

論文

반응면 기법과 크리깅 기법을 이용한 설계공간의 타당성 향상

구요천*, 전용희*, 김유신**, 이동호*

Improvement of the Design Space Feasibility
Using the Response Surface and Kriging Method

Yo-Cheon Ku*, Yong-Heu Jeon*, Yu-Shin Kim** and Dong-Ho Lee*

ABSTRACT

In this research, a procedure to improve the feasibility of design space is proposed by an approximation model. The Chebyshev Inequality is used as the criterion of modification of design space. This procedure is applied to the aero-elastic transonic wing design problem and the feasibility of the design space is greatly improved. Also the optimization results are improved by applying this procedure. That is, the probability to satisfy all imposed constraints is increased and the better design points are included in design space after this procedure. And the use of both a second-order response surface model and the Kriging model is investigated and compared in accuracy, efficiency, and robustness as approximation models in this procedure for different sampling methods. As a result, the second-order response surface model is more appropriate for our application than the Kriging model, because it is linear enough to be fitted well by the response surface model.

초 록

본 연구에서는 근사모델을 이용하여 설계공간의 타당성을 높일 수 있는 방법을 제시하였다. 이때 설계공간을 이동시키기 위한 기준으로 Chebyshev Inequality를 사용하였다. 이를 공간성을 고려한 항공기 익형 설계문제에 적용함으로써 타당성이 크게 향상됨을 확인하였으며 이렇게 구한 설계공간 내에서 최적화를 수행함으로써 보다 우수한 최적값도 얻을 수 있었다. 즉 설계공간 내에서 주어진 제약조건을 만족할 확률이 증가하였으며, 설계공간을 이동시킴으로써 보다 우수한 최적점이 설계공간 내에 포함되었다고 할 수 있다. 또한 이 과정에서 반응면 모델과 크리깅 모델, 두 가지 근사모델을 사용하여 정확성과 효율성, 실험점에 대한 강건성 등을 비교하였으며, 본 연구에서 설계한 문제의 경우 비교적 선형적인 특징으로 인해 반응면이 보다 우수한 결과를 보여줌을 확인하였다.

Key Words : Design Space(설계공간), Feasibility(타당성), Response Surface Method(반응면 기법), Kriging Method(크리깅 기법), Probability Distribution(확률분포), Chebyshev Inequality(체비셰프 부등식)

† 2004년 7월 30일 접수 ~ 2004년 10월 30일 심사완료

* 정희원, 서울대학교 기계항공공학부

** 정희원, 한국항공우주연구원

연락처, E-mail : donghlee@snu.ac.kr

서울시 관악구 신림동 산56-1

1. 서 론

최근의 공학적 설계 문제들은 과거에 비해 규모가 커지고 설계변수 간의 상호작용을 고려한 다분야간 최적설계를 수행함으로써 인하여 매우 많

은 해석 시간을 필요로 한다. 따라서 효율적인 다분야 통합 해석을 수행하기 위해 근사모델을 사용하며, 설계변수 사이의 상호작용을 효율적으로 다루기 위한 다양한 방법들도 사용되고 있다. 설계를 시작하기 전에 미리 타당성(feasibility)이 높은 설계공간을 찾기 위한 연구도 같은 맥락이라 할 수 있다[1].

본 연구에서는 천음속 항공기 익형 설계 문제 [2]에 대해 근사모델과 확률적 방법을 이용하여 초기 설계공간의 성공확률을 구하고 Chebyshev Inequality를 적용하여 설계공간을 이동시킴으로써 설계공간의 타당성을 향상시키고자 시도하였다. 이 과정에 사용되는 근사모델로 반응면 모델 [3]과 크리깅 모델[4]을 각각 이용하여 효율성, 정확성, 강건성 등의 측면을 중심으로 두 모델의 특징을 비교해 보았다. 크리깅 모델은 T. W. Simpson등에 의해 기존에 널리 사용되던 2차의 반응면을 대신할 수 있음이 밝혀졌고[5~6] 그 후 다양한 근사모델과의 비교 연구도 진행되고 있다 [7~8].

또한 이동된 설계공간 내에서 최적화를 수행하여 초기 설계공간에서 최적화한 결과와 비교함으로써 위의 과정이 공학적 설계문제의 최적화 결과에 도움을 줄 수 있음을 확인하고자 하였다.

