

論文

기하학적 비선형 해석을 위한 곡면 2차 삼각형 쉘 요소에 관한 연구

김창호*

Curved quadratic triangular degenerated-shell elements for geometric non-linear analysis

Chang-Ho Kim*

ABSTRACT

Compare to the large number of curved quadrilateral degenerated-shell elements, there are only a very few curved triangular degenerated-shell elements. Based on the assumed natural strain sampling scheme previously developed for a quadratic degenerated-shell element for linear analysis, this paper devises geometric non-linear six-node degenerated-shell element. The element can be curved and is only equipped with the standard nodal d.o.f.'s. Careful consideration has been exercised to circumvent various locking phenomena that plague degenerated-shell element. Numerical examples are presented to illustrate efficiency.

초 록

곡면 사각형 쉘 요소들이 다수인 것에 비해, 곡면 삼각형 요소들은 아주 소수이다. 이 미 발표된, 선형 해석을 위한 6절점 2차 쉘 요소의 가정 자연 변형도 이론에 기초해, 본 연구에서는 6절점 쉘 요소의 기하학적 비선형 해석을 수행하였다. 쉘 요소는 표준 절점 자유도만으로 곡면 모델링이 가능하고, 수치해석 결과가 보여주는 바와 같이 다양한 잠김 현상들을 제거하는데 효율적인 요소임을 확인하였다.

Key Words : Assumed Natural Strain(가정 자연 변형도), Triangular degenerated-shell element(삼각형 쉘 요소), Geometrically nonlinear analysis(기하학적 비선형 해석), Curved element(곡면 요소)

1. 서 론

자동격자 생성 기법, 적합한 격자 정밀화 기법은 상용 유한요소 프로그램의 표준 특성이다. 삼각형 격자 혹은 요소는 여전히 가장 강력하고 효과적인 격자 생성의 기본사항이다. 하지만 문헌 조사 결과, 이런 여러 장점에도 불구하고 많은 수의 사각형 요소에 비해 상대적으로 삼각형 요소의 개발은 미미한 편이다. 또한 개발되어진 삼각형 요소의 경우에도 막 잠김 현상을 제거하기 위해, 대부분 중심면 형상으로 곡면이 아닌 평면형상(flat facet)을 가진다. 하지만 본 연구에서 제안된 가정 자연 변형도(Assumed Natural Strain) 2차 삼각형 쉘 요소는 정확한 모델링을 위한 곡면인 중심면(Curved mid-surface)을 사용하면서 효과적으로 막 잠김 현상을 제거하고 있다.

일반적인 가정 변형도(Assumed Strain) 방법 [2]은, 잠김 현상을 발생시키는 변형도 필드를 다항식 분포로 종종 가정하여, 미리 지정되어진 샘플링 점들과 방향에서 변위를 이용한 변형도와 가정 변형도 필드를 규합해서 다항식의 계수들을

† 2004년 7월 27일 접수 ~ 2004년 11월 9일 심사완료

* 정회원, 한국항공우주연구원

연락처, E-mail : kch@kari.re.kr

대전시 유성구 어은동 45번지

구한다. 전체적인 독립 변형도 샘플들의 수를 줄이기 위해 대부분의 변형도들은 요소의 경계의 점과 변을 따라 구하고, 다항식의 계수들을 절점의 자유도로 표시하기 위해 역행렬을 필요로 한다. 그러나 가정 자연 변형도 방법은, 삼각형 요소의 자연 혹은 면적 좌표계가 독립적이지 않아 복잡하지만, 최적 점에서의 독립적인 자연 변형도를 보간(interpolation) 하기 때문에 역행렬이 필요 없는 장점이 있다.

II. 본 론

2.1 ANS 2차 삼각형 쉘 요소(요약)

이미 발표된, 선형 해석을 위한 2차 쉘 요소(6 절점)의 가정 자연 변형도(ANS) 이론에 대한 간략한 요약이다[1].

가정 자연 변형도는 변형도 샘플링 점들과 샘플링 방향들을 각각 요소 경계의 점들과 요소 경계로 정렬하면서 잠김을 제거한다. 최적의 변형도 샘플링 점들과 방향들을 정의하기 위해, 좌표 필드보다 고차의 절점 값 필드를 가지는 부족매개변수(subparameter) 요소로 6절점 삼각형 요소를 가정하여, 절점 값들을 3차 다항 필드로 가정한다[1]. 6절점의 등매개변수(isoparameter) 요소의 보간된 2차 절점 값 필드 및 이 필드의 미분 필드(1차)는, 6절점 부족매개변수 요소의 보간된 3차 절점 값 필드 및 이 필드의 미분 필드(1차)와 다르다. 그러나 Fig. 2에서와 같이 요소 경계상의 2차 적분 점에서의 미분 값과, 요소 경계의 중점을 연결한 선상의 평균 미분 값들은 두 등매개변수요소와 부족매개변수요소에 대해 일치한다[1]. 대부분의 최적 방향 미분 값들은 인접한 요소들과 공유가 되고, 따라서 잠김 현상을 억제하는데 효과적이다.

