

論文

비등방 정지부 및 비대칭 회전부를 갖는 회전체의 주파수응답함수 특성에 관한 연구

한동주*

A Study on the Characteristics of Frequency Response Functions for Rotor System with Anisotropic Stator and Asymmetric Rotor

Dong-Ju Han*

ABSTRACT

Based upon the derived analytical model and equation of motion for the general rotor system with anisotropic stator and asymmetric rotor treated as a periodically time-varying system, the series of equations are structured by associating with the time modulated coefficients. The *frequency response functions* (FRFs) expressed by physical parameters are derived in such a convenient way from the direct inverse matrices of the Fourier transformation of those series of equations, from which the characteristics are analyzed and the properties are suggested.

초 록

주기적 시변계인 비등방 정지부 및 비대칭 회전부를 갖는 일반 회전체에 대해서, 유도된 해석 모델 및 운동방정식으로부터 시 변조계수를 이용하여 급수방정식을 구성하였다. 이들 운동방정식의 물리적인 변수를 이용한 직접 푸리에변환의 역행렬로부터 주파수응답함수를 용이하게 유도하였고, 이들의 특성 및 경향을 분석 제시하였다.

Key Words : Anisotropy(비등방성), Asymmetry(비대칭성), General Rotor System(일반회전체), Frequency Response Function(주파수응답함수)

1. 서 론

회전체는 항공 우주 및 기타 산업계에서 사용되는 주요 구조물 또는 부품으로서, 회전익기 주. 꼬리날개 조립체, 가스터빈 엔진의 로타, 펌프, 프로펠라, 모타 회전부, 자이로장치 등 회전 구조물을 통칭한다.

여기서 회전체는 네가지로 분류된다[1]. 첫째, 정지부(stator part)가 등방성(isotropy)이고 회전부(rotor part)도 대칭(symmetric)인 등방회전체

(isotropic rotor)로서, 이상적인 모델로 현재 대부분 회전체 해석에 있어 근간을 이루며 통용되고 있다. 둘째, 정지부가 비등방성(anisotropy)이고 회전부가 대칭인 비등방회전체(anisotropic rotor)로서, 저널(journal)이나 전자기력 베어링을 갖는 회전체가 있다. 이는 정지부의 감쇠,탄성계수 등 물리적 경향이 수평.수직방향간 비대칭 특성을 보이는 경우를 말한다. 이에 반해 셋째로는, 정지부가 등방성이고 회전부가 비대칭인 비대칭회전체(asymmetric rotor)로서, 비대칭 형상 또는 홀수개의 프로펠라 깃을 갖는 회전부나 홈, 슬롯(slot), 열린 균열(open crack) 등이 있는 축으로 구성된 회전체가 있다. 이는 회전부의 관성,감쇠,탄성계수 등이 비대칭 특성을 보이는 경우를 말한다. 넷째로는 정지부 및 회전부가 각각 비

† 2005년 2월 12일 접수 ~ 2005년 8월 4일 심사완료

* 정회원, (주)썬에어로시스 기술연구소

연락처, E-mail : djhan@sunaerosys.com

충남 연기군 남면 송원리 248-1

등방, 비대칭인 일반회전체(general rotor)로서 일반적으로 가장 실제적인 회전체라 할 수 있다.

자율계(autonomous system)[5]로 대변되는 (비) 등방 또는 비대칭회전체의 경우에는 기존에 정칙해(analytic solution)가 도출되어[1~8] 주파수응답함수가 모드 상호간 일정한 관계로 정립될 수 있으나, 주기적시변계(periodically time-varying system)로서 비 자율계(non-autonomous system)인 일반회전체의 경우에는 비자기수반(non-self adjoint)을 동반한 직교성(orthogonality)의 문제로 인해 특별한 경우[3]를 제외하고는 해가 거의 부재한 실정이다.

주파수응답함수(Frequency Response Function : FRF)는 스펙트럼 형상 및 동적특성을 통한 구조설계 등에 있어 필수적이다. 여기서 동적 응답특성을 파악하기 위해서는 주파수 응답함수로부터 시험적인 모드형상 및 모드변수를 추출하여야 하고, 이를 위한 계(system)의 FRF를 구하여야 한다.

본 연구는 (비)등방 및 비대칭회전체를 포함한 일반회전체에 대해서 이러한 FRF의 전반적인 특성과 경향을 기존 (비)등방(비대칭)회전체의 경우와 비교하여 제시하고자 하며, 이러한 FRF를 도출함에 있어, 운동방정식의 물리적 변수를 이용한 직접적인 역행렬로부터 용이하게 구하도록 하였다.

II. 일반회전체의 FRF 특성

2.1. 운동방정식의 유도

본 연구에서는 일반 회전체와 같은 주기적인 시변계에 관한 해의 양상을 살피기 위해 간단한 실제적인 형태의 모델로부터 운동방정식을 유도하여 수치적인 해를 구하도록 한다. 이를 위해 베어링 질량 효과를 무시한 그림 1과 같은 xyz 좌표계와 비대칭 축과 디스크, 비등방 베어링부로 구성된 회전체 모델을 도입한다.

축과 베어링의 질량효과 및 병진(translation)과 회전(rotation)과의 연성효과는 무시하기로 하고, 조임/이음부효과는 k_r, k_θ, k_ψ 등에 반영한다.

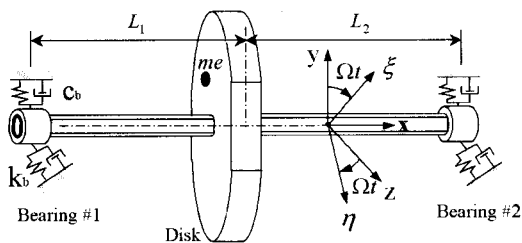


그림 1. General rotor model for analysis

y, z 방향의 실수좌표계를 다음과 같은 복소좌표계(j는 허수)로 변환하면[1~4]

$$r = y + jz, \quad \phi = \theta_y + j\theta_z, \quad (1)$$

각각의 좌표계를 다음과 같이 표시한다.

$$y = [y_d, \theta_y, y_1, y_2]^T, \quad z = [z_d, \theta_z, z_1, z_2]^T, \quad p = y + jz = [r_d, \phi, r_{b1}, r_{b2}]^T$$

$$f_y = [f_{y_d}, f_{\theta_y}, 0, 0]^T, \quad f_z = [f_{z_d}, f_{\theta_z}, 0, 0]^T, \quad g = f_y + jf_z. \quad (2)$$

여기서 $y_d, \theta_y, z_d, \theta_z$ 와 $y_{b1}, y_{b2}, z_{b1}, z_{b2}$ 는 각각 디스크의 병진 및 회전, 베어링 1,2의 변위를 의미하며, f_{y_d}, f_{θ_y} 와 $T_{\theta_y}, T_{\theta_z}$ 는 각각 디스크에 작용하는 y-z 방향의 힘과 토크를 의미한다.