II. 본 론

2.1 크리깅 모델

우리가 알고자 하는 함수 $y(x)$ 를 전역모델 $f(x)$ 와 국소적인 변동을 만들어내는 부분인 $Z(x)$ 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(x) = f(x) + Z(x) \quad (1)$$

전역모델인 $f(x)$ 는 많은 경우 상수항으로 처리되며, $Z(x)$ 는 평균이 0이고 분산이 σ^2 인 정규분포를 따른다. $Z(x)$ 의 공분산은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\text{Cov}[Z(x^i), Z(x^j)] = \sigma^2 R[(R(x^i, x^j))] \quad (2)$$

여기서 R 은 상관행렬(correlation matrix)이며 $R(x^i, x^j)$ 은 임의의 두 점 사이의 상관함수(correlation function)이다. 일단 상관함수가 결정되면 크리깅 모델의 예측값 \hat{y} 은 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{y} = \beta + r^T(x)R^{-1}(y - f\beta) \quad (3)$$

여기서 y 는 응답을 나타내는 열벡터이고 r^T, β 는 다음 식으로 표현된다.

$$r^T = [R(x, x^1), R(x, x^2), \dots, R(x, x^n)]^T \quad (4)$$

$$\beta = (f^T R^{-1} f)^{-1} f^T R^{-1} y \quad (5)$$

또한 β 과 y 사이의 분산 $\hat{\sigma}^2$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(y - f\beta)^T R^{-1} (y - f\beta)}{n_s} \quad (6)$$

마지막으로 상관인자(correlation parameter) θ_k 만 결정하면 크리깅 모델을 구성할 수 있다. θ_k 는 아래의 식과 같이 k 개의 설계변수를 갖고 제약조건이 없는 비선형 최적화 문제를 해결함으로써 얻을 수 있다.

$$\text{Maximize } \Phi(\theta_k) = -(\det R)^{\frac{1}{n}} \hat{\sigma}^2 \quad (7)$$

이러한 과정을 최우량 추정법 또는 MLE(Maximum Likelihood Estimate)라고 한다.

반응면 기법과 같은 회귀분석의 경우 일단 하나의 외재적 추정식을 구성하면 이를 이용해 각 지점에서의 값을 예측할 수 있다. 하지만 이러한 회귀분석의 경우 주어진 자료를 그대로 예측하지 못하면 단지 예측오차의 제곱값을 최소화할 뿐이다. 크리깅 모델은 여러 개의 국소 최적점을 모델링 할 수 있고 주어진 자료를 그대로 재생해내는 특징을 갖는 반면 내재적 관계식을 이용한다. 따라서 새로운 지점에서의 값을 예측하기 위해서는 크리깅 모델을 매번 새로이 구성해야 하므로 계산량이 증가하는 단점을 갖는다[9].

2.2 설계공간의 타당성 향상

Fig. 1은 보다 타당한 설계공간을 찾기 위한 과정을 순서대로 나타낸 것이다.

우선 초기 설계공간을 설정하고 그 범위 내에서 근사모델 구성을 위한 실험점을 선택한다. 본 연구에서는 각 실험점에 따른 근사모델의 정확성, 강건성 등을 비교해 보기 위해 Central Composite Design(CCD), Box-Behnken Design(BBD), D-optimality Design의 세 가지 방법을 이용하였다. 이렇게 선정된 실험점을 바탕으로 근사모델을 구성한다. 실제 해석모델을 이용하면 너무 많은 계산시간을 필요로 하기 때문

