

지진하중을 받는 사장교의 확률유한요소해석 및 신뢰성해석

The Stochastic Finite Element Analysis and Reliability Analysis of the Cable Stayed Bridge Subjected to Earthquake Load

한 성 호* 신 재 철*

Han, Sung-Ho Shin, Jae-Chul

(논문접수일 : 2004년 5월 12일 ; 심사종료일 : 2005년 1월 31일)

요 지

구조물에 포함되어 있는 불확실성에 의한 영향은 논리적으로 구조물의 안전도 해석에 활용할 수 있는 신뢰성 평가방법에 의해 안전성 검토를 수행하는 것이 합리적일 것이다. 따라서 본 연구에서는 지진하중을 받는 사장교 구조물을 대상으로 확률유한요소법을 기존의 신뢰성이론에 적합하도록 정식화하여 구조물의 동적응답해석 및 신뢰성해석을 보다 효율적으로 수행할 수 있는 프로그램을 작성하였다. 이를 바탕으로 하여 확률변수에 따른 변위, 부재력 및 케이블긴장력 등에 대한 평균, 표준편차 및 변동계수 등을 검토함으로써 동적응답특성을 정량적으로 분석하였다. 또한 신뢰성지수 및 파괴확률을 검토하여 사장교 구조물의 안전성을 평가하였다.

핵심 용어 : 확률유한요소법, 확률변수, 신뢰성해석, 신뢰성지수, 파괴확률

Abstract

Considering the effect by uncertainty in the structures, it is reasonable that the safety examination has to be performed by using method of reliability evaluation. Therefore, in this study, program is developed which can perform the reliability analysis or the dynamic response analysis more efficiently by formularizing the stochastic finite element analysis suitable for the existing reliability analysis about the cable stayed bridge suffering the seismic loads. Based on this program, the characteristic of dynamic responses is analyzed quantitatively by examining the average, the standard deviation and the coefficient of variance about the displacement, the resistance and the tension of cable according to the random variables. and the safety of cable stayed bridge is evaluated by examining of reliability index and failure probability

keywords : SFEM(stochastic finite element method), random variables, reliability analysis, reliability index, failure probability

1. 서 론

최근 서해대교, 영종대교, 광안대교 등의 건설로 우리나라도 케이블지지 장대교량의 시대를 맞이하게 되었다. 장대교량의 형식 중에서 사장교는 주변 환경 조건에 용이하게 적용될 수 있는 장점을 가진 교량 형식이지만 설계 및 시공과정에서 다른 형식의 교량에 적용되는 이론과 상당히 다른 구조해석 및 설계기술이 필요하다. 따라서 사장교

구조물의 전체 강성에 영향을 주는 여러 변수들을 분석하고 정확한 거동 특성을 파악하기 위해 정적해석, 고유치해석, 동적응답해석 및 시공단계해석 등에 관한 연구논문이 다수 발표되었다.^{1)~5)} 이와 같은 구조해석 과정에서 가장 중요한 것은 일반적으로 구조형식 및 설계변수에 따라 구조물의 역학적 거동을 파악하고 전체 구조물에 어떤 영향을 주는가를 충분히 검토하는 것이다. 그러나 기존의 확정론적 방법에 의한 구조해석으로는 확률변수에 따른 구조

† 책임저자, 정회원 · 충남대학교 토목공학과 공학박사
전화: 042-821-7744 ; Fax: 042-823-6584
E-mail: han2001@cnu.ac.kr

* 정회원 · 충남대학교 토목공학과 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2005년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2005년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

물의 역학적 거동 및 설계변수에 대한 영향을 명확하게 파악하기 어려울 뿐만 아니라 경험에 의한 안전계수를 사용한 평가방법 역시, 구조물의 안전성을 명확하게 파악하기가 어렵다. 그러므로 사장교 구조물에 포함되어 있는 불확실성에 의한 영향을 논리적으로 구조물의 안전도 해석에 활용할 수 있는 신뢰성 평가방법에 의해 안전성 검토를 수행하는 것이 보다 합리적일 것이다. 그러나 이러한 신뢰성 평가방법은 매우 복잡한 비선형 한계상태함수를 이용해야 할 뿐만 아니라, 비선형 한계상태함수의 형태를 명확하게 나타내는 것조차 어렵기 때문에 실용화 되지는 못하였다. 이와 같은 문제점을 해결하기 위한 대안으로 매우 정확한 해석 결과를 얻을 수 있는 DMCS(Direct Monte Carlo Simulation)방법을 이용하여 신뢰성해석을 수행하는 것이 보편화되었다. 하지만 DMCS방법은 반복적 구조해석을 수행해야 하므로 시간이 과다하게 소요되는 단점이 있어 동적응답해석 및 사장교와 같은 복잡한구조물의 신뢰성해석에는 적합하지 않은 평가방법이어서 다른 근사해법에 대한 검증방법으로 주로 이용되고 있는 실정이다.

따라서 본 연구에서는 지진하중을 받는 사장교 구조물을 대상으로 확률유한요소법을 이용하여 섭동모델을 도출하고 기존의 신뢰성이론에 적합하도록 정식화하여 사장교 구조물의 동적응답해석 및 신뢰성해석을 보다 효율적으로 수행할 수 있는 프로그램을 작성하고자 한다. 또한 작성된 프로그램을 이용하여 기존의 확정론적인 방법 및 DMCS응답해석에 의한 신뢰성 평가방법보다 효과적으로 확률변수에 따른 사장교 구조물의 동적응답의 분산특성을 정량적으로 파악하고자 하며, 신뢰성지수 및 파괴확률을 검토하여 대상 사장교 구조물의 구조안전성을 평가하고자 한다.

2. 사장교의 동적확률유한요소해석

2.1 섭동법에 의한 동적확률유한요소해석

섭동법을 이용하여 확률장(Random Field)과 시간영역(Time Domain)에 대해 동적확률유한요소해석을 수행하였다. 사장교 구조물에 대하여 부재강성, 가속도 시간이력에 의한 지진하중을 확률변수로 고려하였으며, 각각의 확률변수는 서로 무상관(비연성)관계로 가정하였다.

