang.ac.kr

경기도 안산시 상록구 사 1동 1271

영역에서는 양질의 격자를 생성시켜 주지만, 경계 영역에서 양질의 격자를 얻거나 당겨진 격자(stretched grids)를 구성하기 어렵다. 따라서 각 알고리즘의 단점을 보완하기 위하여 Delaunay 삼각화와 전방전진기법의 장점만을 취한 격자 생성 알고리즘들이 개발되어 왔다[6,7].

이와 더불어 이미 생성된 격자의 질을 향상시키거나, 적응격자 세분화 과정(adaptive mesh refinement procedure)에서 격자의 질 향상을 위한 재생성(remeshing)과정인 국소적 격자의 균질화(grid homogenization)가 필요하다. 따라서 이에 관련된 여러 가지 연구가 이루어지고 있다. 여기에는 크게 평활화(smoothing)[8-11]와 위상학적 개선과정(topological clean up procedures)[12-14]이 있다. 평활화는 아주 적은 연산시간을 필요로 하나 초기 격자의 질이 좋지 않은 경우에 격자의 질 향상에 한계가 있다. 반면, 위상학적 개선과정은 격자의 연결 구조를 가장 이상적인 형태로 근본적으로 바꾸어줌으로써 초기격자의 영향을 최소화할 수 있게 해준다. 따라서 효율적인 위상학적 개선과정과 평활화의 결합을 통하여 격자의 질 향상을 극대화시킬 수 있다.

기존의 연구에서는 유사 라플라스 평활화(Laplacian-like smoothing)와 최적화기반 평활화(optimization-based smoothing)의 결합[9], 또는 위상학적 개선과정과 라플라스 평활화의 사용[13]이 주를 이루었다. 그러나 이는 라플라스 평활화의 단점인 오목한 경계면 부근에서 격자의 질이 오히려 감소될 가능성을 가지고 있다. 한편, 격자의 전 영역을 고려하는 전역 최적화기반 평활화(global optimization-based smoothing)를 사용할 수도 있으나 평활화의 시간이 격자 생성시간의 크기 정도가 되어 비효율적이라 할 수 있다[9]. 따라서 본 연구에서는 기존의 위상학적 개선과정을 확장하여 이상적인 격자의 연결구조인 6-연결 구조를 갖는 격자의 수를 최대화하도록 하였으며, 이와 더불어 국소 최적화기반 평활화(local optimization-based smoothing)를 결합한 방법을 제안하였다. 제안된 방법을 이용하여 두 가지 격자예제에 대해 균질화를 수행하였으며, 격자의 질과 연산시간을 검토하였다. 이를 통하여, 제안된 국소 개선기법이 효율적으로 양질의 격자를 재생성해 줌을 보였다.

II. 격자생성과 국소개선기법

2.1 전 격자생성과정

본 연구에서 적용한 전 격자생성과정을 Fig. 1

에 나타내었다. 먼저 해석하고자 하는 영역의 경계점과 국소적으로 해상도(resolution)를 높일 필요가 있는 영역에 내부점들을 지정한다. 다음으로 거대 삼각형(super triangle)을 이용하여 초기 경계격자를 생성한다. 이를 이용하여 주 격자 생성과정을 수행한다. 본 연구에서는 비교적 최근에 개발되었으며 효율적인 삼각격자 생성법인 국소 재연결 알고리즘(local reconnection based algorithm)[7]을 사용하였다. 다음으로 본 연구에서 제안한 균질화 방법인 확장된 위상학적 개선법과 국소 최적화 기반 평활화기법을 수행하여 격자의 질을 향상시킨다.