이들로부터 운동에너지(T), 포텐셜에너지(V) 및 Rayleigh의 소모함수(dissipation function: F) 등은 다음과 같이 정의된다[7~9].

$$T = \frac{1}{2} \left\{ J_p \Omega^2 + J_p \Omega (\theta_y \dot{\theta}_z - \theta_z \dot{\theta}_y) + m (\dot{y}_d^2 + \dot{z}_d^2) + J (\dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_z^2) + \Delta J [(\dot{\theta}_y^2 - \dot{\theta}_z^2) \cos 2\Omega t + 2\dot{\theta}_y \dot{\theta}_z \sin 2\Omega t] \right\}$$

$$V = \frac{1}{2} \left\{ k_r (\delta y_d^2 + \delta z_d^2) + \Delta k_r [(\delta y_d^2 - \delta z_d^2) \cos 2\Omega t + 2\delta y_d \delta z_d \sin 2\Omega t] + k_\theta (\delta \theta_y^2 + \delta \theta_z^2) + \Delta k_\theta [(\delta \theta_y^2 - \delta \theta_z^2) \cos 2\Omega t + 2\delta \theta_y \delta \theta_z \sin 2\Omega t] + k_{b1} (y_1^2 + z_1^2) + \Delta k_{b1} (y_1^2 - z_1^2) + k_{b2} (y_2^2 + z_2^2) + \Delta k_{b2} (y_2^2 - z_2^2) \right\}$$

$$F = \frac{1}{2} \left\{ c_r (\delta \dot{y}_d^2 + \delta \dot{z}_d^2) + c_\theta (\delta \dot{\theta}_y^2 + \delta \dot{\theta}_z^2) + c_{b1} (\dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \Delta c_{b1} (\dot{y}_1^2 - \dot{z}_1^2) + c_{b2} (\dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \Delta c_{b2} (\dot{y}_2^2 - \dot{z}_2^2) \right\} \quad (3)$$

여기서 각 물리적 변수들 $\Omega, J_p, J, k_r, k_\theta, k_{r,2}, c_r, c_\theta, c_{b1,2}, k_{b1,2}$ 는 각각 회전수, 원판의 극 직경관성모멘트, 축의 탄성계수, 축/디스크의 내부 점성계수, 베어링 1,2의 점성계수 및 탄성계수를 표시하고 $\Delta J, \Delta k_r, \Delta k_\theta, \Delta k_{r,2}, \Delta c_{b1,2}, \Delta k_{b1,2}$ 는 각각 이들의 편차량을 표시한다. 하첨자 d, 1 및 2는 각각 디스크, 베어링 1 및 베어링 2를 표시하고, 각각의 절대변위는 다음과 같으며

$$\delta y_d = y_d - i_2 y_1 - i_1 y_2, \quad \delta z_d = z_d - i_2 z_1 - i_1 z_2,$$

$$\delta \theta_y = \theta_y - (z_2 - z_1)/L, \quad \delta \theta_z = \theta_z + (y_2 - y_1)/L, \quad (4)$$

여기서, $L = L_1 + L_2, i_1 = L_1/L, i_2 = L_2/L$ 이고, g_i 는 i -th 좌표계의 일반힘(generalized force)을 표시한다. 이들을 힘-일 관계로부터 유도된 에너지함수를 이용 다음과 같은 Lagrange 방정식에 대입하면

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = g_i,$$

$$(i = y_d, z_d, \theta_y, \theta_z, y_1, z_1, y_2, z_2) \quad (5)$$

이로부터 최종적으로 유도된 복소좌표계를 이용한 운동방정식은 다음과 같다[1~4,8].

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{M}_r e^{j2\Omega t} \ddot{\bar{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{C}_r \dot{\bar{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{C}_r e^{j2\Omega t} \dot{\bar{\mathbf{p}}}(t) \\
 & + \mathbf{K}_r \mathbf{p}(t) + \mathbf{K}_r \bar{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{K}_r e^{j2\Omega t} \bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{g}(t), \quad (6)
 \end{aligned}$$

여기서 $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ 는 4×4 복소질량, 감쇠, 탄성행렬을 각각 표시하는데 그 구성요소는 부록에 명시하였다. 이때 하첨자 f, b, r 는 등방, 비등방, 비대칭성분을 각각 의미하고, 4×1 응답벡터 $\mathbf{p}(t)$ 와 입력벡터 $\mathbf{g}(t)$ 는 다음과 같은 실수성분의 응답벡터 $\mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)$ 와 입력벡터, $\mathbf{f}_y(t), \mathbf{f}_z(t)$ 로 구성된다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}(t) &= \mathbf{y}(t) + j\mathbf{z}(t), & \bar{\mathbf{p}}(t) &= \mathbf{y}(t) - j\mathbf{z}(t), \\
 \mathbf{g}(t) &= \mathbf{f}_y(t) + j\mathbf{f}_z(t), & \bar{\mathbf{g}}(t) &= \mathbf{f}_y(t) - j\mathbf{f}_z(t), \quad (7)
 \end{aligned}$$

단, j 는 허수부를 표시한다.

2.2. FRFs의 유도 및 특성

주기적시변계를 대표하는 식(6)의 FRFs는 플로케 이론[3,4]으로부터 구한 시간해로부터 고유치 및 (좌, 우)고유벡터로 구성된 부분전개식을 사용할 수 있으나[1~3,6], 여기서는 주파수영역에서의 양상을 살피기에 용이한 물리적 변수로만 구성된 직접적인 형태를 도출하기로 한다.

비등방회전체의 경우, 식(6)과 그의 공액쌍으로부터 일련의 방정식을 구성하여 그로부터 해석해를 구할 수 있고, 직접적인 Fourier 변환 또는 모드해석을 통해 FRF를 구할 수 있다. 비대칭회전체의 경우는 시간변조계수인 $e^{-j2\Omega t}$ 를 곱한 공액쌍을 구성하여 비등방회전체와 마찬가지로 구할 수 있다. 이들은 모두 정확해가 존재함으로써 그간 해석적인 연구가 가능하였다[1~3]. 이를 본 일반회전체의 경우에 응용하기로 한다. 즉, ... $e^{jA\Omega t}, \dots e^{j2\Omega t}, \dots e^{j2k\Omega t}, \dots$ 등의 시간 변조(modulation) 계수를 식 (6) 및 그의 공액쌍에 순차적으로 곱하고 이들을 조합하게 되는데, ..., $Eq.(6) \times e^{j2k\Omega t}, Eq.(6) \times e^{j2k\Omega t}, Eq.(6) \times e^{-j2k\Omega t}, Eq.(6) \times e^{-j2k\Omega t}, Eq.(6) \times e^{jAk\Omega t}, Eq.(6) \times e^{jAk\Omega t}, Eq.(6) \times e^{-jAk\Omega t}, Eq.(6) \times e^{-jAk\Omega t}, \dots$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 등을 순차적으로 나열하면 다음 식 (8)과 같은 일련의 선형 방정식이 구성된다.