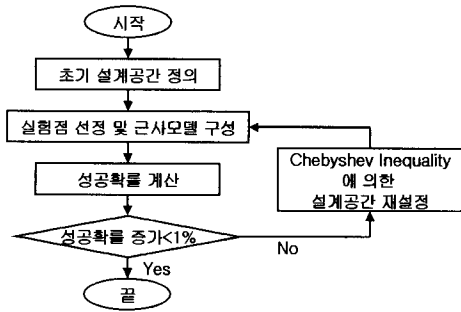


Fig. 1. Flow Chart

에 근사모델을 이용하여 성공확률을 구한다. 본 연구에서는 반응면과 크리깅 모델, 두 가지를 이용하여 각각의 결과를 비교해 보았다. 약 1,000,000개의 설계점을 설계공간 내에서 uniform distribution의 확률분포를 갖도록 선정하고 근사모델을 이용하여 각 점에서의 목적함수 값들을 예측한다. 이를 바탕으로 각 목적함수의 값이 제약조건을 모두 만족할 확률 즉, 성공확률을 계산한다. 이 성공확률의 증가량이 이전 단계에 비해 1% 미만이면 타당한 설계공간에 도달한 것으로 간주하고 성공확률이 1% 이상 증가하였으면 Chebyshev Inequality[10]를 이용해 설계공간을 이동시킨 후 위의 과정을 수렴할 때까지 반복 수행한다. Chebyshev Inequality는 다음과 같은 부등식으로 표현된다.

$$P(|x - \eta| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \quad (8)$$

즉, '확률변수 x 가 평균 η 로부터 임의의 양수 ϵ 만큼, 또는 그 이상 떨어져 있을 확률은 σ^2/ϵ^2 보다 작거나 같다.' 라는 부등식이다. 정규분포인 경우 확률변수 x 가 평균으로부터 2σ 안에 있을 확률은 약 95.5%이다.

Fig. 2는 Chebyshev Inequality를 이용한 설계

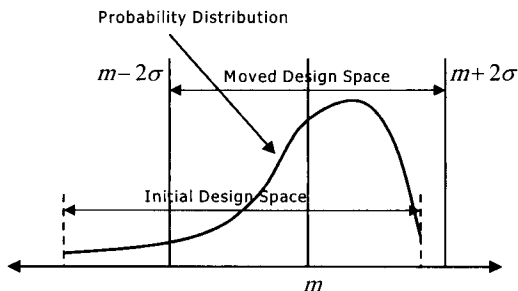


Fig. 2. Modification of Design Space by the Chebyshev Inequality

공간의 이동방법을 나타낸 그림이다. 초기 설계공간은 점선으로 표시된 범위이다. 이 범위 내에서 근사모델을 이용하여 성공확률분포를 계산한 후 이 분포의 평균과 표준편차를 이용하여 $m \pm 2\sigma$ 의 범위로 다음 설계공간을 결정한다.

Table 1. Design Variables and Initial Design Space

설계변수	최소값	기저값	최대값
Semi Span	44.322	46.655	48.988
Taper Ratio	0.19	0.2	0.21
LE Sweep Angle	23.275	24.5	25.725
t/c at root	0.1245	0.131	0.1376
t/c at tip	0.07885	0.083	0.08715

앞서 설명한 설계공간의 이동 과정을 공탄성을 고려한 천음속 항공기 익형설계에 적용하여 보았다. 공탄성 해석을 위해 공력은 VLM, 구조는 Wing-Box 모델을 사용하였다[2]. 설계를 위한 각 변수의 초기 범위는 Table 1과 같다. 여기서 기저값으로는 DC-9 항공기의 실제 데이터를 사용하였다. 설계 변수로는 항공기 익형의 형상과 관련된 5개의 변수를 선택하였다.

목적함수의 종류 및 제약조건은 Table 2와 같다. 익형의 성능을 나타내는 5개의 목적함수를 선택하였고 제약조건은 각 목적함수가 기저 형상에 비해 향상되도록 부과하였다. Table 2에서 아래첨자 0은 기저형상에서의 값을 나타낸다.

Table 2. Objectives and Constraints

목적함수	기저형상에서의 목적함수 값	제약조건
L/D	18.18	> (L/D) ₀
C _L	0.52	> (C _L) ₀
C _D	0.029	< (C _D) ₀
Weight(lb)	9976	< (Weight) ₀
Wing Area(ft ²)	499	> (Wing Area) ₀

크리깅 모델과 CCD 실험점을 사용한 경우 초기 설계공간에서의 성공확률 분포는 Fig. 3과 같다. 초기 설계공간에서 0이 아닌 성공확률을 갖는 영역은 대부분의 설계변수에 대해 극히 일부분에 해당된다. 예를 들어 첫 번째 설계변수인 Semi Span의 경우 기저값 부근에서만 성공확률을 갖고 나머지 영역에서는 성공확률이 '0'이다. 따라서 모든 제약조건을 동시에 만족할 확률은 약 0.016% 밖에 되지 않는다.