2.2 위상학적 개선과정

이상적인 삼각격자는 세 각이 60° 인 정삼각형이므로 이에 따른 내부 격자점의 이상적인 연결구조는 6-연결구조라 할 수 있다. 또한, 경계에서는 경계의 인접한 두 모서리(edge)가 이루는 각에 따라 달라지게 된다. 본 논문에서 i 는 대상이 되는 격자점을 나타내며 j 는 i 주위의 격자점을 나타낸다. 그리고 N_i 혹은 N 는 격자점 i 또는 j 를 공유하는 격자의 개수(degree)를 나타낸다. 먼저 경계영역의 위상학적 개선과정은 크게 두 가지로 나눌 수 있다. Fig. 2(a)는 각도에 따른 격자점 i 에서의 최적의 격자수(연결구조)보다 실제 연결 격자수가 작을 경우로 대각선 교체(diagonal swapping)를 이용하여 연결 구조를 변경한다. Fig. 2(b)와 같이 최적의 연결 격자수보다 실제 연결 격자수가 클 경우 두 연결된 내부점 1, 2를 하나로 병합한다. 내부영역의 개선을 위해서는 3, 4, 5-5, 8, 9, 10, 5-7-5, 7-7-5 연결 구조를 제거하는 확장된 위상학적 개선과정을 적용한다. 예로써 3, 4, 5-5, 8, 5-7-5 연결구조의 제거

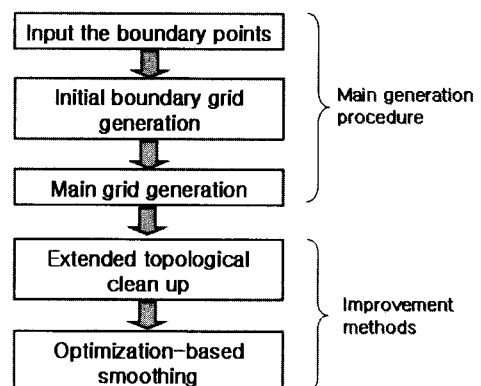


Fig. 1. Overall generation procedure

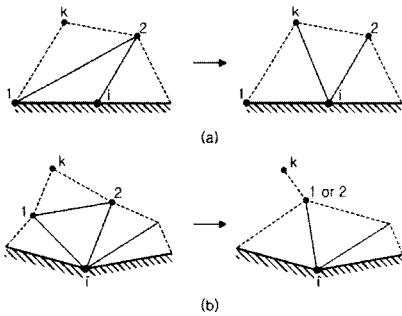


Fig. 2. Examples of boundary clean up

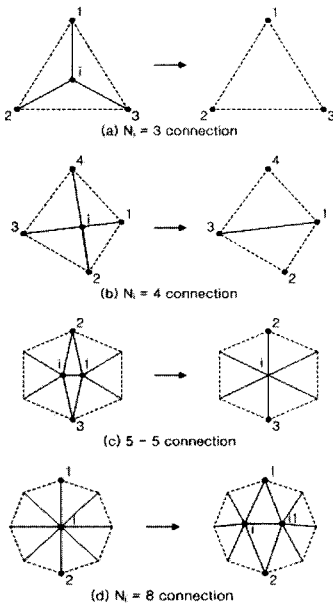


Fig. 3. Examples of previous clean up

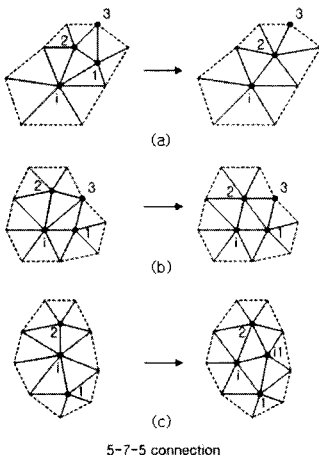


Fig. 4. Examples of extended clean up

를 Fig. 3과 4에 도시하였으며 아래에 기술하였다.

i) $N_i = 3$ 연결구조

Fig. 3(a)와 같이 i 를 격자점 1에 합병한다. 그러면 각 격자점을 공유하고 있는 격자의 개수는 $N_1 = N_1 - 1, N_2 = N_2 - 1, N_3 = N_3 - 1$ 로 변경된다.