식(8)에 대해서 주파수(ω) 영역에 대한 Fourier 변환을 시키면 다음과 같은 12(=3×4) 폭(band)을 갖는 힐(Hill)[4,7] 형태의 FRF 행렬(Frequency Response Function Matrix : FRFM)로 구성된 스펙트

럼에 관한 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \dots & & & & \dots \\ & \mathbf{M}_r & & & \\ & \mathbf{M}_r & \mathbf{M}_r & & \\ & \mathbf{M}_r & \mathbf{M}_r & & \\ & & & \mathbf{M}_r & \\ & & & & \mathbf{M}_r \\ \dots & & & & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \bar{\mathbf{p}} e^{-j2\Omega t} \\ \bar{\mathbf{p}} e^{-j2\Omega t} \\ \bar{\mathbf{p}} \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}} e^{j2\Omega t} \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}} e^{j2\Omega t} \\ \dots \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \dots & & & & \dots \\ & \bar{\mathbf{C}}_r & & & \\ & \bar{\mathbf{C}}_r & & & \\ & \bar{\mathbf{C}}_r & \mathbf{C}_r & & \\ & & \bar{\mathbf{C}}_r & \bar{\mathbf{C}}_b & \\ & & & \mathbf{C}_b & \mathbf{C}_r \\ & & & & \mathbf{C}_r \\ \dots & & & & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \bar{\mathbf{p}} e^{-j2\Omega t} \\ \bar{\mathbf{p}} e^{-j2\Omega t} \\ \bar{\mathbf{p}} \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}} e^{j2\Omega t} \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}} e^{j2\Omega t} \\ \dots \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \dots & & & & \dots \\ & \bar{\mathbf{K}}_r & & & \\ & \bar{\mathbf{K}}_r & \mathbf{K}_r & & \\ & \bar{\mathbf{K}}_r & \mathbf{K}_r & \mathbf{K}_r & \\ & & \bar{\mathbf{K}}_r & \bar{\mathbf{K}}_b & \\ & & & \mathbf{K}_b & \mathbf{K}_r \\ & & & & \mathbf{K}_r \\ \dots & & & & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \bar{\mathbf{p}} e^{-j2\Omega t} \\ \bar{\mathbf{p}} e^{-j2\Omega t} \\ \bar{\mathbf{p}} \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}} e^{j2\Omega t} \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}} e^{j2\Omega t} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \bar{\mathbf{g}} e^{-j2\Omega t} \\ \bar{\mathbf{g}} e^{-j2\Omega t} \\ \bar{\mathbf{g}} \\ \mathbf{g} \\ \bar{\mathbf{g}} e^{j2\Omega t} \\ \mathbf{g} e^{j2\Omega t} \\ \dots \end{bmatrix} \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \dots \\ \bar{\mathbf{P}}(\omega+2\Omega) \\ \mathbf{P}(\omega+2\Omega) \\ \bar{\mathbf{P}}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \\ \dots \\ \bar{\mathbf{P}}(\omega-2\Omega) \\ \mathbf{P}(\omega-2\Omega) \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & & & & \dots \\ & \mathbf{B}_1 & \mathbf{D}_1 & & \\ & \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{E}_1 & \\ & & & & \mathbf{0} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \dots & & & & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \bar{\mathbf{G}}(\omega+2\Omega) \\ \mathbf{G}(\omega+2\Omega) \\ \bar{\mathbf{G}}(\omega) \\ \mathbf{G}(\omega) \\ \dots \\ \bar{\mathbf{G}}(\omega-2\Omega) \\ \mathbf{G}(\omega-2\Omega) \\ \dots \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \dots & & & & \dots \\ & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_1} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_2} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_3} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_4} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_5} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_6} \\ & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_1} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_2} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_3} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_4} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_5} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_6} \\ & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_2} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_3} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_4} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_5} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_6} & \\ & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_3} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_4} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_5} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_6} & & \\ & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_4} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_5} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_6} & & & \\ & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_5} & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_6} & & & & \\ & \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}_6} & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \dots & & & & & & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \bar{\mathbf{G}}(\omega+2\Omega) \\ \mathbf{G}(\omega+2\Omega) \\ \bar{\mathbf{G}}(\omega) \\ \mathbf{G}(\omega) \\ \dots \\ \bar{\mathbf{G}}(\omega-2\Omega) \\ \mathbf{G}(\omega-2\Omega) \\ \dots \end{bmatrix} \quad (9)
 \end{aligned}$$

여기서, 각각의 동강성계수(dynamic stiffness matrices)는 다음과 같은 물리적 변수로 구성되며

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_k &= -(2k\Omega + \omega)^2 \mathbf{M}_r + j(2k\Omega + \omega) \mathbf{C}_r + \mathbf{K}_r, \\
 \mathbf{B}_k &= -(2k\Omega + \omega)^2 \bar{\mathbf{M}}_r + j(2k\Omega + \omega) \bar{\mathbf{C}}_r + \bar{\mathbf{K}}_r,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_k &= j(2k\Omega + \omega)C_b + K_b, \quad \bar{D}_k = j(2k\Omega + \omega)\bar{C}_b + \bar{K}_b, \\ E_k &= -[2(k-1)\Omega + \omega]M_r + j[2(k-1)\Omega + \omega]C_r + K_r, \\ \bar{F}_k &= -[2(k+1)\Omega + \omega]^2\bar{M}_r + j[2(k+1)\Omega + \omega]\bar{C}_r + \bar{K}_r, \end{aligned} \quad (10)$$

$G[\omega] = F[g(t)]$ 는 입력스펙트럼을 표시한다. 이로부터 A_k 및 \bar{B}_k , C_k 및 \bar{D}_k , E_k 및 \bar{F}_k 는 각각 등방, 비등방, 비대칭성을 표시하고, 이들로부터 각 FRFs의 특성을 결정한다. 이때, 실선과 점선으로 표시한 부위는 특별히 각각 비등방성과 비대칭회전체의 경우를 표시한다[1~3].

등방회전체의 경우에는 다음과 같은 순방향의 FRF(normal directional FRF : n-dFRF)만 존재한다. 이때, 순방향이란, 정(+).부(-) 방향의 주파수영역에서 등방성의 경향을 나타냄을 의미한다.

$$H_{g_0, p_0}^1 = A_0^{-1} = (K_r + j\omega C_r - \omega^2 M_r)^{-1}, \quad (11)$$

이때, H_{g_k, p_k}^n 는 다음을 의미한다.
n : 방정식행렬의 규모(order of matrix), 1 ; 등방, 2 ; 비등방 또는 비대칭, k : 입력 스펙트럼의 위치, s : 출력스펙트럼의 위치

마찬가지로 비등방성회전체의 경우에는 표시된 실선 부분으로서 순방향 FRF의 경우 다음과 같고

$$H_{g_0, p_0}^2 = [A_0 - C_0 \bar{B}_0^{-1} D_0]^{-1}, \quad H_{g_0, p_0}^2 = [\bar{B}_0 - D_0 A_0^{-1} C_0]^{-1}, \quad (12)$$

역방향 FRF(reverse directional FRF : r-dFRF)의 경우 다음과 같다. 이때, 역방향이란, 비등방 또는 비대칭성의 경향을 의미한다.

$$H_{g_0, p_0}^2 = -[A_0 - C_0 \bar{B}_0^{-1} D_0]^{-1} C_0 \bar{B}_0^{-1}, \quad H_{g_0, p_0}^2 = -[\bar{B}_0 - D_0 A_0^{-1} C_0]^{-1} D_0 A_0^{-1}, \quad (13)$$

식(10),(12) 및 (13)으로부터 각 FRFs간 다음과 같은 공액대칭성(conjugate even)을 발견할 수 있다.

$$H_{g_0, p_0}^2(\omega) = \bar{H}_{g_0, p_0}^2(-\omega), \quad H_{g_0, p_0}^2(\omega) = \bar{H}_{g_0, p_0}^2(-\omega). \quad (14)$$

이로부터 공액대칭요소 사이에는 $\omega = 0$ 을 축으로 하여 대칭임을 알 수 있다.