Fig. 1은 초기 상태 혹은 변형전의 6절점 쉘 요소의 형상을 보여주고, 6절점의 형상 함수(shape function)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_1 &= r(2r-1), N_2 = s(2s-1), \\ N_3 &= t(2t-1), N_4 = 2st, N_5 = 2tr, N_6 = 2rs \end{aligned} \quad (1)$$

위 식에서, $r, s, t \in |0, 1|$ 는 면적 좌표계(area coordinate)를 나타내고, Fig. 2를 보면 다음과 같은 관계를 가진다.

$$r + s + t = 1 \quad (2)$$

두께 방향 자연 좌표인 $\zeta \in | -1, +1 |$ 로 두

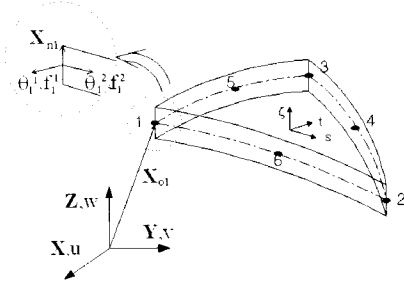


Fig. 1. The initial configuration

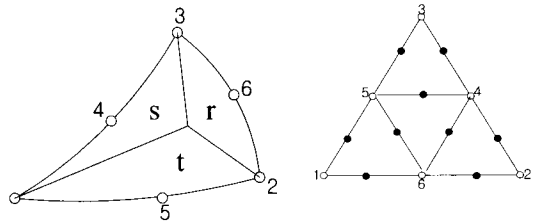


Fig. 2. The area coordinate and optimal points

께 방향 좌표를 표시한다. i 번째 요소 절점들의 초기 좌표 벡터는 요소 절점 방향을 따라 다음과 같다.

$$\mathbf{X}_i = \{ X_n, Y_n, Z_n \}^T = \mathbf{X}_{oi} + \zeta \mathbf{X}_{ni} \quad (3)$$

요소 절점의 두께는 다음과 같다.

$$h_i/2 = \|\mathbf{X}_{ni}\| \quad (4)$$

요소 절점들의 초기 좌표 벡터는 보간에 의해 다음과 같이 구한다.

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{oi} + \zeta \mathbf{X}_{ni} = \sum_{i=1}^6 N_i \mathbf{X}_{oi} + \zeta \sum_{i=1}^6 N_i \mathbf{X}_{ni} \quad (5)$$

$$\mathbf{f}_i^1 = \begin{cases} \frac{h_i}{2} \frac{\mathbf{X}_{ni} \times \{0, 0, 1\}^T}{|\mathbf{X}_{ni} \times \{0, 0, 1\}^T|} & \text{for } X_{ni}^2 + Y_{ni}^2 \neq 0 \\ \frac{h_i}{2} \{0, 0, 1\}^T & \text{for } X_{ni}^2 + Y_{ni}^2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\mathbf{f}_i^2 = \frac{2}{h_i} (\mathbf{X}_{ni} \times \mathbf{f}_i^1)$$

회전 자유도에 의한 요소의 두께 방향 변위를 정의하기 위해, \mathbf{X}_{ni} 에 직교하는 단위 절점 벡터들을 정의하는데, 만약 \mathbf{X}_{ni} 가 Z방향과 평행하면, 식(6)에 의해 \mathbf{f}_i^1 와 \mathbf{f}_i^2 는 각각 양의 X와 Y방향이 된다. 각각의 절점은 3개의 절점 이동 변위와, 식(6)의 두개의 단

위 절점 벡터들을 중심으로 회전하는 2개의 회전 변위를 갖는다.

면적 좌표계는 위의 식(2)와 같이 상호 의존적이므로 독립 매개변수는 두개이다. 따라서 r, s, t 면적 좌표계는 r, s, t 중 하나는 고정되고, 나머지 두개의 좌표가 독립적으로 변하는 3가지 방식으로 미분을 정의할 수 있고, 3가지 방식을 다음과 같은 미분 연산자들로 표현하기로 한다.

$$\begin{aligned}\delta_r F(r, s, t) &= \frac{\delta F(r, s, 1-r-s)}{\delta r} \\ \delta_s F(r, s, t) &= \frac{\delta F(1-s-t, s, t)}{\delta r} \\ \delta_t F(r, s, t) &= \frac{\delta F(r, 1-t-r, t)}{\delta r}\end{aligned}\quad (7)$$

예를 들어 s 방향의 자연 법선 변형도 ϵ_{ss} 를 구해보면, 최적의 샘플링 변형도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\epsilon_{ss}^- &= \epsilon_{ss}(s = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, t = 0) \\ \epsilon_{ss}^+ &= \epsilon_{ss}(s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, t = 0) \\ \epsilon_{ss}^a &= \frac{1}{2}\epsilon_{ss}(s = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}, t = \frac{1}{2}) \\ &+ \frac{1}{2}\epsilon_{ss}(s = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}}, t = \frac{1}{2})\end{aligned}\quad (8)$$

최적의 샘플링 변형도 $\epsilon_{ss}^-, \epsilon_{ss}^+, \epsilon_{ss}^a$ 를 이용하여, 샘플링 점을 기초로 3점 보간하여 얻어지는 변형도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon}_{ss} &= \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - s\sqrt{3} - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) t \right] \epsilon_{ss}^- \\ &+ \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + s\sqrt{3} - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) t \right] \epsilon_{ss}^+ + 2t\epsilon_{ss}^a\end{aligned}\quad (9)$$

유사하게 $r \rightarrow s \rightarrow t \rightarrow r$ 로 순환하며 계산하여 $\epsilon_{rr}, \epsilon_{tt}$ 를 구하고, 가정 자연 법선 변형도 성분을 구하는 과정을 다음과 같이 기호화하기로 한다.