ii) $N_i = 4$ 연결구조

Fig. 3(b)에서와 같이 i 를 격자점 1에 합병한다. 여기서 i 의 주변점인 격자점 j 중에서 $N_j = 6$ 인 것을 격자점 1로 선택하거나, $N_j = 7$ 인 j 를 격자점 2로 선택한다. 그러면 각 격자점을 공유하고 있는 격자의 개수는 $N_i = N_i, N_2 = N_2 - 1, N_3 = N_3 - 1, N_4 = N_4 - 1$ 로 변경된다.

iii) 5-5 연결구조

Fig. 3(c)와 같이 5-5 연결 구조를 선택하여 i 를 격자점 1에 합병한다. 그러면 각 격자점을 공유하고 있는 격자의 개수는 $N_i = 6, N_2 = N_2 - 1, N_3 = N_3 - 1$ 로 변경된다.

iv) $N_i = 8$ 연결구조

Fig. 3(d)와 같이 새로운 점 i_1 을 삽입하여 연결 구조를 변경한다. 여기서 i 주위의 격자점 j 중 $N_j = 5$ 인 j 를 찾아 격자점 1로 선정한다. 그러면, 각 격자점을 공유하고 있는 격자의 개수는 $N_i = 6, N_{i1} = 6, N_1 = N_1 + 1, N_2 = N_2 + 1$ 로 변경된다.

v) 5-7-5 연결구조

Fig. 4와 같이 5-7-5 연결 구조를 선택한다. 이러한 경우는 3가지로 나타나는데 Fig. 4-(a)는 5-5인 연결구조로 해결한다. Fig. 4-(b)는 대각선 교체로 연결 구조를 바꾼다. 그러면 각 격자점을 공유하고 있는 격자의 개수는 $N_i = 6, N_{i1} = 6, N_2 = 6, N_3 = N_3 + 1$ 로 변경된다. Fig. 4-(c)는 새로운 점 i_1 을 삽입하여 연결 구조를 변경한다. 그러면 각 격자점을 공유하고 있는 격자의 개수는 $N_i = 6, N_{i1} = 5, N_1 = 6, N_2 = 6$ 으로 변경된다.

이와 같은 방법들을 적용하여 이상적인 연결구조인 6-연결구조 이외의 연결 구조를 제거하는 모든 과정들을 2-3회 수행한다(모든 개선과정에 대한 상세한 내용은 저자의 이전 연구[14]에 기술되어 있다).

2.3 국소 최적화 기반 평활화

상술한 위상학적 개선과정을 이용하여 격자의 연결 구조를 최적화한 후, 국소 최적화 기반 평활화를 적용한다. Fig. 5와 같이 하나의 격자점과 이를 포함하는 삼각형들에 대해서 삼각형들의 질을 최대화할 수 있도록 격자점을 이동시킨다.

본 연구에서는 삼각격자의 질을 나타내는 비틀

림 척도(distortion metric), Q 를 최적화의 목적 함수로 선택하였으며, 다음과 같이 나타낼 수 있다[9].

$$Q(abc) = F \cdot \frac{\|\vec{ca} \times \vec{cb}\|}{\|\vec{ca}\|^2 + \|\vec{ab}\|^2 + \|\vec{bc}\|^2} \quad (1)$$

여기에서, abc 는 삼각형을 나타내며, F 는 정규화인자(normalization factor)로서 Q 의 값은 -1에서 1까지이다. 음의 부호는 뒤집힌 삼각형을 의미하며, 이상적인 정삼각형의 경우 최대값 1을 갖는다. 따라서 한 격자점 주위 삼각형들의 비틀림 척도들을 최대화하도록 격자점을 이동시키는 최적화문제가 된다.

하나의 격자점, x 주위의 삼각형들을 E_1, E_2, \dots, E_n 이라 하고, 이 삼각형들의 비틀림 척도들은 Q_1, Q_2, \dots, Q_n 이라 하자. 양질의 격자를 생성하기 위해서 Q_{min} 을 최대화하면 되므로, 전체 최적화 과정은 다음과 같다.

1. 각 삼각형 요소에서 비틀림 척도의 구배벡터 $\mathbf{g}_i = (g_x^i, g_y^i, g_z^i)$ 를 다음과 같이 결정한다.