비대칭회전체의 경우에는 표시된 점선 부분으로서 n-dFRFs의 성분은 다음과 같고

$$H_{g_0, p_0}^2 = [A_0 - E_0 \bar{B}_0^{-1} \bar{F}_0]^{-1}, \quad H_{g_0, p_0}^2 = [\bar{B}_0 - \bar{F}_0 A_0^{-1} E_0]^{-1}, \quad (15)$$

r-dFRFs의 경우 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H_{g_0, p_0}^2 &= -[A_0 - E_0 \bar{B}_0^{-1} \bar{F}_0]^{-1} E_0 \bar{B}_0^{-1}, \\ H_{g_0, p_0}^2 &= -[\bar{B}_0 - \bar{F}_0 A_0^{-1} E_0]^{-1} \bar{F}_0 A_0^{-1}, \end{aligned} \quad (16)$$

마찬가지로 식(10),(15) 및 (16)으로부터 각 FRFs간

공액대칭성을 발견할 수 있다.

$$H_{g_0, p_0}^2(\omega) = \bar{H}_{g_0, p_0}^2(2\Omega - \omega), \quad H_{g_0, p_0}^2(\omega) = \bar{H}_{g_0, p_0}^2(2\Omega - \omega). \quad (17)$$

이 경우에는 각 공액대칭요소 사이에 $\omega = \Omega$ 을 축으로 하여 대칭임을 알 수 있다. 이는 식 (8)의 공액쌍(pair)에 대해서 2Ω 만큼 변조시킨 귀결이다.

식(9)로 표현되는 일반회전체의 경우에는 적절한 행렬규모로부터 출력스펙트럼에 대한 근사값을 구할 수 있고 그 이상은 잔여모드(residual mode)로서 실제적인 영향이 미미하다. 이 경우에는 비등방(비대칭)회전체의 해를 기저(base)로 하여 순환 계산법[10]을 이용하여 구할 수 있다. 만일 비대칭회전체를 기저로 할 경우, 행렬규모 6에 대한 n-dFRFs는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H_{g_0, p_0} &= -h_6^{-1} h_4, \quad H_{g_0, p_0} = h_2^{-1} [I + \bar{D}_0 h_6^{-1} C_0 h_3^{-1}], \\ H_{g_0, p_0} &= h_1^{-1} [I + E_1 \bar{B}_0^{-1} \bar{D}_0 h_6^{-1} C_0 h_3^{-1} \bar{F}_0 A_1^{-1}], \\ H_{g_0, p_0} &= -h_5^{-1}, \quad H_{g_0, p_0} = -h_7^{-1} [C_{-1} h_5^{-1} \bar{D}_{-1} h_7^{-1} I], \dots \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 r-dFRFs 중 비등방요소는 다음과 같고

$$\begin{aligned} H_{g_0, p_0} &= -h_6^{-1} C_0 h_3^{-1}, \quad H_{g_0, p_0} = h_2^{-1} \bar{D}_0 h_6^{-1} h_4, \\ H_{g_0, p_0} &= h_7^{-1} C_{-1} h_5^{-1}, \quad H_{g_0, p_0} = h_5^{-1} \bar{D}_{-1} h_7^{-1}, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

비대칭요소는 다음과 같으며

$$\begin{aligned} H_{g_0, p_0} &= -h_1^{-1} E_1 \bar{B}_0^{-1} [\bar{D}_0 C_0 h_3^{-1} + I], \\ H_{g_0, p_0} &= -h_2^{-1} [\bar{D}_0 h_6^{-1} C_0 h_3^{-1} + I] \bar{F}_0 A_1^{-1}, \\ H_{g_0, p_0} &= A_0^{-1} h_4 E_0 h_5^{-1}, \quad H_{g_0, p_0} = h_5^{-1} \bar{F}_1 A_0^{-1} h_4, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

비등방/비대칭 결합요소는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H_{g_0, p_0} &= -h_1^{-1} E_1 \bar{B}_0^{-1} \bar{D}_0 h_6^{-1} h_4, \quad H_{g_0, p_0} = h_6^{-1} C_0 h_3^{-1} \bar{F}_0 A_1^{-1}, \\ H_{g_0, p_0} &= -A_0^{-1} h_4 E_0 h_5^{-1} \bar{D}_{-1} h_7^{-1}, \\ H_{g_0, p_0} &= -\bar{D}_{-1} h_7^{-1} A_0^{-1} h_4 E_0 h_5^{-1} \bar{D}_{-1} h_7^{-1}, \\ H_{g_0, p_0} &= -h_2^{-1} \bar{D}_0 A_0^{-1} h_4 E_0 h_5^{-1}, \quad H_{g_0, p_0} = h_5^{-1} \bar{F}_1 A_0^{-1} C_0 h_3^{-1}, \\ H_{g_0, p_0} &= -h_5^{-1} \bar{F}_1 A_0^{-1} C_0 h_3^{-1} \bar{F}_0 A_1^{-1}, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

단,

$$\begin{aligned} h_1 &= A_1 - E_1 \bar{B}_0^{-1} \bar{F}_0, & h_2 &= \bar{B}_0 - \bar{F}_0 A_1^{-1} E_1, \\ h_3 &= \bar{D}_0 A_0^{-1} C_0 + \bar{F}_0 A_1^{-1} E_1 - B_0, & h_4 &= I - C_0 h_3^{-1} \bar{D}_0 A_0^{-1}, \\ h_5 &= \bar{F}_1 A_0^{-1} h_4 E_0 - \bar{B}_{-1} + \bar{D}_{-1} h_7^{-1} C_{-1}, \\ h_6 &= h_4 E_0 [\bar{B}_{-1} - \bar{D}_{-1} h_7^{-1} C_{-1}]^{-1} \bar{F}_1 - A_0, \\ h_7 &= A_{-1} - E_{-1} \bar{B}_{-2}^{-1} \bar{F}_{-2}. \end{aligned} \quad (22)$$

식(10) 및 도출된 식(18)~(21)로부터 각 FRFs간 주대 각성분을 축으로 하여 교차적으로 공액대칭쌍을 갖게 됨을 도출할 수 있는 바, 행렬규모 4의 경우

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^4(\omega) &= \overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{g}_1 \mathbf{p}_1}^4(\overline{\omega}), \quad \mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^4(\omega) = \overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{g}_1 \mathbf{p}_1}^4(\overline{\omega}), \\ \mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^4(\omega) &= \overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{g}_1 \mathbf{p}_1}^4(\overline{\omega}), \quad \mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^4(\omega) = \overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{g}_1 \mathbf{p}_1}^4(\overline{\omega}), \dots \end{aligned} \quad (23)$$