$$\hat{\epsilon}_{rr} = [[\epsilon_{rr}]_r], \hat{\epsilon}_{ss} = [[\epsilon_{ss}]_s], \hat{\epsilon}_{tt} = [[\epsilon_{tt}]_t] \quad (10)$$

$[[\]]_{rr}, [[\]]_{sr}, [[\]]_t$ 는 변형도를 추출하는 연산자들이고, 동일한 방법을 자연 전단 변형도들에 적용하면 다음과 같다.

$$\tilde{\gamma}_{\zeta r} = [[\gamma_{\zeta r}]_r], \tilde{\gamma}_{\zeta s} = [[\gamma_{\zeta s}]_s], \tilde{\gamma}_{\zeta t} = [[\gamma_{\zeta t}]_t] \quad (11)$$

셀에서는, xy 평면이 중심 면에 접하는 국부 Cartesian 좌표계에서 물성치가 정의되거나 기술된다. 일반적으로 ζ 가 중심 면에 직교한다고 가정할 때, 면내 물리 변형도(the physical in-plane strain)는 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon_{\perp} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{\perp} = \begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}_{rr} \\ \tilde{\epsilon}_{ss} \\ \tilde{\epsilon}_{tt} \end{Bmatrix}, \mathbf{T}_{\perp} = \begin{bmatrix} x_r^2 & y_r^2 & x_r y_r \\ x_s^2 & y_s^2 & x_s y_s \\ x_t^2 & y_t^2 & x_t y_t \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\mathbf{x}_{\zeta} = \mathbf{e}_x^T (\partial_{\zeta} X_o), \mathbf{y}_{\zeta} = \mathbf{e}_y^T (\partial_{\zeta} X_o) \xi = r, \text{ and } t \quad (12)$$

변환 행렬 \mathbf{T}_{\perp} 에 필요한 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ 는 국부 Cartesian 좌표계 x, y 축 방향의 단위 벡터이다.

면내 물리 변형도와는 달리 전단 물리 변형도(the physical transverse shear strain) γ_{xz}, γ_{zy} 를 구하기 위해서는, 세 개의 가정 자연 전단 변형도 $\tilde{\gamma}_{\zeta r}, \tilde{\gamma}_{\zeta s}, \tilde{\gamma}_{\zeta t}$ 중 단지 두개의 변형도만 필요하다. 만약 세 개의 가정 자연 전단 변형도 중 임의의 두개만을 사용하면 절점 넘버링에 따라 심각한 민감성을 초래하게 되므로, 3점 적분법에 따른 세 개의 적분점 I, II, III에서의 전단 물리 변형도를 가정 자연 전단 변형도의 각각 다른 두개의 $(r, s), (s, t), (t, r)$ 조합으로 구한다. 수학적으로는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix}_{\mathbf{I}} &= \mathbf{T}_{\mathbf{I}} \begin{Bmatrix} \tilde{\gamma}_{\zeta r} \\ \tilde{\gamma}_{\zeta s} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix}_{\mathbf{II}} = \mathbf{T}_{\mathbf{II}} \begin{Bmatrix} \tilde{\gamma}_{\zeta s} \\ \tilde{\gamma}_{\zeta t} \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix}_{\mathbf{III}} &= \mathbf{T}_{\mathbf{III}} \begin{Bmatrix} \tilde{\gamma}_{\zeta t} \\ \tilde{\gamma}_{\zeta r} \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (13)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{\mathbf{I}} &= \begin{bmatrix} \|\mathbf{X}_n\|_{x_r} & \|\mathbf{X}_n\|_{y_r} \\ \|\mathbf{X}_n\|_{x_s} & \|\mathbf{X}_n\|_{y_s} \end{bmatrix}_{\mathbf{I}}^{-1} \\ \mathbf{T}_{\mathbf{II}} &= \begin{bmatrix} \|\mathbf{X}_n\|_{x_s} & \|\mathbf{X}_n\|_{y_s} \\ \|\mathbf{X}_n\|_{x_t} & \|\mathbf{X}_n\|_{y_t} \end{bmatrix}_{\mathbf{II}}^{-1} \\ \mathbf{T}_{\mathbf{III}} &= \begin{bmatrix} \|\mathbf{X}_n\|_{x_t} & \|\mathbf{X}_n\|_{y_t} \\ \|\mathbf{X}_n\|_{x_r} & \|\mathbf{X}_n\|_{y_r} \end{bmatrix}_{\mathbf{III}}^{-1}\end{aligned}$$

아래 첨자 I, II, III은 적분점을 의미하고, 다음의 보간에 의해 전단 물리 변형도 필드를 구한다.

$$\begin{aligned}\epsilon_{\perp} &= \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix} = \frac{5r-s-t}{3} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix}_{\mathbf{I}} \\ &+ \frac{-r+5s-t}{3} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix}_{\mathbf{II}} + \frac{-r-s+5t}{3} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix}_{\mathbf{III}}\end{aligned}\quad (14)$$

식(12)와 식(14)에 의해 결정되는 요소 변형도들을 기초로 변형도 에너지를 적분하여, 요소 강성 행렬을 구한다.