* 격자점을 x 좌표 방향으로 미소량 δ 만큼 이동시킨 다음, 주위 삼각형 E_i 들의 비틀림 척도 Q_i^n 을 구한다.

* 구배 벡터의 x 방향성분은 다음과 같다.

$$g_x^i = (Q_i^n - Q_i) / \delta \quad (2)$$

* y, z 방향성분도 이와 유사한 방법으로 구한다.

2. 주위 삼각형 중에서 비틀림 척도(Q_i^n)가 최소인 삼각형을 선택하여 구배 방향을 결정한다 ($\mathbf{g} = \mathbf{g}_m$). 만약 $\mathbf{g} \approx 0$ 이면, 비틀림 척도가 최소값 다음으로 작은 삼각형을 선택하여 구배 방향을 결정한다. 이때, 격자점의 새로운 좌표값을 $\mathbf{x}^n = \mathbf{x} + \gamma \mathbf{g}$ 와 같이 나타낼 수 있고, 스칼라 계수 γ 를 다음과 같이 결정한다.

* 비틀림 척도가 \mathbf{x} 의 함수이므로, 1차항까지 Taylor 급수 전개를 하면 다음과 같다.

$$Q_i(\mathbf{x}^n) = Q_i(\mathbf{x} + \gamma \mathbf{g}) \approx Q_i(\mathbf{x}) + \gamma \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}_i \quad (3)$$

만약 $\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}_i \geq 0$ 이면, Q_i 가 증가한다.

즉, 삼각형의 질이 개선된다. 반면 $\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}_i < 0$

이면, Q_i 가 감소한다. 이 경우에 $Q_{min}^n \geq Q_i^n$

이 되도록 γ 를 제한한다. 즉,

$$\gamma = \min \left\{ \frac{(Q_i - Q_{min})}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}_i)} \right\} \quad (4)$$

이다.

3. γ 를 위와 같이 충분히 큰 값으로 결정하고 나서, 다음과 같이 격자점을 이동시킨다

$$(\mathbf{x}^n = \mathbf{x} + \gamma \mathbf{g}).$$

* 계산한 좌표값 \mathbf{x}^n 을 이용하여 Q_i^n 을 구한다.

* Q_i^n 의 최소값을 구한다.

* 다음을 만족시키면, 격자점을 새로운 위치로 이동시키고 비틀림척도를 새로운 값으로 설정한다.

$$Q_{min}^n \geq Q_{min} + \epsilon \quad (5)$$

여기에서 ϵ 은 작은 값으로 10^{-5} 정도의 크기이다.

* 설정된 γ 가 위 식을 만족시키지 못할 정도로 크면, 1/2로 감소시켜 위 과정을 반복한다.

위 국소 최적화 과정을 모든 내부 격자점들에 관하여 2-3회 반복 수행한다.

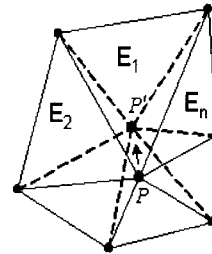


Fig. 5. Node moving in local optimization - based smoothing

III. 격자생성 예제

본 연구에서 제안한 국소 개선기법을 테스트하기 위하여 NACA0012 에어포일과 실린더 주위의 유동장을 해석하기 위한 격자들을 생성하였다. 연산은 Pentium 4 3.00GHz, RAM 2Gbyte의 PC를 사용하였다.