이고 행렬규모 6의 경우 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\mathbf{g}_1 \mathbf{p}_1}^6(\omega) &= \overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{g}_2 \mathbf{p}_2}^6(\overline{\omega}), \quad \mathbf{H}_{\mathbf{g}_1 \mathbf{p}_1}^6(\omega) = \overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{g}_2 \mathbf{p}_2}^6(\overline{\omega}), \\ \mathbf{H}_{\mathbf{g}_2 \mathbf{p}_2}^6(\omega) &= \overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{g}_1 \mathbf{p}_1}^6(\overline{\omega}), \dots \end{aligned} \quad (24)$$

단, $\omega = 2\Omega - \omega$ 이고 이로인해 각 공액 대칭 요소간 $\omega = \Omega$ 을 축으로 대칭되는데, 이는 식(8)의 공액쌍에 대해서 2Ω 만큼 변조시킨 귀결이다. 만일 비등방성을 기저로 하여 행렬규모를 확장하였을 경우에는, $\omega = -\omega$ 가 되어 각 공액대칭요소간 $\omega = 0$ 을 축으로 하여 대칭된다.

여기서, 홀수차 행렬규모(3,5,7..등)를 취할 경우 요소간의 공액대칭성은 성립할 수 없다. 이는 극점(pole)의 공액쌍, 즉, 닫힌 구조의 극점(closed pole)이 아닌 독립적인 열린 구조의 극점(open pole)으로 구성되기 때문이나, 행렬규모를 증가시킬수록 공액쌍에 근접하게 된다.

2.3. FRFs의 경향

여기서는 비등방성(Δ) 및 비대칭성(δ)에 따른 전반적인 경향을 살펴기 위해, 해석상의 편의상 회전부의 내부감쇠와 정지부의 감쇠를 무시할 경우, $\mathbf{K}_b = \Delta \mathbf{K}_r$, $\mathbf{K}_r \sim \delta \mathbf{K}_r$ 와 같이 각각 표시되고, 이로부터 식(6)은 다음과 같다.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{p}(t) + \Delta \overline{\mathbf{p}}(t) + \delta e^{j2\Omega t} \overline{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{g}(t), \quad (25)$$

여기서

$\mathbf{M} = \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{M}_r$, $\mathbf{C} = \mathbf{K}_r^{-1} (\mathbf{C} - j\Omega \mathbf{G})$, $\mathbf{g}(t) = \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{g}(t)$ 이고 \mathbf{C} 및 \mathbf{G} 는 각각 감쇠 및 자이로효과를 나타낸다.

이 경우 식(9)는 다음과 같고

$$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \mathbf{P}(\omega + 2\Omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega - 2\Omega) \\ \mathbf{G}(\omega - 2\Omega) \\ \mathbf{P}(\omega - 4\Omega) \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & \\ & \overline{\mathbf{B}}_r \Delta & & & & & & \\ & \Delta \mathbf{A}_r \delta \mathbf{I} & & \mathbf{0} & & & & \\ & \delta \mathbf{I} \overline{\mathbf{B}}_r \Delta \mathbf{I} & & & & & & \\ & & \Delta \mathbf{A}_r \delta \mathbf{I} & & & & & \\ & & \mathbf{0} & \delta \mathbf{I} \overline{\mathbf{B}}_r \Delta \mathbf{I} & & & & \\ & & & & \Delta \mathbf{A}_r & & & \\ & & & & & \ddots & & \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \mathbf{G}(\omega + 2\Omega) \\ \mathbf{G}(\omega) \\ \mathbf{G}(\omega) \\ \mathbf{G}(\omega - 2\Omega) \\ \mathbf{G}(\omega - 2\Omega) \\ \mathbf{G}(\omega - 4\Omega) \\ \vdots \end{Bmatrix}. \quad (26)$$

동강성계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k &= -(2k\Omega + \omega)^2 \mathbf{M} + j(2k\Omega + \omega) \mathbf{C} + \mathbf{I}, \\ \overline{\mathbf{B}}_k &= -(2k\Omega + \omega)^2 \overline{\mathbf{M}} + j(2k\Omega + \omega) \overline{\mathbf{C}} + \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (27)$$

이에 대해 식(12)~(16) 및 (18)~(21)을 적용하고 행렬 노름(norm)을 적용하면 행렬규모에 따라 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^1\| &\leq \frac{1}{(1-\Delta^2)} \|\mathbf{A}_0^{-1}\| \sim O(1), \quad \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^2\| \leq \frac{1}{(1-\delta^2)} \|\mathbf{A}_0^{-1}\| \sim O(1), \\ \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^2\| &\leq \Delta \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^2\| \sim O(\Delta), \quad \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^2\| \leq \delta \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^2\| \sim O(\delta), \\ \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^3\| &\leq \frac{1}{(1-\Delta^2-\delta^2)} \|\mathbf{A}_0^{-1}\| \sim O(1), \\ \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^3\| &\leq \Delta \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^3\| \sim O(\Delta), \quad \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^3\| \leq \delta \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^3\| \sim O(\delta), \\ \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^4\| &\leq \frac{1}{\left(1-\Delta^2-\frac{\delta^2}{1-\Delta^2}\right)} \|\mathbf{A}_0^{-1}\| \sim O(1), \\ \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^4\| &\leq \Delta \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^4\| \sim O(\Delta), \quad \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^4\| \leq \frac{\delta}{(1-\Delta^2)} \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^4\| \sim O(\delta), \\ \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^5\| &\leq \frac{1}{\left(1-\Delta^2-\frac{\delta^2}{1-\Delta^2}-\frac{\delta^2}{1-\Delta^2}\right)} \|\mathbf{A}_0^{-1}\| \sim O(1), \\ \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^5\| &\leq \frac{\Delta}{(1-\delta^2)} \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^5\| \sim O(\Delta), \quad \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^5\| \leq \frac{\delta}{(1-\Delta^2)} \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^5\| \sim O(\delta), \\ \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^5\| &\leq \frac{\Delta \delta}{(1-\delta^2)} \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^5\| \sim O(\Delta \delta), \\ \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^5\| &\leq \frac{\Delta \delta}{(1-\Delta^2)} \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^5\| \sim O(\Delta \delta), \\ \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^6\| &\leq \frac{1}{\left(1-\delta^2-\frac{\Delta^2}{1-\delta^2}-\frac{\Delta^2 \delta^2}{1-\Delta^2-\delta^2}\right)} \|\mathbf{A}_0^{-1}\| \sim O(1), \\ \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^6\| &\leq \frac{\Delta}{(1-\delta^2)} \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^6\| \sim O(\Delta), \quad \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^6\| \leq \frac{\Delta \delta}{(1-\delta^2)} \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^6\| \sim O(\Delta \delta), \\ \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^6\| &\leq \frac{\delta}{\left(1-\frac{\Delta^2}{1-\delta^2}\right)} \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^6\| \sim O(\delta), \\ \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^6\| &\leq \frac{\Delta \delta (1-\Delta \delta)}{(1-\Delta^2-\delta^2)(1-\delta^2)} \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^6\| \sim O(\Delta \delta), \\ \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^6\| &\leq \frac{\Delta \delta^2}{(1-\Delta^2-\delta^2)} \|\mathbf{H}_{\mathbf{g}_0 \mathbf{p}_0}^6\| \sim O(\Delta \delta^2), \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (28)$$