2.2 기하학적 비선형 쉘 요소

주어진 하중들을 받는 요소 집합체의 반복 변위 해를 \mathbf{U} 라 할 때, 초기 좌표 \mathbf{X} 와 \mathbf{U} 의 합으로 집합체의 현재 좌표 $\tilde{\mathbf{X}}$ 를 나타낸다.

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + \mathbf{U} \quad (15)$$

증가분, 엄밀히 말해 \mathbf{U} 의 반복적인 변화량 $\Delta\mathbf{U}$ 가 구해야 할 주된 미지수 이고, 절점에서의 변위와 변위 증가분을 두께 방향에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_{oi} + \zeta \mathbf{U}_{ni}, \Delta\mathbf{U}_i = \Delta\mathbf{U}_{oi} + \zeta \Delta\mathbf{U}_{ni} \quad (16)$$

$$\mathbf{U}_{ni} = -\mathbf{f}_i^2 \sin\theta_i^1 \cos\theta_i^2 + \mathbf{f}_i^1 \sin\theta_i^2 + \mathbf{X}_{ni} (\cos\theta_i^1 \cos\theta_i^2 - 1)$$

$$\Delta\mathbf{U}_{ni} = (-\mathbf{f}_i^2 \cos\theta_i^1 \cos\theta_i^2 - \mathbf{X}_{ni} \sin\theta_i^1 \cos\theta_i^2) \Delta\theta_i^1 + (\mathbf{f}_i^2 \sin\theta_i^1 \sin\theta_i^2 + \mathbf{f}_i^1 \cos\theta_i^2 - \mathbf{X}_{ni} \cos\theta_i^1 \sin\theta_i^2) \Delta\theta_i^2$$

여기서, θ_i^1, θ_i^2 는 각각 $\mathbf{f}_i^1, \mathbf{f}_i^2$ 를 중심으로 회전하는 절점 회전 변위 값이다. 절점 값들을 보간하면,

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_o + \zeta \mathbf{U}_n, \Delta\mathbf{U} = \Delta\mathbf{U}_o + \zeta \Delta\mathbf{U}_n \quad (17)$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{X}}_o + \zeta \tilde{\mathbf{X}}_n = (\mathbf{X}_o + \mathbf{U}_o) + \zeta (\mathbf{X}_n + \mathbf{U}_n)$$

여기서,

$$\{\tilde{\mathbf{X}}_o, \tilde{\mathbf{X}}_n, \mathbf{U}_o, \mathbf{U}_n, \Delta\mathbf{U}_o, \Delta\mathbf{U}_n\} = \sum_{i=1}^6 \{\tilde{\mathbf{X}}_{oi}, \tilde{\mathbf{X}}_{ni}, \mathbf{U}_{oi}, \mathbf{U}_{ni}, \Delta\mathbf{U}_{oi}, \Delta\mathbf{U}_{ni}\}$$

자연 Green 변형도는 다음과 같다.

$$\epsilon_{\xi\xi} = (\partial_\xi \mathbf{X})^T (\partial_\xi \mathbf{U}) + \frac{1}{2} (\partial_\xi \mathbf{U})^T (\partial_\xi \mathbf{U}) \quad (18)$$

$$\gamma_{\zeta\xi} = \mathbf{X}_n^T (\partial_\xi \mathbf{U}) + (\partial_\xi \mathbf{X})^T \mathbf{U}_n + \mathbf{U}_n^T (\partial_\xi \mathbf{U})$$

위 식과 모든 식에서, ξ 는 r, s, t 를 나타낸다.

식(18)을 ζ 에 따라 차수대로 분류하면 다음과 같다.

$$\epsilon_{\xi\xi}(\mathbf{U}) = \epsilon_{\xi\xi}^m(\mathbf{U}) + \zeta \epsilon_{\xi\xi}^b(\mathbf{U}) + \zeta^2 \epsilon_{\xi\xi}^q(\mathbf{U}), \quad (19)$$

$$\gamma_{\zeta\xi}(\mathbf{U}) = \gamma_{\zeta\xi}^o(\mathbf{U}) + \zeta \gamma_{\zeta\xi}^n(\mathbf{U})$$

면내 변형도 각각의 항들은 다음과 같다.

$$\epsilon_{\xi\xi}^m(\mathbf{U}) = (\partial_\xi \mathbf{X}_o)^T (\partial_\xi \mathbf{U}_o) + \frac{1}{2} (\partial_\xi \mathbf{U}_o)^T (\partial_\xi \mathbf{U}_o)$$

$$\epsilon_{\xi\xi}^b(\mathbf{U}) = (\partial_\xi \mathbf{X}_n)^T (\partial_\xi \mathbf{U}_o) + (\partial_\xi \mathbf{X}_o)^T (\partial_\xi \mathbf{U}_n) + (\partial_\xi \mathbf{U}_o)^T (\partial_\xi \mathbf{U}_n)$$

$$\epsilon_{\xi\xi}^q(\mathbf{U}) = (\partial_\xi \mathbf{X}_n)^T (\partial_\xi \mathbf{U}_n) + \frac{1}{2} (\partial_\xi \mathbf{U}_n)^T (\partial_\xi \mathbf{U}_n)$$

전단 변형도 각각의 항들은 다음과 같다.