부재강성을 구성하는 인자 및 초기긴장력을 확률변수로 고려하기 위해서는 각각에 대한 편미분을 계산하여야 한다. 따라서 사장교 구조물의 구성요소 중에서 케이블요소의 부재강성을 구성하는 인자 및 초기긴장력에 대한 편미

분은 식 (1)~(3)을 이용하여 구할 수 있다.^{6)~8)}

- 단면적(A_c)가 확률변수인 경우 :

$$\left[\frac{\partial K}{\partial A_c} \right] = \begin{bmatrix} \frac{E_{eq}}{L_c} & -\frac{E_{eq}}{L_c} \\ -\frac{E_{eq}}{L_c} & \frac{E_{eq}}{L_c} \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서, $E_{eq} = \left[\frac{E_c}{1 + \frac{A_c \omega^2 (l \cos \alpha)^2 E_c}{12 T^3}} \right]$ 는 Ernst가 제안

한 등가탄성계수(Equivalent modulus of elasticity)이며, 본 연구에서는 케이블요소에 대하여 등가탄성계수를 이용하여 케이블요소의 편미분 강성행렬을 구성하였다.⁹⁾

- 탄성계수(E_c)가 확률변수인 경우 :

$$\left[\frac{\partial K}{\partial E_c} \right] = \begin{bmatrix} \frac{E_{eq}' A}{L_c} & -\frac{E_{eq}' A}{L_c} \\ -\frac{E_{eq}' A}{L_c} & \frac{E_{eq}' A}{L_c} \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서, $E_{eq}' = \left[\frac{1}{1 + \frac{A_c \omega^2 (l \cos \alpha)^2 E_c}{12 T^3}} \right]$ 는 등가탄성계수

를 탄성계수(E_c)에 의해 편미분하여 산정된 결과이다.

- 초기긴장력(T)가 확률변수인 경우 :

$$\left[\frac{\partial K}{\partial T} \right] = \begin{bmatrix} \frac{E_{eq}' A_c}{L_c} & -\frac{E_{eq}' A_c}{L_c} \\ -\frac{E_{eq}' A_c}{L_c} & \frac{E_{eq}' A_c}{L_c} \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서, $E_{eq}' = \left[\frac{\frac{A_c \omega^2 (l \cos \alpha)^2 E_c^2}{4 T^4}}{1 + \frac{A_c \omega^2 (l \cos \alpha)^2 E_c}{12 T^3}} \right]$ 는 등가탄성계수

를 초기긴장력(T)에 의해 편미분하여 산정된 결과이다.

또한 주형과 주탑의 프레임요소에 대한 부재강성을 구성하는 인자를 확률변수로 고려하기 위하여 안정함수(Stability Function)를 포함한 편미분 강성행렬은 식 (4)~(6)과 같이 나타낼 수 있다.^{10),11)}

- 탄성계수(E)가 확률변수인 경우 :

$$\left[\frac{\partial K}{\partial E} \right] = \begin{bmatrix} \frac{A}{L} S_5 & 0 & 0 & -\frac{A}{L} S_5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{L^3} S_1 & \frac{6I}{L^2} S_2 & 0 & -\frac{12I}{L^3} S_1 & \frac{6I}{L^2} S_2 \\ 0 & \frac{6I}{L^2} S_2 & \frac{4I}{L} S_3 & 0 & -\frac{6I}{L^2} S_2 & \frac{2I}{L} S_4 \\ -\frac{A}{L} S_5 & 0 & 0 & \frac{A}{L} S_5 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{L^3} S_1 & -\frac{6I}{L^2} S_2 & 0 & \frac{12I}{L^3} S_1 & -\frac{6I}{L^2} S_2 \\ 0 & \frac{6I}{L^2} S_2 & \frac{4I}{L} S_3 & 0 & -\frac{6I}{L^2} S_2 & \frac{2I}{L} S_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

• 단면이차모멘트(I)가 확률변수인 경우 :

$$\left[\frac{\partial K}{\partial I} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E}{L^3} S_1 & \frac{6E}{L^2} S_2 & 0 & -\frac{12E}{L^3} S_1 & \frac{6E}{L^2} S_2 \\ 0 & \frac{6E}{L^2} S_2 & \frac{4E}{L} S_3 & 0 & -\frac{6E}{L^2} S_2 & \frac{2E}{L} S_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E}{L^3} S_1 & -\frac{6E}{L^2} S_2 & 0 & \frac{12E}{L^3} S_1 & -\frac{6E}{L^2} S_2 \\ 0 & \frac{6E}{L^2} S_2 & \frac{4E}{L} S_3 & 0 & -\frac{6E}{L^2} S_2 & \frac{2E}{L} S_4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

• 단면적(A)가 확률변수인 경우 :

$$\left[\frac{\partial K}{\partial A} \right] = \begin{bmatrix} \frac{E}{L} & 0 & 0 & -\frac{E}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E}{L} & 0 & 0 & \frac{E}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

윗 식에서 사용한 안정함수는 수치적으로 안정된 값을 얻기 위하여 이용하였으며, 안정함수 $S_1 \sim S_4$, S_c 및 S_t 를 Taylor급수 전개를 하고 고차항을 생략하면 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.¹²⁾

• 압축력이 작용할 경우 $k = \sqrt{F/EI}$ 이며,

$$\begin{aligned} S_1 &= \left(1 - \frac{(kL)^2}{6} + \frac{(kL)^4}{120} - \frac{(kL)^6}{5040} + \frac{(kL)^8}{362880} \right) / S_c \\ S_2 &= \left(1 - \frac{(kL)^2}{12} + \frac{(kL)^4}{360} - \frac{(kL)^6}{20160} + \frac{(kL)^8}{1814400} \right) / S_c \\ S_3 &= \left(1 - \frac{(kL)^2}{10} + \frac{(kL)^4}{280} - \frac{(kL)^6}{15120} + \frac{(kL)^8}{1330560} \right) / S_c \\ S_4 &= \left(1 - \frac{(kL)^2}{20} + \frac{(kL)^4}{840} - \frac{(kL)^6}{60480} + \frac{(kL)^8}{6652800} \right) / S_c \\ S_c &= 1 - \frac{(kL)^2}{15} + \frac{(kL)^4}{560} - \frac{(kL)^6}{37800} + \frac{(kL)^8}{3991680} \end{aligned} \quad (7)$$