여기서 $O(1)$ 은 n-dFRFs 대해서 정도(order of magnitude)가 1임을 의미하고, 이에 대한 기타 요소들의 상대적인 정도를 표시한다. $O(\Delta)$ 는 정성적으로는 비등방성이고 정량적으로, 1차임을 의미한다. $O(\delta)$ 는 비대칭성의 정도가 1차임을 나타낸다. 기준이 되는 FRFM의 주대각성분들에 대해서 비등방 또는 비대칭요소들의 경우 각각 1차정도를 보이고 있다. 비등방 및 비대칭의 결합성분을 갖는 요소들의 경우, 주대각성분에서 행렬규모 1에 위치한 요소들은 $\Delta \delta$, 행렬규모 2에 위치할 경우 비대칭요소인 접할 경우 $\Delta \delta^2$, 비등방요소에 인접할 경우 $\Delta^2 \delta$ 크기로 감소하고 있다. 식(28)로부터, 정성적으

로는 주대각 성분으로 부터의 인접정도(n)에 따라 비등요소에 위치할 경우 $\Delta \delta$, 비대칭요소에 위치할 경우 $\Delta \delta \dots$ 등의 정도를 보이며, 정량적으로는 주대각성분에서 멀어질수록 소멸된다. 이러한 r-dFRFs의 특성으로 부터 비등방/비대칭성을 구별할 수 있다.

III. 수치예

해석모델인 그림 1에 대한 형상 및 물리적 변수들의 사양은 다음과 같다.

디스크

$$\rho = 7,850 \text{ kg/m}^3, l_D = 30 \text{ mm}, M = \rho \pi l_D D^2 / 4 = 29.6 \text{ kg},$$

$$I_d = M(3D^2/4 + l_D^2) / 12 = 0.298 \text{ kg.m}^2,$$

$$J_d = MD^2/8 = 0.592 \text{ kg.m}^2, \Delta J_d = \delta I_d, \delta = 0.3,$$

축

$$E = 2.07 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, l_1 = 0.3 \text{ m}, l_2 = 0.2 \text{ m}, L = 0.5 \text{ m},$$

$$d = 40 \text{ mm}, I_s = \pi d^4 / 65, I_{\xi_1} = I_{\xi_2} = I_{\xi_s} = I_s (1 + \delta),$$

$$I_{\eta_1} = I_{\eta_2} = I_{\eta_s} = I_s (1 - \delta), \delta = 0.3,$$

$$k_{rr} = 3EI_s (1/l_1^3 + 1/l_2^3) = 1.1 \times 10^7 \text{ N/m}, \Delta k_{rr} = \delta k_{rr},$$

$$k_{\theta\theta} = 3EI_s (1/l_1 + 1/l_2) = 5.85 \times 10^5 \text{ N/rad}, \Delta k_{\theta\theta} = \delta k_{\theta\theta},$$

$$k_{r\theta} = 3EI_s (1/l_2^2 - 1/l_1^2) = 1.46 \times 10^6 \text{ N/rad.m}, \Delta k_{r\theta} = \delta k_{r\theta},$$

$$c_r = 50 \text{ Ns/m}, c_\theta = 10 \text{ Ns/rad},$$

베어링

$$k_{b1} = k_{b2} = k_b = 2 \times 10^7 \text{ N/m}, \Delta k_{b1} = \Delta k_{b2} = \Delta k_b, \Delta = 0.3$$

$$c_{b1} = c_{b2} = 2,000 \text{ Ns/m}, \Delta c_{b1} = \Delta c_{b2} = 0.$$

이들 값으로부터 그림 2~5는 FRFs의 병진방향 성분(r-r)에 대한 절대값을 도시한 것이다.

그림 2는 등방회전체 ($\Delta = \delta = 0$)의 경우를 보인 것이다. 기존 회전체 해석에 있어 가장 전형적인 결과이며, 이 경우는 n-dFRF 만이 존재하게 되고, 정(+).부(-) 주파수영역에 대해서 거의 대칭적으로 위치하고 있으나 엄밀하게는 내부 감쇠효과에 의해 약간의 비대칭적인 형상을 보이고 있다.

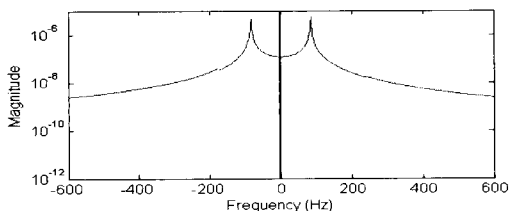


그림 2. dFRF at 10,000 rpm (166.7 Hz) for isotropic rotor system

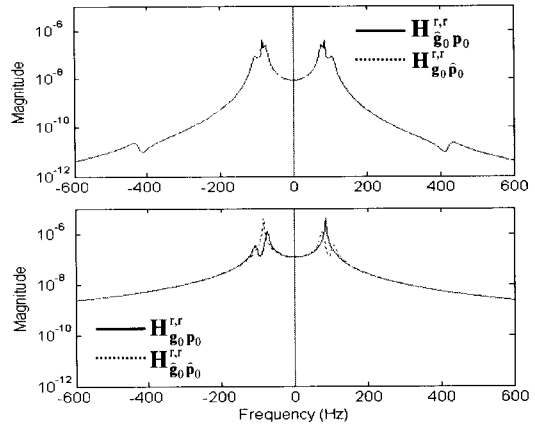


그림 3. dFRFs at 10,000 rpm (166.7 Hz) for anisotropic rotor system

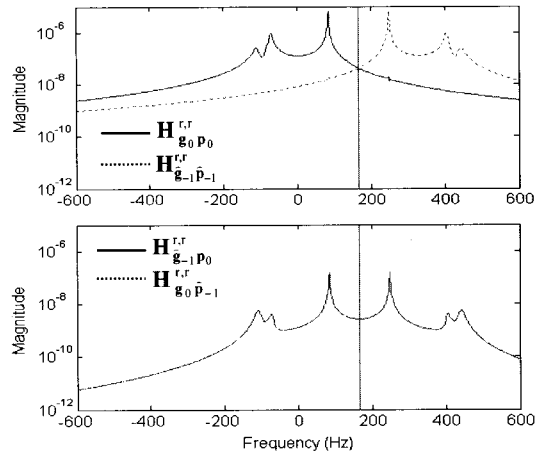


그림 4. dFRFs at 10,000 rpm (166.7 Hz) for asymmetric rotor system

그림 3의 비등방회전체 ($\delta = 0$)의 경우, n-dFRF 및 r-dFRF 공액요소간 $\omega = 0$ 를 축으로 하여 대칭적인 형상을 보인다. r-dFRF의 경우 n-dFRF를 기준으로 하여 비등방성(Δ)의 크기 정도로 감소하고 있다. 고 주파수영역으로 갈수록 정점(peak) 모드들이 크게 감소하고 있는데, 이는 잔여모드의 일반적인 경향이다.