Fig. 1에 설명된 설계공간의 이동과정을 9번 반복 수행하면 수렴된 설계공간에 도달한다. Fig. 4

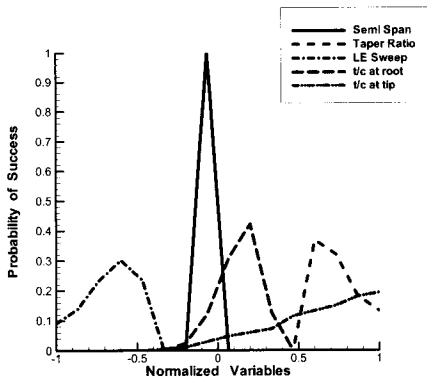


Fig. 3. Probability Distribution in the Initial Design Space

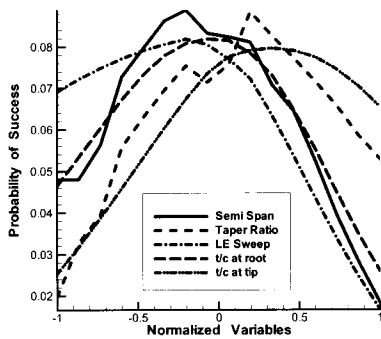


Fig. 4. Probability Distribution in the Converged Design Space

는 수렴된 설계공간에서의 성공확률 분포를 나타낸다. 수렴된 설계공간에서는 성공확률 분포가 정규분포에 가까워지면서 성공확률이 '0'이었던 부분들이 거의 사라졌다. 따라서 모든 제약조건을 만족할 확률은 24.38% 로 크게 증가한다. 즉 설계공간의 타당성이 향상되었다고 할 수 있다.

Fig. 5는 초기 설계공간과 수렴된 설계공간의 크기를 상대적으로 비교한 그림이다. Semi Span의 경우 초기 설계공간의 범위가 너무 컸기 때문에 수렴된 이후에는 가운데의 매우 좁은 영역으로 이동된다. 또한 Taper Ratio의 경우 초기 설계공간의 크기는 적당하지만 위치가 너무 왼쪽으로 치우쳐 있었기 때문에 수렴된 이후에는 오른쪽으로 옮겨진다. 이와 같이 초기에 설정된 설계공간은 타당성이 높은 영역과는 상당한 차이가 있고 따라서 성공확률도 매우 떨어진다고 볼 수 있다.

Fig. 6은 첫 번째 목적함수인 양항비에 대한 확률 밀도 함수를 나타낸 그림이다. 점선으로 표시된 그래프는 초기 설계공간에서의 확률 분포를

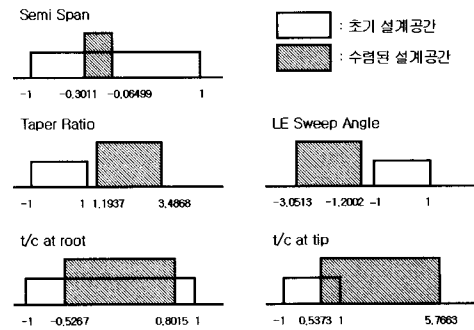


Fig. 5. Comparison of Initial and Converged Design Space

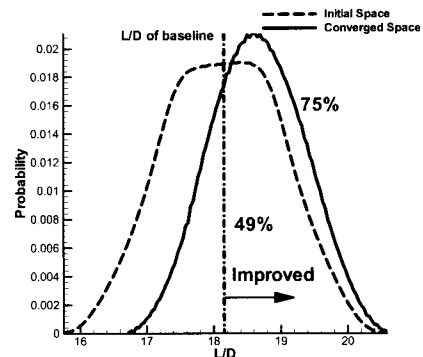


Fig. 6. Probability Density Function for L/D

나타내고 실선으로 표시된 그래프는 수렴된 설계공간에서의 확률 분포를 나타낸다. 기저값에서의 양항비 18.18보다 증가하도록 첫 번째 제약조건을 잡았는데 초기 설계공간에서는 그 확률이 약 49%이다. 하지만 앞의 과정을 통해 설계공간을 이동시킨 후에는 확률 밀도 함수 그래프가 오른쪽으로 이동되면서 첫 번째 제약조건을 만족할 확률이 75%로 크게 증가함을 볼 수 있다. 즉 설계공간을 이동시킴으로써 제약조건을 만족할 확률이 증가하였으며 나머지 제약조건들에 대해서도 마찬가지로 결과를 보인다.