• 인장력이 작용할 경우 $k = \sqrt{-F/EI}$ 이며,

$$\begin{aligned} S_1 &= \left(1 + \frac{(kL)^2}{6} + \frac{(kL)^4}{120} + \frac{(kL)^6}{5040} + \frac{(kL)^8}{362880} \right) / S_t \\ S_2 &= \left(1 + \frac{(kL)^2}{12} + \frac{(kL)^4}{360} + \frac{(kL)^6}{20160} + \frac{(kL)^8}{1814400} \right) / S_t \\ S_3 &= \left(1 + \frac{(kL)^2}{10} + \frac{(kL)^4}{280} + \frac{(kL)^6}{15120} + \frac{(kL)^8}{1330560} \right) / S_t \\ S_4 &= \left(1 + \frac{(kL)^2}{20} + \frac{(kL)^4}{840} + \frac{(kL)^6}{60480} + \frac{(kL)^8}{6652800} \right) / S_t \\ S_t &= 1 + \frac{(kL)^2}{15} + \frac{(kL)^4}{560} + \frac{(kL)^6}{37800} + \frac{(kL)^8}{3991680} \end{aligned} \quad (8)$$

본 연구에서는 지진하중을 가속도 시간이력에 질량행렬을 곱하여 산정하였다. 지진하중을 확률변수로 고려하기 위한 편미분은 지진하중 자체가 확률변수이므로 쉽게 산정할 수 있다.

확률변수벡터(γ_i)는 불확실성이 비교적 작다는 가정하에 확률변수벡터를 포함하는 다자유도 구조물에 대한 확률론적 동적계의 운동방정식은 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} [M(\gamma_i)]\{\ddot{X}(t, \gamma_i)\} + [C(\gamma_i)]\{\dot{X}(t, \gamma_i)\} + [K(\gamma_i)]\{X(t, \gamma_i)\} \\ = \{F(t, \gamma_i)\} \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)을 확률변수벡터의 평균치()에 대해 계산된 영차(Zeroth-Order)방정식은 식 (10)과 같이 쓸 수 있다.

$$[M]^{(0)}\{\ddot{X}\}^{(0)} + [C]^{(0)}\{\dot{X}\}^{(0)} + [K]^{(0)}\{X\}^{(0)} = \{F\}^{(0)} \quad (10)$$

여기서, $[M]^{(0)}$: 질량행렬 $[C]^{(0)}$: 감쇠행렬

$[K]^{(0)}$: 강성행렬 $\{F\}^{(0)}$: 기진력

$\{X\}^{(0)}$, $\{\dot{X}\}^{(0)}$, $\{\ddot{X}\}^{(0)}$: 변위, 속도, 가속도 응답벡터

또한 확률변수벡터에 대한 식 (10)을 편미분 하면, 식 (11)과 같은 1차 섭동(First-Order Perturbation)방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} [M]^{(0)}\{\ddot{X}\}^{(1)} + [C]^{(0)}\{\dot{X}\}^{(1)} + [K]^{(0)}\{X\}^{(1)} \\ = \{F\}^{(1)} - [M]^{(1)}\{\ddot{X}\}^{(0)} - [C]^{(1)}\{\dot{X}\}^{(0)} - [K]^{(1)}\{X\}^{(0)} \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)을 구한 후 다시 편미분 하면, 식 (12)와 같은 2차 섭동(Second-Order Perturbation)방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & [M]^{(0)}\{\ddot{X}\}^{(2)} + [C]^{(0)}\{\dot{X}\}^{(2)} + [K]^{(0)}\{X\}^{(2)} \\
 & = \{F\}^{(2)} - [M]^{(2)}\{\ddot{X}\}^{(0)} - [C]^{(2)}\{\dot{X}\}^{(0)} - [K]^{(2)}\{X\}^{(0)} \\
 & - 2\{[M]^{(1)}\{\ddot{X}\}^{(1)} + [C]^{(1)}\{\dot{X}\}^{(1)} + [K]^{(1)}\{X\}^{(1)}\}
 \end{aligned} \tag{12}$$

여기서, $(g)^{(0)} = (g)|_{\{r\}=\{r\}^{(0)}}$
 $(g)^{(1)} = \frac{\partial}{\partial r_i}(g)|_{\{r\}=\{r\}^{(0)}}$
 $(g)^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j}(g)|_{\{r\}=\{r\}^{(0)}}$

본 연구에서는 고려한 확률변수는 부재강성과 지진하중
 이므로 확률변수에 대하여 식 (11)의 1차 섭동방정식은
 식 (13)과 같이 정리할 수 있다.

$$[M]^{(0)}\left\{\frac{\partial \ddot{X}}{\partial K}\right\} + [C]^{(0)}\left\{\frac{\partial \dot{X}}{\partial K}\right\} + [K]^{(0)}\left\{\frac{\partial X}{\partial K}\right\} = -\{X\}^{(0)} \tag{13a}$$

$$[M]^{(0)}\left\{\frac{\partial \ddot{X}}{\partial F}\right\} + [C]^{(0)}\left\{\frac{\partial \dot{X}}{\partial F}\right\} + [K]^{(0)}\left\{\frac{\partial X}{\partial F}\right\} = \{1\} \tag{13b}$$

또한 식 (12)의 2차 섭동방정식은 식 (14)와 같이 정
 리할 수 있으며, 식 (14)를 간단하게 정리하면 식 (15)와
 같다.

$$\begin{aligned}
 & [M]^{(0)}\left\{\frac{\partial^2 \ddot{X}}{\partial K \partial F}\right\} + [C]^{(0)}\left\{\frac{\partial^2 \dot{X}}{\partial K \partial F}\right\} + [K]^{(0)}\left\{\frac{\partial^2 X}{\partial K \partial F}\right\} \\
 & = 2\left\{\frac{\partial X}{\partial F}\right\}
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$[M]^{(0)}\{\ddot{X}\}^{(2)} + [C]^{(0)}\{\dot{X}\}^{(2)} + [K]^{(0)}\{X\}^{(2)} = -2\{X\}^{(1)} \tag{15}$$

여기서, $\{\cdot\}^{(2)} = \left\{\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial K \partial F}\right\}$ 이다.