그림 4의 비대칭회전체 ($\Delta = 0$)의 경우에는 공액요소간 $\omega = \Omega$ 를 축으로 하여 대칭적인 형상을 보이고, r-dFRF의 경우 n-dFRF에 비해 비대칭성(δ)의 정도로 작아지고 있는데 비등방성에 비해 더 감소하는 것은 축과 디스크의 비대칭성이 동시에 가미되었기 때문이다. n-dFRF의 경우에는 저 주파수영역 근처에서 주요 모드가 운집하고 있고, r-dFRF의 경우에는 비교적 넓은 범위에 분포하고 있다.

그림 5의 행렬규모 6으로 근사한 경우, 비대칭성을 근간으로 함으로서, $\omega = \Omega$ 를 축으로 하여 교차대칭요소간 대칭적인 형상을 보이고, r-dFRFs의 경우 정량적인 경향은 식(28)의 결과와 일치하고 있다. 특히 비등방/비대칭결합성분을 갖는 r-dFRFs의 경우 저점피크(anti-resonance peak)를 보이며, 고주파수영역으로 갈수록 내부 감쇠효과로 인하여 모드가 분리되고 있다.

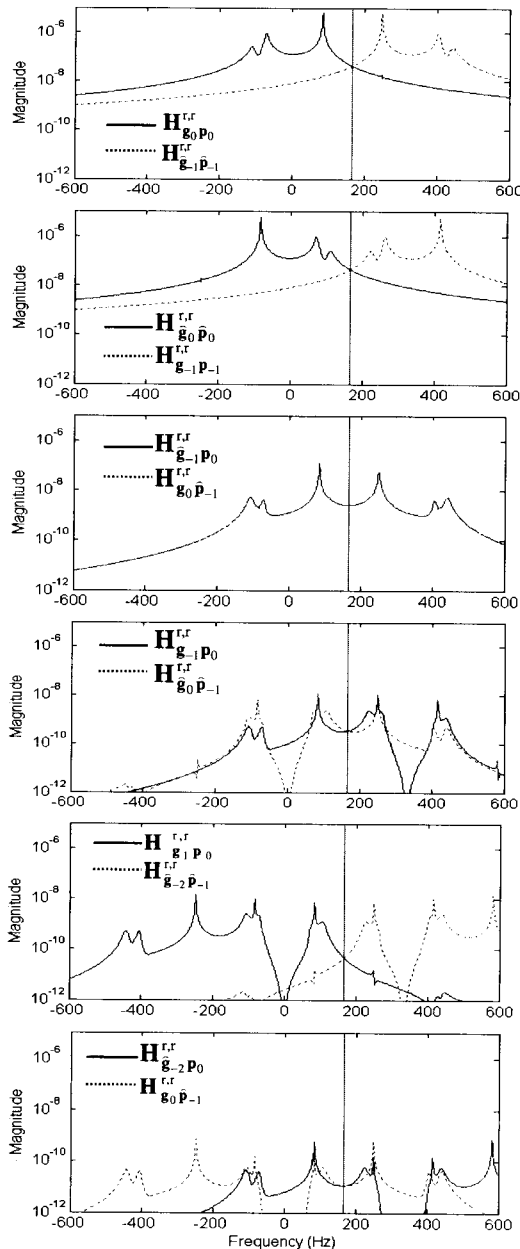


그림 5. dFRFs at 10,000 rpm(166.7 Hz) for general rotor system

그림 6,7은 각각 n-dFRFs에 대한 비등방성 또는 비대칭성에 의한 r-dFRFs의 정성적인 경향과 그들 변화에 의한 정량적인 경향을 도시한 것이다. 비대칭성요소들의 경우 비등방성에 비해 대칭축 $\omega = \Omega$ 만큼 편위되어 있는 바, 각기 $\omega = 0$ 으로 이동하여 보면, n-dFRF가 가장 크고 비등방/비대칭 결합요소를 갖는 r-dFRF가 가장 작다.

그림 6은 비대칭성.비등방성 중 일방을 강조하였을 경우 각 r-dFRFs의 정성적인 경향을 보인 것이다. 비대칭성(비등방성)을 강조하였을 경우, 비대칭성(비등방성)의 요소가 비등방(비대칭)요소 보다 큼을 보이고 있다. 그림 7의 전 변위성분에 대해서 정량적인 노름값을 살펴보면 n-dFRFs를 기준으로 비등방.비대칭 r-dFRFs가 상대적으로 작고, 결합요소를 갖는 r-dFRFs가 가장 작다. 이때, 비대칭요소가 비등방요소보다 작은 바, 이는 축과 디스크의 비대칭성을 동시에 부가하였기 때문이다.

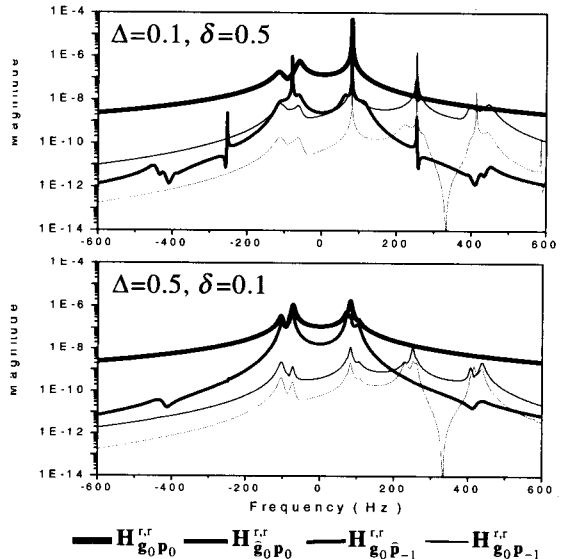


그림 6. Qualitative behavior of dFRFs at 10,000 rpm(166.7 Hz)