$$\gamma_{\zeta\xi}^o(\mathbf{U}) = \mathbf{X}_n^T (\partial_\xi \mathbf{U}_o) + (\partial_\xi \mathbf{X}_o)^T \mathbf{U}_n + \mathbf{U}_n^T (\partial_\xi \mathbf{U}_o)$$

$$\gamma_{\zeta\xi}^n(\mathbf{U}) = \mathbf{X}_n^T (\partial_\xi \mathbf{U}_n) + (\partial_\xi \mathbf{X}_n)^T \mathbf{U}_n + \mathbf{U}_n^T (\partial_\xi \mathbf{U}_n)$$

여기서, m 은 막 변형도를, b 는 휨 변형도를 나타내는데, 쉘 요소는 $\epsilon_{\xi\xi}^q$ 와 $\gamma_{\zeta\xi}^n$ 에 민감하지 않다는 것이 증명되어 있다[7]. 따라서 계산상의 효율을 위해 두 항은 생략되고, Green 자연 변형도의 증가분은 다음과 같다.

$$\Delta\epsilon_{\xi\xi}^m(\mathbf{U}) = \epsilon_{\xi\xi}^m(\mathbf{U} + \Delta(\mathbf{U})) - \epsilon_{\xi\xi}^m(\mathbf{U}) = (\partial_\xi \tilde{\mathbf{X}}_o)^T (\partial_\xi \Delta\mathbf{U}_o) + \frac{1}{2} (\partial_\xi \mathbf{U}_o)^T (\partial_\xi \Delta\mathbf{U}_o)$$

$$\Delta\epsilon_{\xi\xi}^b(\mathbf{U}) = \epsilon_{\xi\xi}^b(\mathbf{U} + \Delta(\mathbf{U})) - \epsilon_{\xi\xi}^b(\mathbf{U}) = (\partial_\xi \tilde{\mathbf{X}}_n)^T (\partial_\xi \Delta\mathbf{U}_o) + (\partial_\xi \tilde{\mathbf{X}}_o)^T (\partial_\xi \Delta\mathbf{U}_n) + (\partial_\xi \mathbf{U}_o)^T (\partial_\xi \Delta\mathbf{U}_n) \quad (20)$$

$$\Delta\gamma_{\zeta\xi}^o = \gamma_{\zeta\xi}^o(\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}) - \gamma_{\zeta\xi}^o(\mathbf{U}) = \tilde{\mathbf{X}}_n^T (\partial_\xi \Delta\mathbf{U}_o) + (\partial_\xi \tilde{\mathbf{X}}_o)^T \Delta\mathbf{U}_n + \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{U}_n^T (\partial_\xi \Delta\mathbf{U}_o) + (\partial_\xi \Delta\mathbf{U}_o) \Delta\mathbf{U}_n^T)$$

가정 자연 변형도의 개념들(식(10), (11), (13), (14))과 Green 자연 변형도의 증가분, 변형도 변환 관계(식(12), (13))들을 결합하여, 물리 Green 변형도와 증가분을 다음과 같이 기호화하기로 한다.

$$\epsilon_{=}(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{matrix} \epsilon_{xx}(\mathbf{U}) \\ \epsilon_{yy}(\mathbf{U}) \\ 2\epsilon_{xy}(\mathbf{U}) \end{matrix} \right\} = \epsilon_m(\mathbf{U}) + \epsilon_b(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{matrix} \epsilon_{xx}^m(\mathbf{U}) \\ \epsilon_{yy}^m(\mathbf{U}) \\ 2\epsilon_{xy}^m(\mathbf{U}) \end{matrix} \right\} + \zeta \left\{ \begin{matrix} \epsilon_{xx}^b(\mathbf{U}) \\ \epsilon_{yy}^b(\mathbf{U}) \\ 2\epsilon_{xy}^b(\mathbf{U}) \end{matrix} \right\} \quad (21)$$

$$\gamma_o(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{matrix} \gamma_{zx}^o(\mathbf{U}) \\ \gamma_{zy}^o(\mathbf{U}) \end{matrix} \right\}$$

각각의 항은 다음과 같고, $\Delta\mathbf{U}$ 는 요소 절점 변위의 증가분 벡터이며, \mathbf{A} 는 대칭 행렬이다.

$$\begin{aligned}\Delta \epsilon_{=}(\mathbf{U}) &= \Delta \epsilon_m(\mathbf{U}) + \zeta \Delta \epsilon_b(\mathbf{U}) \\ \Delta \epsilon_m(\mathbf{U}) &= \mathbf{B}_m \Delta \mathbf{U} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{U}^T \mathbf{A}_{xx}^m \Delta \mathbf{U} \\ \Delta \mathbf{U}^T \mathbf{A}_{yy}^m \Delta \mathbf{U} \\ \Delta \mathbf{U}^T \mathbf{A}_{xy}^m \Delta \mathbf{U} \end{array} \right\} \quad (22) \\ \Delta \epsilon_b(\mathbf{U}) &= \mathbf{B}_b \Delta \mathbf{U} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{U}^T \mathbf{A}_{xx}^b \Delta \mathbf{U} \\ \Delta \mathbf{U}^T \mathbf{A}_{yy}^b \Delta \mathbf{U} \\ \Delta \mathbf{U}^T \mathbf{A}_{xy}^b \Delta \mathbf{U} \end{array} \right\} \\ \Delta \gamma_o(\mathbf{U}) &= \mathbf{B}_o \Delta \mathbf{U} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{U}^T \mathbf{A}_{xx}^o \\ \Delta \mathbf{U}^T \mathbf{A}_{xy}^o \end{array} \right\} \Delta \mathbf{U}\end{aligned}$$