따라서 식 (10)에 의하여 변위와 부재력의 평균값을 계
 산할 수 있으며, 1,2차 섭동법으로 동적확률유한요소해석
 수행 시 케이블요소 및 프레임요소의 구성인자에 대한 편
 미분 강성행렬과 지진하중에 의한 편미분 식 (13), (14)
 에 의해 확률변수에 따른 변위와 부재력의 표준편차를 산
 정할 수 있다. 이와 같은 이론내용을 바탕으로 본 연구에
 서는 사장교 구조물에 대해 동적확률유한요소해석을 수행
 할 수 있는 프로그램을 작성하였다.^{6),13)}

2.2 DMCS 해석

DMCS(Direct Monte Carlo Simulation)해석은 구
 조해석시 여러 불확실량에 대하여 평균 및 분산(또는 표준편
 차)에 맞게 난수를 추출하고, 이것을 이용하여 유한요소해석
 을 하는 것으로서 각 분포에 맞는 난수추출이 가장 중요하다.
 따라서 본 연구에서는 DMCS를 사장교에 적용하기 위하여
 난수 추출을 다음의 중심극한정리를 사용하였다.¹⁴⁾ 중심극한
 정리를 이용한 Gaussian분포를 갖는 난수 발생 과정을 살펴
 보면 독립적인 불규칙 변수 $x_i (i=1,2,\dots,n)$ 을 n 개 더하여 새
 로운 불규칙 변수 x 를 만들면 다음식과 같이 표현된다.

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n \tag{16}$$

n 을 무한대로 보내면 x 의 확률밀도함수는 Gaussian
 확률밀도함수가 된다. 불규칙 변수론에 따르면 서로 독립
 인 불규칙 변수의 합으로 만들어지는 불규칙 함수는 Con-
 volution이라는 연산으로 계산될 수 있는데, 다음과 같이
 정의할 수 있다.

$$f(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(\tau-x) d\tau \tag{17}$$

Convolution의 의미는 $g(x)$ 를 y 축으로 대칭시켜서 마이
 너스 무한대로 이동시킨 후 x 값을 증가시키면서 오른쪽으로
 이동시키면 된다. 이때 $f(x)$ 와의 곱은 $f(x)$ 와 $g(\tau-x)$ 의
 겹치는 면적을 나타낸다. 즉, x_i 가 각각 (0, 1)사이의 균
 일 확률분포를 갖는 분포라 하면, 그림 1과 같이 한 번씩
 Convolution함에 따라 점점 Gaussian분포의 형태로 변
 해가는 것을 볼 수 있다.

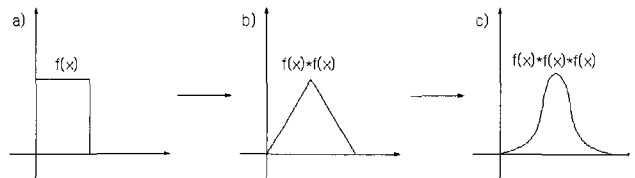


그림 1 Convolution of irregular variable having probability uniform distribution

본 연구에서는 DMCS기법에 Convolution방법을 적용하
 여 확률변수에 따라 난수추출을 수행한 후 동적응답해석을
 수행할 수 있는 프로그램을 작성하였으며, 전 절에서 작성
 한 동적확률유한요소해석 프로그램의 응답해석 결과를 검증
 하는데 이용하였다.¹³⁾ 이 프로그램에 의한 해석결과의 정확
 성을 높이기 위해서는 표본의 랜덤추출횟수가 무한대이어야

정확한 결과를 도출할 수 있으나, 이는 현실적으로 불가능하기 때문에 적절한 범위 안에서 추출횟수의 크기를 결정해야 한다. 본 연구에서는 DMCSF의 해석을 수행하기 위해 Shooman이 제안한 유의수준 5%에서의 오차 추정식을 이용하여 표본의 랜덤추출횟수를 10,000번으로 하였다.¹⁵⁾

3. AFOSM 방법

기본 확률변수들을 표준정규분포를 갖는 새로운 변수로 선형 변환하여 변환된 좌표공간의 원점으로부터 가장 가까운 거리에 있는 파괴면상의 한 점(MFPF : Most Probable Failure Point or Design Point, Checking Point)에서 선형 근사함으로써 불변성이 결여되는 문제를 해결할 수 있는 방법이다. Hasofer와 Lind에 의해 제시된 신뢰성지수와 이에 상응하는 파괴확률은 다음 식과 같이 쓸 수 있다.¹⁶⁾

$$P_f = \Phi(-\beta), \quad \beta = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (18)$$

여기서, P_f : Failure Probability, β : Reliability Index

또한, AFOSM(Advanced First Order Second Moment) 방법은 연성(상관)확률변수들을 비연성(비상관)확률변수들로 바꾸어 연성을 해결한 방법이다. Rackwitz-Fissler는 등가정규변환 방법을 도입함으로써 연성 비정규분포를 갖는 기본변수들의 한계상태방정식이 비선형 함수인 경우에도 정확한 해석 결과를 구할 수 있는 신뢰성 해석 방법을 제시하였으며 신뢰성지수를 구하기 위한 반복시행 알고리즘은 다음과 같다.¹⁷⁾

- <단계 1> 고려하고자 하는 한계상태방정식을 정한다.
- <단계 2> 신뢰성지수를 가정한다.
- <단계 3> 모든 i 에 대하여 초기치 $X_i^* = X_i$ 를 설정한다.
- <단계 4> 비정규 변수들에 대하여 등가의 정규분포 평균 $\mu_{X_i}^N$ 와 표준편차 $\sigma_{X_i}^N$ 를 계산한다.
- <단계 5> 추정점 X^* 에서 편미분 $\partial g / \partial X_i$ 를 계산한다.
- <단계 6> 단위 구배벡터 α_i 를 다음의 식을 이용하여 계산한다.

$$\alpha_i = \frac{(\partial g / \partial X_i) \sigma_{X_i}^N}{\left[\sum \left[(\partial g / \partial X_i) \sigma_{X_i}^N \right]^2 \right]^{1/2}}$$

- <단계 7> X^* 의 새로운 값을 다음 식으로부터 계산한다.
 $X_i^* = \mu_{X_i}^N - \alpha_i \beta \sigma_{X_i}^N$ 그리고 α_i 가 수렴될 때까지 단계 4~7을 반복한다.
- <단계 8> 고려하는 $g(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) = 0$ 에 대하여 신뢰성지수를 계산한다. 그리고 연속적인 반복시행에 의해 신뢰성지수의 오차가 허용한계 내에 들어 올 때까지 <단계 4~8>을 반복한다.