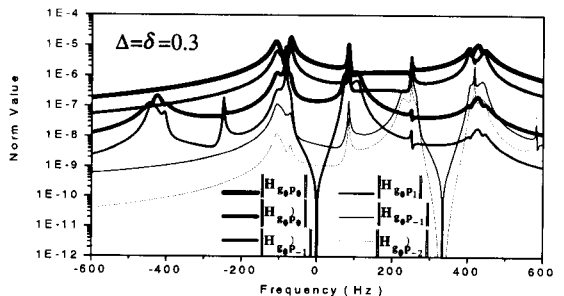


그림 7. Quantitative behavior of dFRFs at 10,000 rpm(166.7 Hz) by norms

후 기

본 연구는 항공우주연구원의 민군겸용 과제인 "헬리콥터 반 토오크 시스템 기술개발"의 일부로 수행되었으며, 지원하여 주신 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- 1) Lee, C. W., "Vibration Analysis of Rotors," Kluwer Academic Publishers, 1993.
- 2) Lee, C. W., and Joh, C. Y., "Development of the Use of Directional Frequency Response Functions for the Diagnosis of Anisotropy and Asymmetry in Rotating Machinery: Theory," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 8, No. 6, 1994, pp. 665-678.
- 3) 서정환, 홍성욱, 이종원, "변조좌표계를 이용한 비대칭 회전체계의 일반화된 모드해석" *한국소음진동공학회*, 제13권, 제10호, 2003, pp. 813-820.
- 4) Han, D. J., "A Study on the Rotor Type Identification Method" *KSAS International Journal*, Vol. 5, No. 1, May, 2004, pp. 39-45.
- 5) Meirovitch, *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw Hill, 1970.
- 6) Muszynska, A., "Modal Testing of Rotor/Bearing Systems," *International J. of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol.1, 1996, pp. 15-34.
- 7) Kramer E., "Dynamics of Rotors and Foundations", Springer-Verlag, 1993.
- 8) Genta, B., "Whirling of Unsymmetrical Rotors : A Finite Element Approach Based on Complex Co-ordinates", *Journal of Sound and Vibration*, 1988, Vol. 124(1), pp. 27-53.
- 9) Ardayfio, D. and Frohrib, D. A., "Instability of an Asymmetric Rotor with Asymmetric Shaft Mounted on Symmetric Elastic Supports", *Journal of Engineering for Industry*, 1976, pp. 1161-1165.
- 10) Huang, Y. and McColl, W. F., "Analytical Inversion of General Tridiagonal Matrices", *J. Phys. A: Math. Gen.* 30, 1997, pp. 7919-7933.

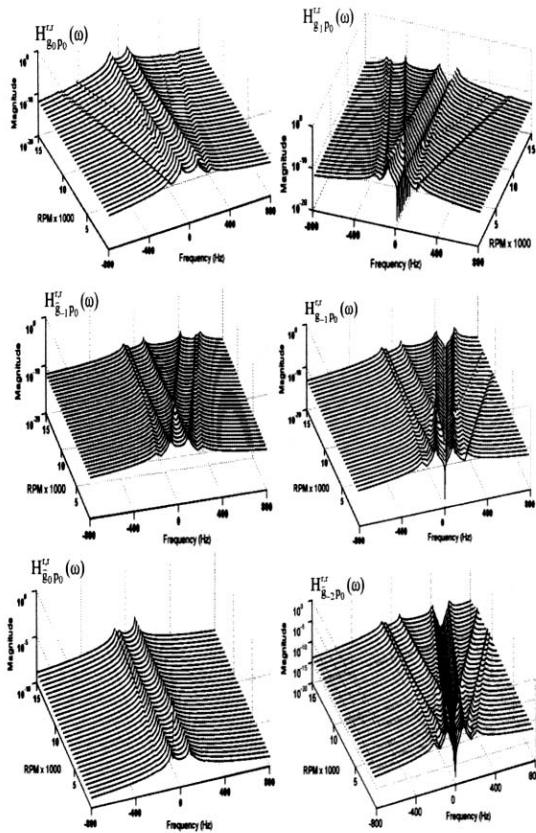


그림 8. Waterfall plots of dFRFs by matrix order 6

그림 8은 전반적인 형상을 워터폴선도(waterfall plot)로 도시한 것이다. 회전수의 증가에 따라 고 주파영역으로 모드가 분산되고 있다. 특히 r-dFRFs 중 비대칭 회전체를 포함해서 비대칭성 요소 또는 결합 요소들의 경우 약 5000 rpm에서 모드분리(mode split)에 의한 불안정영역이 발생됨을 알 수 있다.

IV. 결 론

비등방 정지부 및 비대칭 회전부를 갖는 일반 회전체에 대해서, 도입한 해석 모델의 운동방정식으로부터 시변조계수를 이용하여 방정식의 조합을 구성하였다. 이들 운동방정식의 직접적인 Fourier 변환의 역행렬로부터 스펙트럼과의 구성 관계를 도출하였고, 물리적인 변수로 구성된 주파수응답함수를 용이하게 유도하였다. 이로부터 주파수응답함수의 특성 및 경향을 파악하였고, 스펙트럼, 모드 해석, 시험 등의 응답 평가기법에도 적용될 수 있는 자료를 제공하였다.

부 록

A. 운동방정식의 물리적변수

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{fi} = \begin{bmatrix} c_r & 0 & -i_2 c_r & -i_1 c_r \\ 0 & c_\theta & -j c_\theta / L & j c_\theta / L \\ -i_2 c_r & j c_\theta / L & i_2^2 c_r - c_\theta / L^2 & i_1 i_2 c_r - c_\theta / L^2 \\ -i_1 c_r & -j c_\theta / L & i_1 i_2 c_r - c_\theta / L^2 & i_1^2 c_r - c_\theta / L^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{r0} = \mathbf{C}_{fi} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{b1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{b2} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_r = \mathbf{C}_{r0} - j\Omega \mathbf{G}_m,$$

$$\mathbf{C}_r = j2\Omega \mathbf{M}_r,$$

$$\mathbf{C}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta c_{b1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta c_{b2} \end{bmatrix}, \mathbf{K}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta k_{b1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta k_{b2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{r0} = \begin{bmatrix} k_r & -jk_{r\theta} & -i_2 k_r + k_{r\theta} / L & -i_1 k_r - k_{r\theta} / L \\ jk_{r\theta} & k_\theta & -ji_2 k_{r\theta} + jk_\theta / L & -ji_1 k_{r\theta} - jk_\theta / L \\ -i_2 k_r + k_{r\theta} / L & ji_2 k_{r\theta} - jk_\theta / L & i_2^2 k_r - 2i_2 k_{r\theta} / L + k_\theta / L^2 + k_{b1} & i_1 i_2 k_r + (2i_2 - 1) k_{r\theta} / L - k_\theta / L^2 \\ -i_1 k_r - k_{r\theta} / L & ji_1 k_{r\theta} + jk_\theta / L & i_1 i_2 k_r + (2i_2 - 1) k_{r\theta} / L - k_\theta / L^2 & i_1^2 k_r + 2i_1 k_{r\theta} / L + k_\theta / L^2 + k_{b2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{K}_{r0} - j\Omega \mathbf{C}_{fi},$$

$$\mathbf{K}_r = \begin{bmatrix} \Delta k_r & j\Delta k_{r\theta} & -i_2 \Delta k_r + \Delta k_{r\theta} / L & -i_1 \Delta k_r - \Delta k_{r\theta} / L \\ j\Delta k_{r\theta} & \Delta k_\theta & -ji_2 \Delta k_{r\theta} - j\Delta k_\theta / L & -ji_1 \Delta k_{r\theta} + j\Delta k_\theta / L \\ -i_2 \Delta k_r + \Delta k_{r\theta} / L & -ji_2 \Delta k_{r\theta} - j\Delta k_\theta / L & i_2^2 \Delta k_r - 2i_2 \Delta k_{r\theta} / L - \Delta k_\theta / L^2 & i_1 i_2 \Delta k_r + (2i_2 - 1) \Delta k_{r\theta} / L + \Delta k_\theta / L^2 \\ -i_1 \Delta k_r - \Delta k_{r\theta} / L & -ji_1 \Delta k_{r\theta} + j\Delta k_\theta / L & i_1 i_2 \Delta k_r + (2i_2 - 1) \Delta k_{r\theta} / L + \Delta k_\theta / L^2 & i_1^2 \Delta k_r + 2i_1 \Delta k_{r\theta} / L - \Delta k_\theta / L^2 \end{bmatrix}$$