요소 단위당 가상일의 원리를 사용하여, 요소 강성 행렬을 구하면 다음과 같이 식(23)으로 정리 된다.

$$\begin{aligned}\delta \Pi^e &= \int ((\epsilon_m + \zeta \epsilon_b) \mathbf{C}_{=} \delta(\Delta \epsilon_m + \zeta \Delta \epsilon_b) \\ &+ (\Delta \epsilon_m + \zeta \Delta \epsilon_b)^T \mathbf{C}_{=} \delta(\Delta \epsilon_m + \zeta \Delta \epsilon_b) \\ &+ (\gamma_o + \Delta \gamma_o)^T \mathbf{C}_t \delta \Delta \gamma_o) d\Omega - \mathbf{F}^T \delta \Delta \mathbf{U}\end{aligned} \quad (23)$$

Ω^e 는 초기 요소 영역을 의미하고, \mathbf{F} 는 제시된 외부 하중에 의해 발생하는 절점 하중 벡터를 나타낸다.

전역 좌표계 \mathbf{X} 로부터 국부 자연 좌표계로 변환하기 위한 자코비안 행렬식(Jacobian Determinant) J 대신에 중심 면에서의 J_o 를 사용하기 위해, ζ 에 대해 미리 적분을 수행하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\delta \Pi^e &= 2 \int_0^1 \int_0^{1-t} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_m \\ \sigma_b \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{l} \delta \Delta \epsilon_m \\ \delta \Delta \epsilon_b \end{array} \right\} + \tau_o^T \delta \Delta \gamma_o \\ &\left\{ \begin{array}{l} \Delta \epsilon_m \\ \Delta \epsilon_b \end{array} \right\}^T \mathbf{C}_{=} \left\{ \begin{array}{l} \delta \Delta \epsilon_m \\ \delta \Delta \epsilon_b \end{array} \right\} + \Delta \gamma_o^T \bar{\mathbf{C}}_t \delta \Delta \gamma_o \Big\} J_o ds dt \\ &- \mathbf{F}^T \delta \Delta \mathbf{U}\end{aligned} \quad (24)$$

$$\mathbf{C}_{=} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\begin{array}{l} \mathbf{C}_{=} \\ \zeta \mathbf{C}_{=} \\ \mathbf{C}_{=} \end{array} \right] d\zeta, \bar{\mathbf{C}}_t = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{C}_t d\zeta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_m \\ \sigma_b \end{array} \right\} = \mathbf{C}_{=} \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_m(\mathbf{U}) \\ \epsilon_b(\mathbf{U}) \end{array} \right\}, \tau_o = \bar{\mathbf{C}}_t \gamma_o(\mathbf{U})$$

식(21)을 식(24)에 대입하면 다음과 같고,

$$\delta \Pi_e = \delta \Delta \mathbf{U}^T ((\mathbf{K}_o + \mathbf{K}_\sigma) \Delta \mathbf{U} + \mathbf{Q} - \mathbf{F}) \quad (25)$$

여기서, 각각의 항들은 다음과 같다.

$$\mathbf{Q} = 2 \int_0^1 \int_0^{1-t} \left(\left[\begin{array}{l} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{B}_b \end{array} \right]^T \left\{ \begin{array}{l} \sigma_m \\ \sigma_b \end{array} \right\} + \mathbf{B}_o^T \tau_o \right) J_o ds dt$$

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_o &= 2 \int_0^1 \int_0^{1-t} \left(\left[\begin{array}{l} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{B}_b \end{array} \right]^T \mathbf{C}_{=} \left[\begin{array}{l} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{B}_b \end{array} \right] \right. \\ &\left. + \mathbf{B}_o^T \bar{\mathbf{C}}_t \mathbf{B}_o \right) J_o ds dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_\sigma &= 2 \int_0^1 \int_0^{1-t} (\sigma_{xx}^m \mathbf{A}_{xx}^m + \sigma_{yy}^m \mathbf{A}_{yy}^m + \sigma_{xy}^m \mathbf{A}_{xy}^m \\ &+ \sigma_{xx}^b \mathbf{A}_{xx}^b + \sigma_{yy}^b \mathbf{A}_{yy}^b + \sigma_{xy}^b \mathbf{A}_{xy}^b \\ &+ \tau_{xz}^o \mathbf{A}_{xz}^o + \tau_{zy}^o \mathbf{A}_{zy}^o) J_o ds dt\end{aligned}$$

$\mathbf{K}_o + \mathbf{K}_\sigma$ 는 요소 강성행렬이고, \mathbf{Q} 는 요소 응력으로 부터 발생하는 등가 절점 하중벡터로 3점 적분법에 의해 계산이 가능하다. 위 식(25)를 통해 근사화 된 변위 증가분을 계산할 수 있다.

2.3 기하학적 비선형 수치 해석 결과

완전한 Newton-Raphson 반복 기법을 사용해 기하학적 비선형 문제들을 해석하였고, 다음의 수렴 기준을 사용하였다.

$$\|\Delta \mathbf{U}\| / \|\mathbf{U}\| < 10^{-1} \quad (26)$$

여기서, U 와 ΔU 는 각각 전역 변위 벡터와 전역 변위 증가분 벡터이고, 한번의 하중 스텝(step) 당 최대 허용 가능한 반복 계산의 수를 50으로 제한하였다. 최대 하중을 NSTEP이라는 하중 단위 수로 나누어, 등가의 동일한 하중 증가분을 전 하중 영역에 대해 적용하였고, 최대 하중에 도달하는 총 반복 계산의 수, 수렴 혹은 발산을 기술하였다.