2.3 반응면 모델과 크리깅 모델 비교

아래의 Table 3은 CCD 실험점을 사용한 경우 크리깅 모델과 반응면 모델의 오차를 비교한 표이다. 모델을 구성하기 위해 사용했던 실험점 외에 다른 위치에 있는 32개의 임의의 점을 선택해서 평균오차(Averaged Absolute Error)를 계산하였다. 반응면 모델에 비해 크리깅 모델의 오차가 상대적으로 큰 것을 확인할 수 있으며 다른 실험

점 방법을 사용한 경우에도 마찬가지로 결과를 나타낸다. 하지만 모든 목적함수에 대해 평균 오차가 1% 미만이므로 반응면 모델이나 크리깅 모델 모두 실제 설계공간을 잘 표현해낸다고 볼 수 있다.

Table 3. Error of Each Approximation Model

	Krig	RSM
L/D	0.4313%	0.01541%
CL	0.02274%	0.003022%
CD	0.5770%	0.02995%
Weight	0.1623%	0.03646%
Wing Area	0.2855%	$3.52 \times 10^{-7}\%$

Fig. 7과 8은 수렴된 설계공간에서의 성공확률 분포를 비교한 그림이다.

여섯 가지 경우 모두 성공확률이 0인 부분이 사라지고 정규분포와 같은 확률분포를 보이고 있다. 반응면 모델을 이용한 경우엔 실험점의 종류에 관계없이 거의 비슷한 확률 분포를 보이는 반면 크리깅 모델을 이용한 경우엔 성공확률의 분포가 실험점의 종류에 따라 서로 다르게 나타난다.

Fig. 9는 첫 번째 설계변수인 Semi Span의 경우에 대해 수렴된 설계공간을 상대적으로 비교한 그림이며, 가로축은 무차원화된 설계변수를 의미한다. 반응면을 이용한 경우에는 거의 같은 설계

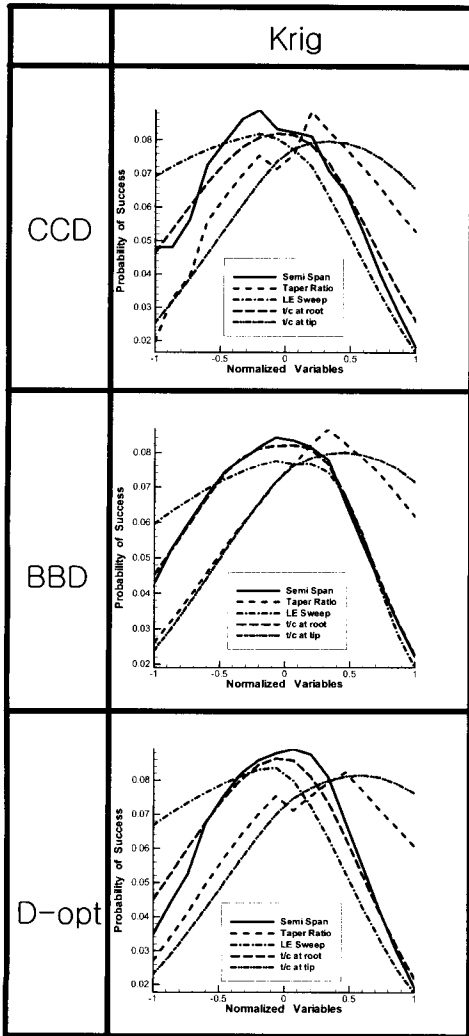


Fig. 7. Probability Distribution of Each Converged Design Space with Kriging Model