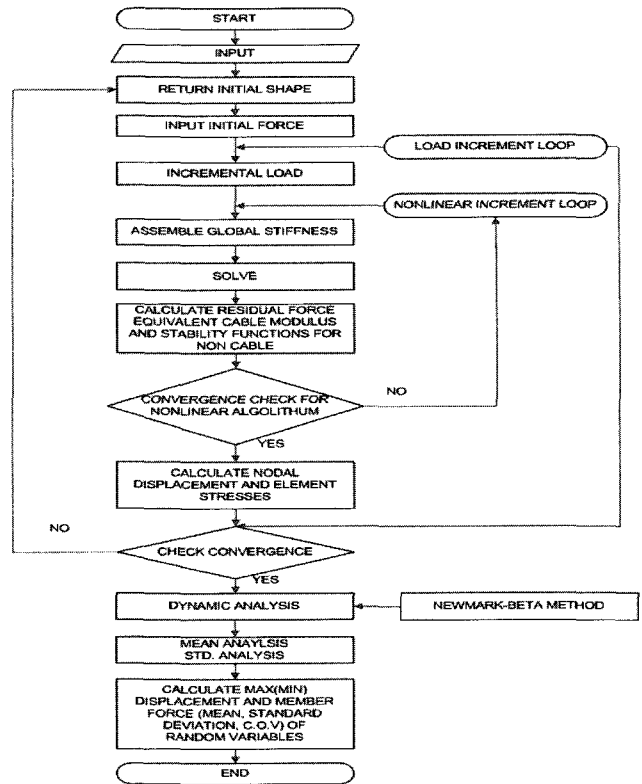


그림 2 Flow chart of DSFEMP system

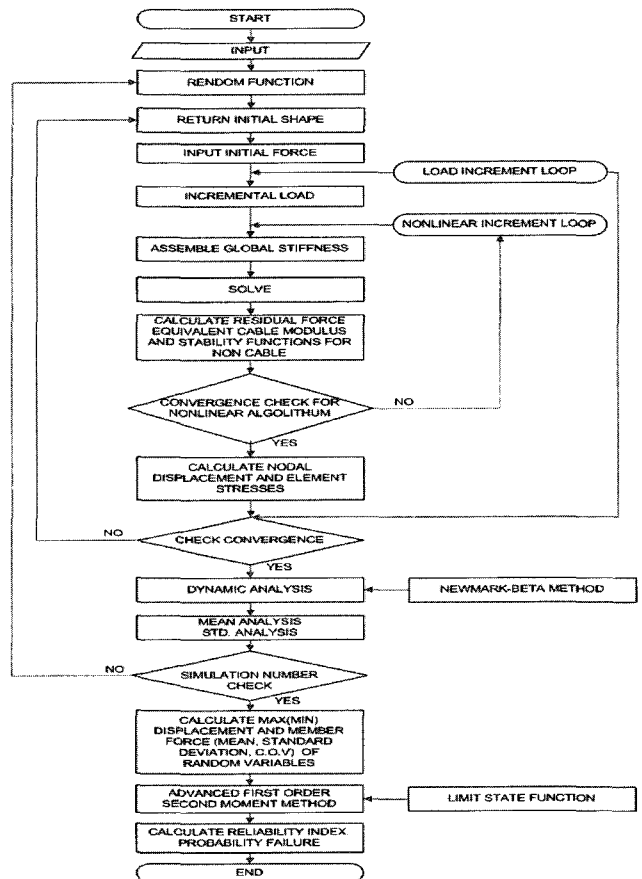


그림 3 Flow chart of DMCSF system

전 장에서 기술한 이론내용 및 작성된 프로그램을 바탕으로 사장교에 대한 동적확률유한요소해석 및 신뢰성해석을 효율적으로 수행하기 위하여 DSFEMP(Dynamic Stochastic Finite Element Method Program) 및 DMCSPP(Direct Monte Carlo Simulation Program)를 작성하였으며 작성된 프로그램 구성 흐름도는 그림 2~3과 같다.

4. 자유진동해석 및 해석프로그램 검증

4.1 해석프로그램 검증

섭동법의 정식화 과정을 통해 작성한 DSFEMP에 의해 사장교 동적응답해석 결과의 타당성을 검토하기 위한 수치해석 예로서 그림 4와 같은 1개의 케이블요소(등가트러스 요소)와 10개의 보 요소로 구성된 구조물을 대상으로 하여 초기형상해석을 이용하여 초기긴장력(389.5294tonf)을 결정하였으며, 자유진동해석을 수행하였다.^{4),18)} 또한 표 1과 같은 구조물의 부재강성 및 정현파 지점운동에 대한 평균과 표준편차를 적용하여 DSFEMP에 의한 동적응답해석을 수행하였다. DMCSPP에 의한 해석을 병행하여 구조물의 변위와 단면력의 평균 및 표준편차에 대한 결과를 서로 비교·검토하였다. 이때 불확실성을 포함한 구성요소들은 편의상 통계적으로 서로 독립인 정규분포를 갖는 확률변수로 가정하여 구조해석을 수행하였다.

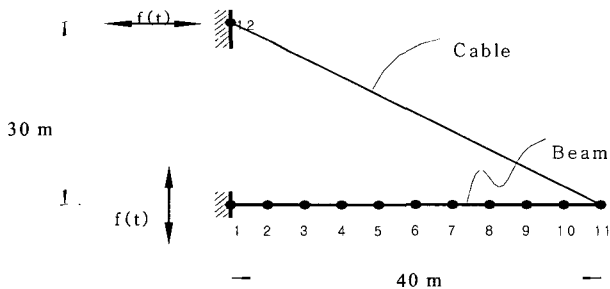


그림 4 Verification model of beam-cable structure

그림 4와 같은 구조물에 대한 동적확률유한요소해석 수행 시 확률변수는 보요소의 부재강성, 케이블요소의 부재강성 및 두 지점에 위상차를 갖지 않는 정현파 지점운동($f(t) = 1.6\sin(2t)$)의 영향 등을 고려하였으며, 각각의 확률변수에 대한 변동계수(C.O.V)는 10%를 적용하여 수치해석을 수행하였다. 이때 케이블과 보의 질량은 각각 0.024, 0.16 $\text{tonf} \cdot \text{sec}^2/\text{m}$ 를 적용하였으며, 감쇠비는 참고문헌에서 수행한 것과 같이 무시하여 해석하였다.⁵⁾ 변위에 대한 DSFEMP의 결과 검증은 동적응답해석 시 최대 수직처짐