1. 균일 압력을 받는 고정단 지지 사각 평판

대칭성을 근거로, 균일한 압력을 받는 사각 평판의 1/4 모델을 사용하였다. 등가의 동일한 하중 증가분을 사용하여, Fig. 4에 최대 하중 $1.5 \times 10^{-4} \text{ psi}$ 와 평판의 중심점에서의 변위 그래프를 그리고, 2×2 , 4×4 격자에 대해 Way의 해석해[4]와 비교하였으며 적은 수의 격자로 효율적인 수렴을 하였다.

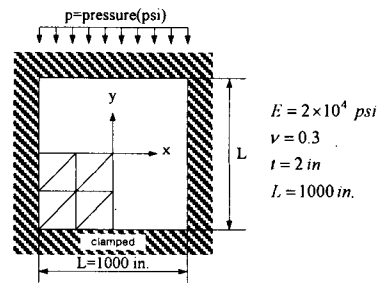


Fig. 3. Clamped square plate

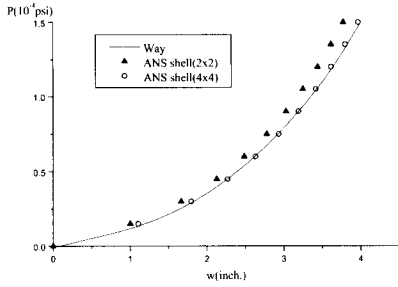


Fig. 4. Transverse deflection at the plate central point

Table 1. The total number of iterations

Mesh	2 × 2	4 × 4
ANS shell	34	34

2. 끝단이 개방된 실린더 쉘

Fig. 5에서처럼, 끝단이 개방된 실린더 쉘의 가운데 점에서 직각방향으로 잡아당기는 하중이 작용한다.

최대 하중은 10klb이고, 대칭성을 이용하여 실린더의 1/8 모델을 8 × 8의 격자를 사용하여 모델링하였다. Fig. 6에서 Gruttman, Stein and Wriggers의 결과[5]와 일치함을 보였고, 적은 수의 격자만으로 효율적인 수렴을 하였다. Fig. 7에서 초기 형상과

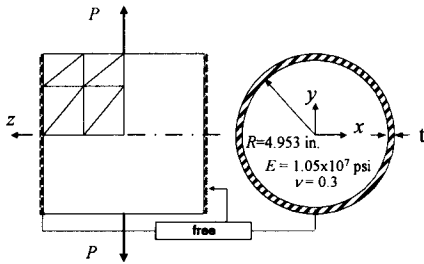


Fig. 5. The open-ended cylindrical shell

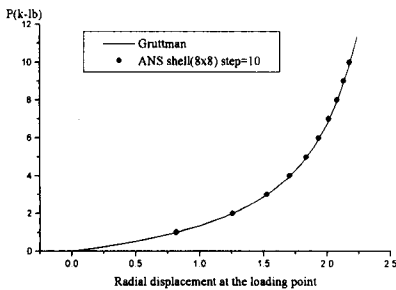


Fig. 6. Radial displacement at the point of loading

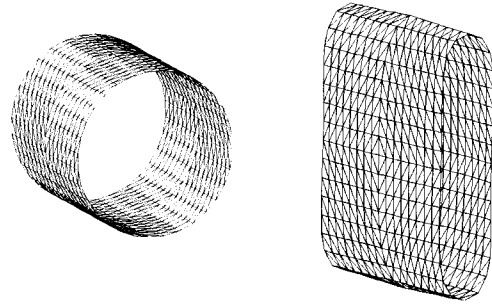


Fig 7. The Initial and Deformed Cylinder

Table 2. The total number of iterations

NSTEP	2	10
ANS shell	Fail to converge	52

변형된 형상을 나타내었다. Table 2는 다양한 NSTEP에서 6절점 가정자연 변형도 쉘 요소의 총 반복 횟수를 나타내고, 미소각 가정에 따라 하중 스텝의 수가 적은 경우에 발산함을 알 수 있다.

3. 교차하는 집중 하중을 받는 반구형 쉘

Fig. 8에서와 같이, 끝단에서 18°의 원형 단면으로 잘린 반구에 90°로 직교하는 교차 하중이 작용한다. 최대 하중 P는 3.5klb이고, 대칭성을 이용하여 반구의 1/4모델을 10 × 10 격자로 모델링 하였다. 하중 작용점의 원주방향 변위를 ABAQUS의 안정화