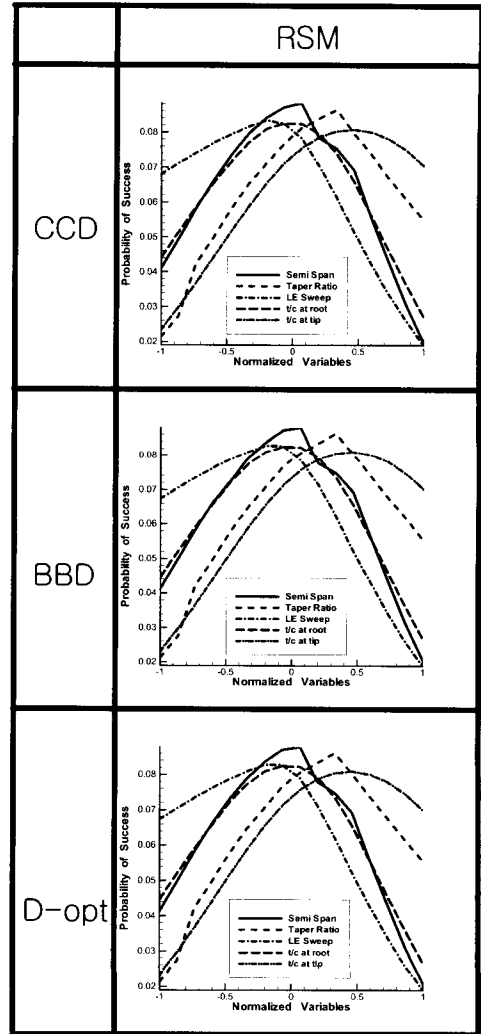


Fig. 8. Probability Distribution of Each Converged Design Space with Response Surface Model

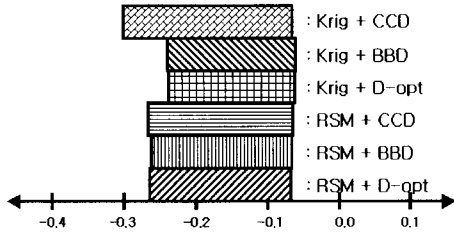


Fig. 9. Comparison of Each Converged Design Space

범위로 수렴된 반면 크리깅을 이용한 경우에는 실험점의 종류에 따라 차이를 보인다.

즉 Fig. 7~9를 통해 크리깅 모델에 비해 반응면 모델이 실험점의 종류에 관계없이 강건한 특성을 보인다고 할 수 있다.

2.4 최적화 결과

앞에서 구한 6가지 경우의 수렴된 설계공간 내에서 양항비를 최대화하고 무게를 최소화하는 다중목적함수의 최적화를 수행하였다. 목적함수의 형태는 다음과 같다.

Maximize :

$$F(x) = w_1 \times \frac{L/D}{(L/D)_0} + w_2 \times \frac{W_0}{W} \quad (9)$$

양항비와 무게를 똑같은 비율로 고려하기 위해 각 값을 기저형상에서의 값으로 무차원화 하였으며 가중치 w_1, w_2 도 똑같이 0.5를 사용하였다. 설계변수 및 제약조건은 앞서 정한 것과 동일하며 초기 설계공간에서의 최적화 결과는 아래와 같다.

- L/D = 18.45
- Weight = 9965 lb
- Cruise Range = 1672 nm

Table 4는 근사모델과 실험점을 각각 달리 사용하여 구한 여섯 가지의 수렴된 설계공간 내에서 최적화를 수행한 결과이다. W는 무게를, Rng는 항속거리를 각각 나타낸다.

Table 4에서 Exct는 실제 해석코드를 이용해 구한 최적값이고 Meta는 근사모델을 이용해 구한 최적값이다. 여섯 가지 경우 모두 초기 설계공간에서의 최적화 결과에 비해 양항비는 증가하고 무게도 대체로 감소함을 확인할 수 있다. 이는 설계공간의 이동을 통해 보다 우수한 최적점이 설계공간 내에 포함되었기 때문이다.

반응면을 이용한 경우가 보다 정확하고 모델

구성 시간도 빠르며 강건한 특징을 보이므로, 앞의 예제에서는 반응면을 사용하는 편이 훨씬 유리하다. 하지만 가장 우수한 최적해는 오히려 크리깅 모델과 CCD 방법을 사용한 경우였다. 이는 수렴된 설계공간의 위치나 크기 등의 다른 요인들이 크게 작용한 결과로 볼 수 있다.