먼저 NACA0012 에어포일 주위에 삼각격자를 생성하였다. 주 격자 생성법으로서 Marcum and Weatherill의 효율적인 삼각격자 생성법인 국소 재연결 알고리즘(local reconnection based algorithm)[7]을 사용하였다. 개선과정을 수행하지 않은 격자는 18286개의 요소가 생성되었으며, 개선과정을 수행하였을 경우 18168개의 요소로

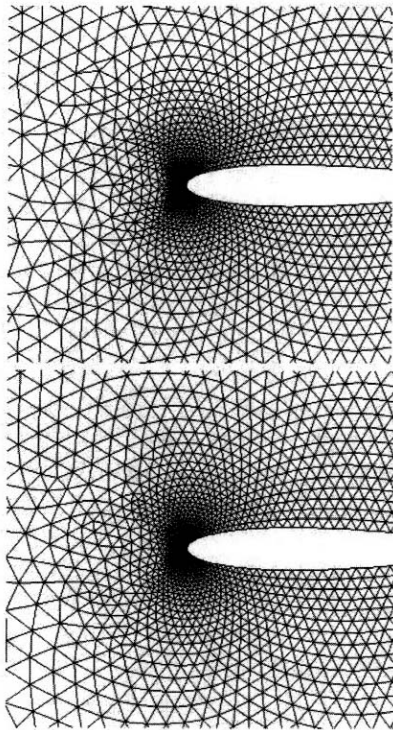


Fig. 6. Triangular grids around a leading edge of NACA0012 airfoil (upper : without improvement, lower : with improvement)

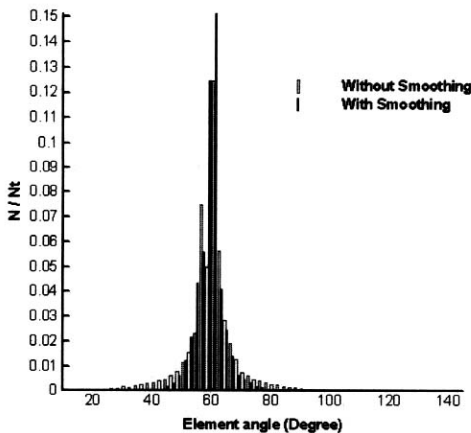


Fig. 7. Comparison of the angle distributions between non-improved and improved grids

요소수가 미세하게 감소하였다. 여기에서 사용한 주 격자 생성법은 자체적으로 상당히 양질의 격자를 생성해주는 알고리즘으로서 Fig. 6에서 보

이는 바와 같이 에어포일 위와 아래면 에서는 국소개선기법을 사용하지 않더라도 양질의 격자가 생성됨을 알 수 있다. 그러나 급격하게 경계가 변하는 앞전(leading edge) 주변에서는 국소개선기법을 사용하였을 경우 격자의 질이 상당히 향상되었음을 볼 수 있다. 전체 격자들의 각도 분포(Fig. 7)를 비교해 보면, 개선기법을 적용한 후의 격자의 각도분포의 폭이 60°를 기준으로 더 모여 있음을 보여준다. 개선 이전의 최대각은 139.3°, 최소각은 14.6°, 60°에 대한 표준 편차는 9.0이다. 반면 개선 이후의 최대각은 91.6°, 최소각은 37.1°, 60°에 대한 표준 편차는 4.6이다. 한편, 본 국소 개선기법의 효율성을 검토하기 위하여 연산시간을 비교하였다. Fig. 8에 보이는 바와 같이 국소 개선기법이 전체 격자 생성시간의 약 7.3%를 차지하므로 경제적인 후처리 기법임을 알 수 있다.

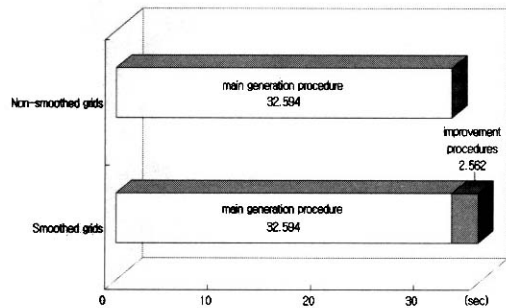


Fig. 8. Comparison of the generation times between non-improved and improved grids