표 1 Member properties of beam-cable structure

Random Variable		Mean	Standard deviation	C.O.V
$A(m^2)$	Beam	2.000	0.200	10 %
	Cable	0.030	0.003	10 %
$E(\text{tonf}/m^2)$	Beam	2.1×10^7	2.1×10^6	10 %
	Cable	2.1×10^7	2.1×10^6	10 %
$I(m^4)$	Beam	0.04167	0.004167	10 %
$\rho(\text{tonf}/m^3)$	Beam	7.85	-	-
	Cable	-	-	-
Initial Cable Tension(tonf)	Cable	389.5294	-	-

표 2 Natural frequency of beam-cable structure (Hz)

모드	본 연구	참고문헌[4]
1	1.0033	1.0033
2	3.0296	3.0296
3	5.5117	5.5017
4	8.9556	8.9434
5	13.380	13.2360

이 나타난 7번 절점과 11번 절점의 회전변위의 평균과 표준편차에 대해서 검토하였다. DMCSPP에 의한 해석은 DSFEMP와 동일한 조건으로 시뮬레이션을 수행하였으며, 두 해석프로그램의 응답결과를 비교하였다. 또한 상관관계를 분석하여 얻은 상관계수 및 회귀분석을 이용한 적합도를 그림 5~6에 도시하여 비교·검토하였다.

DSFEMP와 DMCSPP에 의한 변위 및 부재력응답 결과는 그림에 도시된 것과 같이 평균 및 표준편차가 전반적으로 일치함을 보이고 있다.

DSFEMP에 의한 변동계수를 검토한 결과 7번 절점의 최대 수직변위에 대한 변동계수는 14.1%, 11번 절점의 회전변위에 대한 변동계수는 14.6%로 나타났다. 또한 전체시간에 대해 변동계수를 검토한 결과 전반적으로 확률변수의 영향에 따라 변동계수는 다양하게 나타났다. 위와 같은 해석 결과에 의하면 본 연구에서 작성한 DSFEMP는 DMCSPP에 의한 절점변위 응답 결과와 전반적으로 일치하고 있으며, 상관성을 고려할 때 상관계수가 1에 근접하는 것을 알 수 있다. 또한 자유진동해석 결과가 참고해와 거의 일치하는 것을 알 수 있다.⁴⁾ 따라서 본 연구에서 작성한 DSFEMP는 동적응답해석 수행에 있어서 문제가 없다고 판단되며 DMCSPP에 의한 해석에 비해 시뮬레이션 횟수만큼 시간상 유리함을 보이고 있으므로 동적응답해석 시 상당히 유용한 해석프로그램으로 판단된다.

4.2 해석프로그램의 적용성 평가

확률변수의 변동계수가 해석 결과의 변동특성에 어느 정도

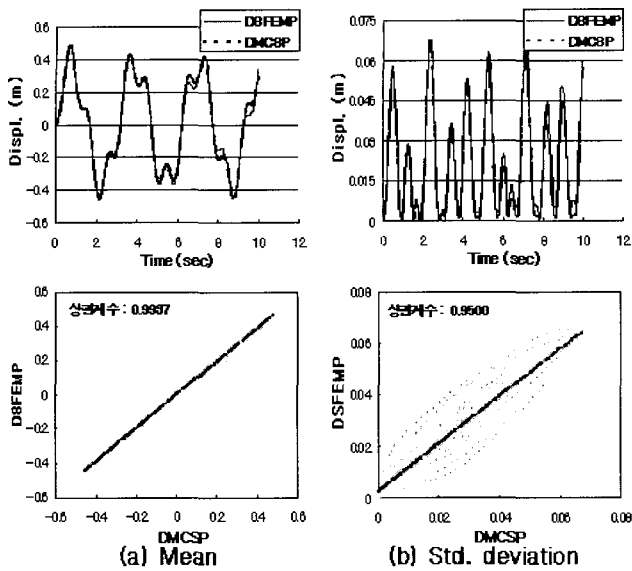


그림 5 Mean and std. deviation for DSFEMP and DMCSF Vertical displacement and correlation of node 7

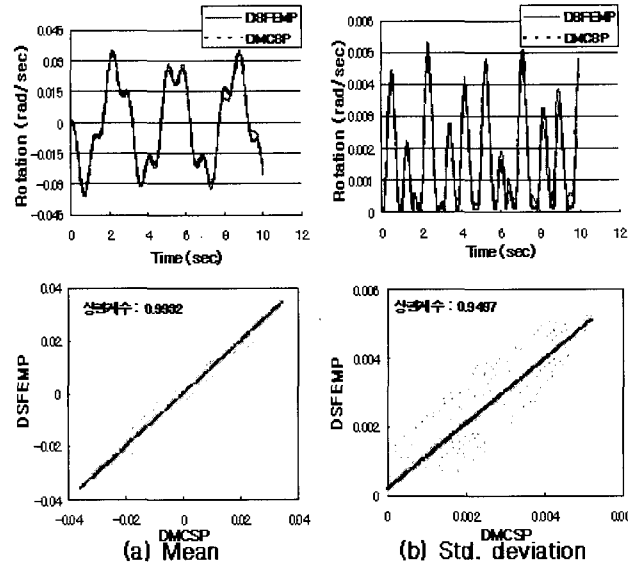


그림 6 Mean and std. deviation for DSFEMP and DMCSF rotation and correlation of Node 11

영향을 미치는가를 평가할 수 있어야 한다. 따라서 최대 수직절점변위가 나타난 7번 절점을 선택하여 확률변수 중에서 탄성계수의 변동계수에 따른 DMCSF에 의한 해석 결과를 기준으로 DSFEMP에 대한 오차의 비는 표 3과 같이 나타났다. 결과를 검토해보면 각각의 오차는 탄성계수의 변동계수가 10%이하일 때 5%이하의 오차를 보이는 반면 25%에서는 14.49%, 30%에서 38.04%, 35%에서 60.52%로써 변동계수 증가함에 따라 어느 기점을 기준으로 급격히 증가함을 알 수 있다. 그러므로 본 연구에서 개발한 프로그램은 변동계수가 15%이하일 때 유용성이 있다고 판단된다.