Table 4. Optimization Results in Converged Design Spaces

		CCD		BBD		D-opt	
		Exct	Meta	Exct	Meta	Exct	Meta
KG	L/D	19.98	19.99	19.57	19.56	19.52	19.58
	W(lb)	9951	9951	9950	9951	9961	9976
	Rng(nm)	1811	1810	1776	1776	1774	1776
	t(s)	122	6.47	103	4.44	96.1	13.8
RS	L/D	19.70	19.81	19.68	19.78	19.68	19.78
	W(lb)	9946	9976	9950	9976	9947	9976
	Rng(nm)	1788	1796	1787	1793	1786	1794
	t(s)	85.6	1.09	105	1.45	85.4	1.11

III. 결 론

본 연구에서는 근사모델을 이용하여 설계공간을 이동시킴으로써 타당성을 향상시킬 수 있는 방법을 제시하였다. 이를 공간성을 고려한 천음속 항공기 익형 설계문제에 적용하여 타당성이 크게 증가함을 확인할 수 있었고 초기 설계공간에 비해 이동된 설계공간에서 보다 향상된 최적 결과도 얻을 수 있었다. 즉 설계공간을 이동시킴으로써 주어진 제약조건을 만족할 확률이 증가하고 보다 우수한 최적점이 설계공간 안에 포함된 것이다.

또한 위의 과정에 필요한 근사모델로 반응면과 크리깅 모델 두 가지를 사용하였는데, 반응면 모델을 이용한 경우가 크리깅 모델에 비해 구성 시간이 짧고 정확하며 실험점의 종류에 관계없이 거의 일관된 결과를 보였다. 이는 본 연구에서 적용한 해석모델의 선형성으로 인하여 설계공간이 원활한 2차의 특성을 지니기 때문으로 풀이된다. 따라서 비교적 선형적인 문제의 경우 크리깅 모델에 비해 반응면 모델을 사용하는 것이 보다 경제적이다. 하지만 최적화 결과에는 설계공간의 위치, 크기 등 다른 요인들도 큰 영향을 미치므로 향후 이러한 요소들을 추가로 고려한 연구가 필요하다.

후 기

본 연구는 서울대학교 BK21 기계분야사업단 및

한양대학교 최적설계신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었으며, 연구에 도움을 주신 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- 1) 구요천, "반응면 기법과 크리깅 기법을 이용한 설계공간의 타당성 검증", 서울대학교 기계항공공학부 석사학위 논문, 2004.
- 2) 윤성환, 안재권, 이동호, "날개 기본형상의 다분야간 최적화 설계에 관한 연구", 한국항공우주학회지, 제 27권, 제 6호, 1999, pp. 128-138.
- 3) R. H. Myers, D. C. Montgomery, *Response Surface Methodology*, John Wiley & Sons, 1995.
- 4) J. Sacks, W. J. Welch, T. J. Mitchell, H. P. Wynn, "Design and Analysis of Computer Experiments", *Statistical Science* Vol. 4, No. 4, 1989, pp. 409~435.
- 5) T. W. Simpson, T. M. Meurey, J. J. Korte, F. Mistree, "Comparison of Response Surface and Kriging Model for Multidisciplinary Design Optimization", AIAA 98-4755, 1998.
- 6) A. A. Giunta, L. T. Watson, "A Comparison of Approximation Modeling Techniques : Polynomial versus Interpolating Models", AIAA 98-4758, 1998.
- 7) H. S. Chung, J. J. Alonso, "Comparison of Approximation Models with Merit Functions for Design Optimization", AIAA 2000-4754, 2000.
- 8) R. Jin, W. Chen, "Comparison Studies of Metamodeling Techniques under Multiple Modeling Criteria", AIAA 2000-4801, 2000.
- 9) 최종근, "공간정보 모델링-크리깅과 최적화 기법", 구미서관, 2002, pp. 125~163.
- 10) A. Papoulis, S. U. Pillai, "*Probability, Random Variables and Stochastic Processes*", McGraw Hill, 2002, pp. 83~105 & 151~152.