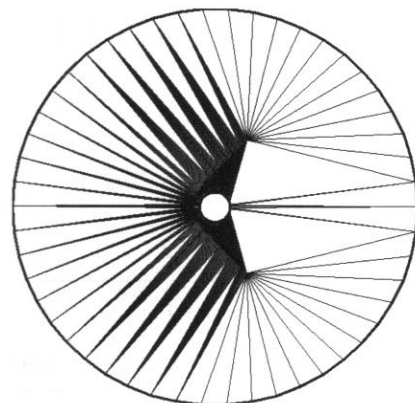


Fig. 9. Initial boundary grid generation for supersonic flow simulation around a cylinder

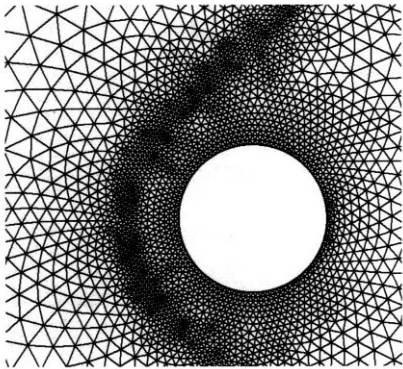


Fig. 10. Unstructured grids without local improvement method

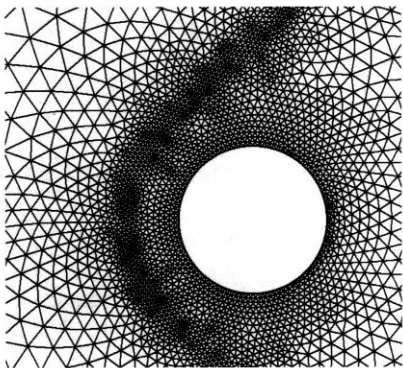


Fig. 11. Unstructured grids using local improvement method

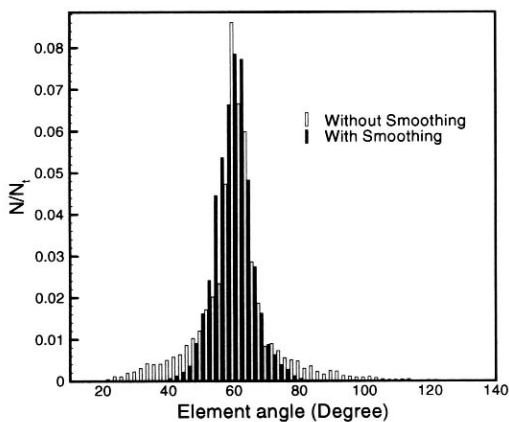


Fig. 12. Comparison of the angle distributions between non-improved and improved grids

다음으로 실린더 주위의 격자를 생성하였다. 실린더 주위의 초음속 유동장을 정확히 해석하기

위해서 떨어진 충격파(detached shock)가 발생하는 부위를 국소세분화(local refinement)하는 것이 필요하다. 본 연구에서는 격자생성에 주안점이 있으므로 편의상 Fig. 9와 같이 경계점과 세분화가 필요한 부위에 내부점을 미리 설정한 후 초기 경계 격자를 생성하였다. 그리고 주 격자 생성법은 위 예제와 동일한 Marcum and Weatherill의 알고리즘을 사용하였으며, 실린더 주위의 격자를 Fig. 10에 나타내었다. Fig. 11은 본 연구에서 제안한 국소 개선과정을 사용한 후의 격자이며, 위의 두 격자를 비교해 보면 격자의 질이 상당히 향상됨을 볼 수 있다. 요소의 개수는 개선과정을 수행하지 않은 격자의 경우 11290이며, 개선과정을 수행한 이후에는 10598개로 약 6%정도 감소하였다. 전체 격자들의 각도 분포(Fig. 12)를 비교해 보면, 개선과정 이후의 격자의 각도분포의 폭이 60°를 기준으로 더 모여 있음을 보여준다. 개선 이전의 최대각은 132.9°, 최소각은 17.7°, 60°에 대한 표준 편차는 12.2이다. 반면 개선 이후의 최대각은 91.0°, 최소각은 36.7°, 60°에 대한 표준 편차는 5.5이다. 이상의 결과를 볼 때, 본 연구에서 제안한 방법이 국부적으로 세밀화된 격자(locally refined grids)에서 양질의 격자를 재생성 시켜 줌을 알 수 있다.