표 3 Standard deviation and ratio for variability of young's modulus

Node.		C.O.V							
		5%	10%	15%	20%	25%	30%	35%	
7	DSFEMP	0.023	0.047	0.073	0.097	0.126	0.158	0.192	
	DMCSF	0.023	0.046	0.069	0.089	0.110	0.115	0.120	
	RATIO(%)	0.43	2.86	5.48	8.83	14.49	38.01	60.52	

(Simulation no. = 10,000)

4.3 사장교의 해석 모델

본 연구의 수치해석 대상교량은 우리나라 최초의 강사장교인 진도대교를 선정하였다. 진도대교는 그림 7과 같이 폭 11.3m, 길이 484m(주경간장 344m, 측경간장 70m)의 강상자형 주형과 69m 높이의 강상자형 주탑으로 구성된 사장교이다. 본 연구에서는 대상교량을 총 71개의 절점

과 34개의 등가트러스 요소, 68개의 보요소로 그림 8과 같이 모델링 하였으며, 케이블, 주탑과 주형의 구성요소에 대한 제원은 표 4와 같다.¹⁹⁾

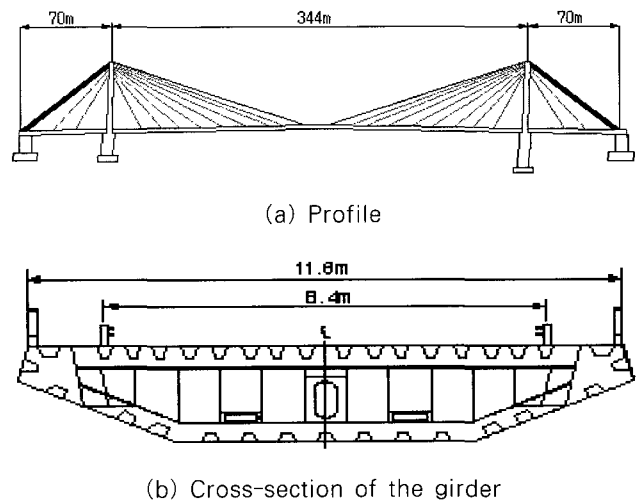


그림 7 Profile of Jindo bridge

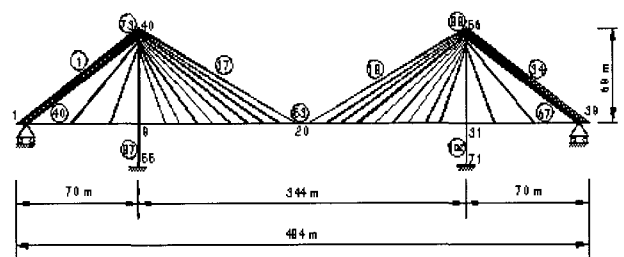


그림 8 Model for numerical analysis

표 4 Properties of members for cable stayed bridge

Properties		Area (m ²)	Young's modulus (tonf/m ²)	Cross section moment of inertia (m ⁴)	Unit weight (tonf/m ³)
Girder	Side	0.9475	2.1 × 10 ⁷	0.9475	7.85
	Center	0.4373		0.5544	
Tower	Top	0.646	2.1 × 10 ⁷	1.227	7.85
	Middle	0.525		0.482	
	Bottom	0.619		0.534	
	Pier	35.6	2.0 × 10 ⁶	125.4	2.5
Cable	①②③④⑤⑥⑦⑧	0.0814	1.6 × 10 ⁷	0	7.85
	⑨⑩	0.0488			
	⑪⑫	0.0348			
	⑬⑭⑮	0.0622			

4.4 동적확률유한요소해석 결과 분석

기진력과 계 인자의 불확정성이 응답에 미치는 효과가 거의 독립적이라는 성질로부터 응답에 대한 섭동모델을 유도하였다. 계 인자 중에서 질량과 감쇠는 시간에 대해 변화가 없는 확정적인 변수로 고려하였다. 부재강성과 가속도 시간이력에 의한 지진하중이 갖는 불확정성을 모두 확률변수로 고려하였으며, 변동계수는 10%를 적용하여 동적 응답해석을 수행하였다. 여기서 사장교의 부재강성에 영향을 주는 확률변수로는 케이블요소의 단면적, 탄성계수, 주탑과 주형의 단면적, 탄성계수, 단면이차모멘트 등을 확률변수로 고려하였다. 지진하중은 그림 9와 같은 Chi-Chi 지진에서 계측된 ILA035NS 지진기록을 이용하였다. 지진하중의 분산특성을 보다 명확하게 나타내기 위해 가속도 시간이력을 증폭하여 0.7g로 정규화한 후 질량에 곱하여 지진하중을 산정하였으며, 주형에 직각방향으로 적용하여 해석하였다.²⁾ 본 연구에서는 초기형상해석을 수행한 후 산정한 케이블의 초기긴장력을 도입하여 고정하중과 평형을 이루는 상태까지는 정적 비선형 해석을 수행하였으며, 사용상태에 대한 동적해석은 정적 비선형 해석의 최종 평형 상태를 초기상태로 간주하여 선형해석을 수행하였다. 이러한 조건하에서 검증된 DSFEMP에 의하여 대상 사장교의 주형과 주탑의 절점변위, 축력 및 모멘트, 케이블긴장력 응답에 대한 평균, 표준편차 및 변동계수를 계산하였다. 이때, 수치해법은 $\neq wmark - \beta$ 방법을 이용하였으며 감쇠비는 2%를 적용하여 해석하였다.