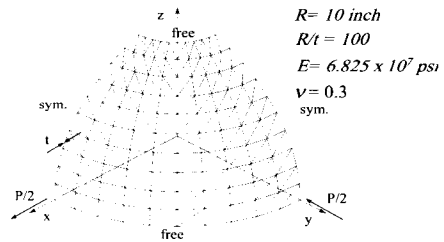


Fig. 8. A quarter of hemispherical shell

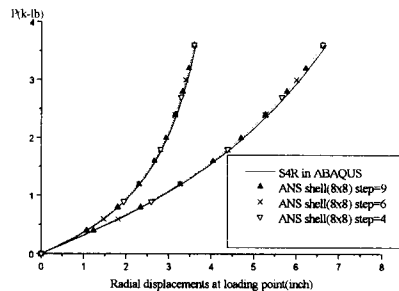


Fig. 9. Radial Displacement

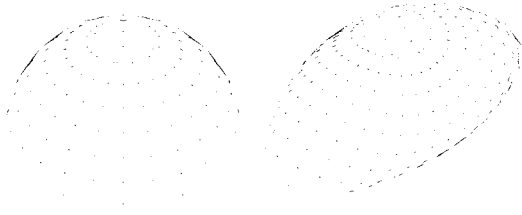


Fig. 10. The Initial and Deformed Shell

된 감소 적분 4절점 셸 요소인 S4R의 수렴된 해와 Fig. 9에 비교하였고, 적은 수의 격자만으로 효율적인 수렴을 하였다. Fig. 10에서 초기 형상과 최대 하중 작용 시 변형된 셸 모양을 나타내었고, Table 3은 다양한 NSTEP에서 6절점 가정 자연 변형도 셸 요소의 총 반복 횟수를 나타내었으며, 마찬가지로 하중 스텝의 수가 작은 경우에 발산함을 알 수 있다.

Table 3. The total number of iterations

NSTEP	3	4	6	9
ANS shell	Fail to converge	38	50	64

4. 선 하중을 받는, 틸새를 지닌 고리 모양 평판

Fig. 11에서처럼 A-B를 따라 틸새를 지닌 고리 모양 평판을 4×20 격자로 모델링 하였다. 틸새의 한쪽 끝은 완전히 고정되고, 다른 끝은 틸새를 따라 단위 길이 당 최대 4.034 N/m의 선 하중이 작용한다.

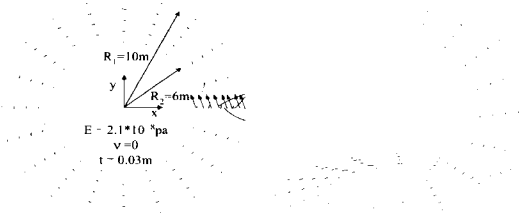


Fig. 11. The initial and deformed geometry

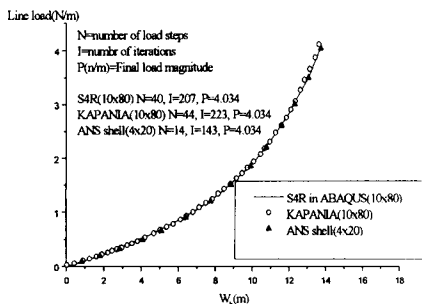


Fig. 12. Vertical displacement

이 예제는 주로 큰 회전을 해석하는 능력을 검증하는데 사용된다. Fig. 11에서 최대 하중이 작용할 때 변형된 형상을 나타내었고, Fig. 12에서 B점에서의 수직 변형을 Mohan과 Kapania의 해[6]와 비교하였으며, 적은 수의 격자만으로 큰 회전에 대해 효율적인 수렴성 및 성능을 보여준다. Table 4는 총 반복 횟수를 나타내고, 마찬가지로 하중 스텝의 수가 적은 경우에 발산함을 알 수 있다.

Table 4. The total number of iterations

NSTEP	7	14
ANS shell	Fail to converge	143

III. 결 론

본 연구는 기존의 선형 해석을 위한 가정 자연 변형도 6절점 셸 요소를 기하학적 비선형 해석으로 확장하였다. 제한된 요소는 여느 삼각형 요소와 달리 곡면인 중심면(Curved mid-surface) 형상을 고려하였고, 두께 방향 잠김 현상을 제거하기 위해 면내 응답과 그 외 응답을 분리시켰다. 선형 해석 시와 유사하게, 비선형 해석 시에도 잠김 현상 없이 적은 수의 격자만으로 효율적인 성능을 보여주었지만, 미소각 가정에 의해 큰 하중 스텝에 대해서는 발산하는 경향을 보이는데, 12절점 삼각형 가정 자연 변형도 솔리드-셸 요소를 개발한다면, 셸 요소에 비해 더 큰 하중 증가분에 대해서도 뛰어난 수렴성을 보여줄 것으로 예상된다.

후 기

본 연구는 “통신해양기상위성1호 시스템 및 본체개발사업”으로부터 지원 받은 과제 수행 결과 중의 일부이며, 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- 1) Sze K.Y. and Zhu D., "A quadratic assumed natural strain curved triangular shell element", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 174, 1999, pp. 57-71.
- 2) Flores F.G., Onate E. and Zarate F., "New assumed strain triangles for non-linear shell analysis", *Computational mechanics*, Vol. 17, 1995, pp. 107-114.

3) Kumar W.P.P. and Palaninathan R., "Explicit through-thickness integration schemes for geometric non-linear shell", *International journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, 1999, pp. 235-256.

4) Way S., "Uniformly loaded, clamped rectangular plates with large deformation", *Proceedings of the 5th International Congress of Applied Mechanics*, 1938.

5) Gruttmann F., Stein E. and Wriggers P., "Theory and numerics of thin elastic shells with finite rotations", *Ingenieur-Archiv*, Vol. 59, 1989, pp. 54-67.

6) Mohan R. and Kapania RK., "Updated Lagrangian formulation of a flat triangular element for thin laminated shells", *AIAA Journal*, Vol. 36, 1998, pp. 273-281.