IV. 결 론

본 연구에서는 6-연결 구조를 갖는 격자점 수를 최대화하는 확장된 위상학적 개선과정과 국소 최적화 기반 평활화를 결합한 효율적인 국소 개선기법을 제안하였다. 제안한 방법을 이용하여 NACA0012 에어포일과 실린더 주위 유동의 해석을 위한 격자 생성 및 균질화를 수행하였다. 이를 통하여 전 격자의 평활도(smoothness)가 향상됨을 볼 수 있었다. 또한, 삼각격자의 이상적인 각도인 60°에 대한 표준편차를 50% 가량 감소시킴으로써 전체적인 질(quality) 향상을 가져옴을 볼 수 있었다. 개선과정에 소요되는 연산시간은 전 연산시간의 8% 이내로 본 개선기법이 경제적인 방법임을 알 수 있다.

제안된 국소개선기법은 자동 세분화(automatic mesh refinement)의 재생성(remeshing)과정에도 효율적으로 사용될 수 있다.

후 기

이 논문은 2004년도 서울대학교 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

- 1) Lo, S. H., "A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 21, 1985, pp. 1403~1426.
- 2) Jin, H. and Wiberg, N. E., "Two-dimensional Mesh Generation, Adaptive Remeshing and Refinement", *Int. J. Numer. Meth. Engineering*, Vol. 29, 1990, pp. 1501~1526.
- 3) Holmes, D. G. and Snyder, D. D., "The Generation of Unstructured Meshes Using Delaunay Triangulation", *Proceedings of the 2nd Int. Conference on Numerical Grid Generation in CFD*, 1988, pp. 643~652.
- 4) Rebay, S., "Efficient Unstructured Mesh Generation by Means of Delaunay Triangulation and Bowyer-Watson Algorithm", *J. Comput. Phys.*, Vol. 106, No. 1, 1993, pp. 125~138.
- 5) Yerry, M. A. and Shephard, M. S., "Three-dimensional Mesh Generation by Modified Octree Technique", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 20, 1984, pp. 1965~1990.
- 6) Mavriplis, D. J., "An Advancing Front Delaunay Triangulation Algorithm Designed for Robustness", *J. Comput. Phys.*, Vol. 117, 1993, pp. 90~101.
- 7) Marcum, D. L. and Weatherill, N. P., "Unstructured Grid Generation Using Iterative Point Insertion and Local Reconnection", *AIAA J.* Vol. 33, No. 9, 1995, pp. 1619~1625.
- 8) Freitag, L. A. and Carl, O. -G., "Tetrahedral Mesh Improvement Using Swapping and Smoothing", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 40, 1997, pp. 3979~4002.
- 9) Canann, S. A., Tristano, J. R. and Staten, M. L., "An Approach to Combined Laplacian and Optimization Based Smoothing for Triangular, Quadrilateral, and Quad-Dominant Meshes", *Proceedings. 7th Int. Meshing Roundtable*, 1998.
- 10) Knupp, P. M., "Winslow Smoothing on Two-Dimensional Unstructured Meshes", *Engineering with Computers*, Vol. 15, 1999, pp. 263~268.
- 11) Chen, Z., Tristano, J. R., and Kwok, W., "Construction of an Objective Function for Optimization-based Smoothing", *Engineering with Computers*, Vol. 20, 2004, pp. 184~192.
- 12) Canann, S. A., Muthukrishnan, S. N. and Phillips, R. K., "Topological Refinement Procedures for Triangular Finite Element Meshes", *Engineering with Computers*, Vol. 12, 1996, pp. 243~255.
- 13) Corral, R. and Castaneda, J. F., "Surface Mesh Generation by Means of Steiner Triangulations", *AIAA-98-3013*, 1998.
- 14) Maeng, J., Han, S. and Choi, H., "A New Topological Clean Up Procedure for Triangular Meshes", *JSME International Journal Series-B*, Vol. 47, No. 1, 2004, pp. 101~107.