4.4.1 절점변위 응답

확률변수에 의한 대상교량의 절점변위 응답은 주형의 경우 수직변위가 가장 크게 나타난 20번 절점의 변위를 검토하였으며 주탑의 경우 수평변위가 가장 크게 나타난 40

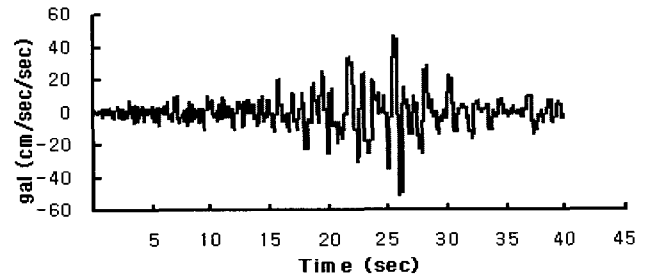


그림 9 ILA035NS acceleration time history

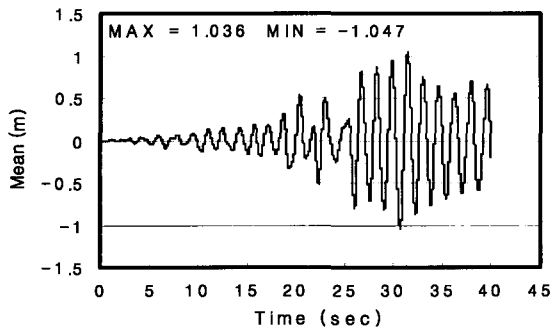
번 절점 변위를 검토하였다. 그림 10~11은 사장교의 변위응답을 도시한 것으로써 최대, 최소 수직변위에 대한 평균 응답은 1.036m, -1.047m로 나타났으며, 표준편차 응답은 0.040m의 응답결과를 보이고 있다. 주탑의 경우 평균 응답은 0.188m, -0.176m로 나타났으며, 표준편차는 0.008m의 응답결과를 보이고 있다. 변위응답에 대한 변동계수는 수직변위의 경우 3.82%가 발생했으며 수평변위의 경우 4.25%로 나타났다.

4.4.2 부재력 응답

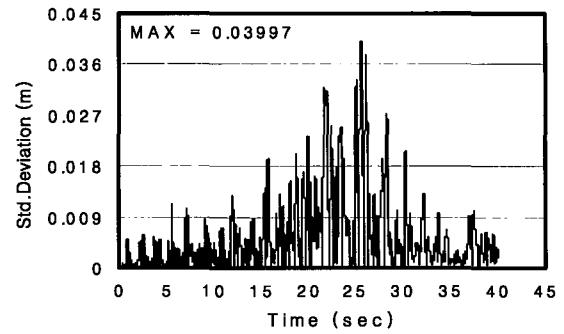
확률변수에 의한 부재력 응답은 주형과 주탑의 축력 및 모멘트로 구분하여 나타났다. 주형에서는 주형과 주탑의 접합부인 42번 부재와 중앙경간 53번 부재에 대한 축력 및 모멘트의 평균과 표준편차에 대하여 해석하였다. 주탑에서는 주형과 주탑의 접합부인 85번 부재와 최하단부의 87번 부재에 대하여 해석하였다. 수치해석에 따른 축력 및 모멘트의 평균과 표준편차는 그림 12~19와 같이 도시하였으며 표 5와 같이 정리하였다.

표 5 Mean and standard deviation of the member force (tonf, tonf · m)

Member No.		Member force	
		Axial force	Bending moment
Cable	1	Mean	186.06
		Std. deviation	7.7680
		C.O.V(%)	4.1749
	17	Mean	180.04
		Std. deviation	6.0024
		C.O.V(%)	3.3339
Girder	42	Mean	848.68
		Std. deviation	36.269
		C.O.V(%)	4.2735
	53	Mean	591.19
		Std. deviation	24.169
		C.O.V(%)	4.0882
Tower	85	Mean	1295.6
		Std. deviation	57.467
		C.O.V(%)	4.4356
	87	Mean	1298.3
		Std. deviation	134.24
		C.O.V(%)	10.340

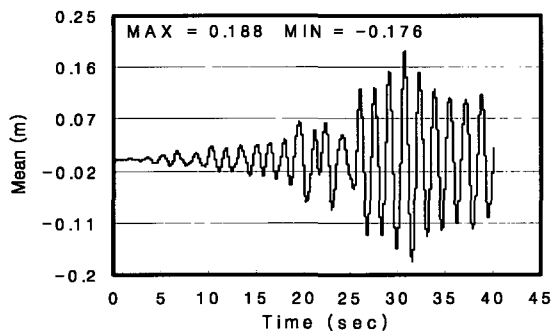


(a) Mean

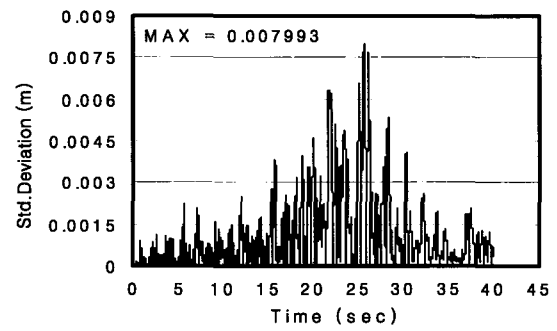


(b) Std. deviation

그림 10 Mean and std. deviation for DSFEMP vertical displacement of node 20

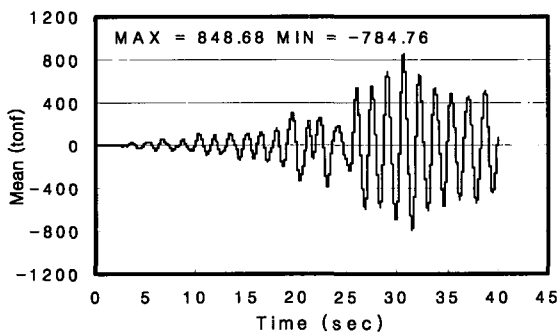


(a) Mean

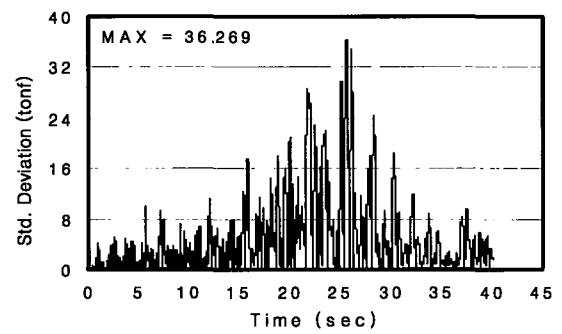


(b) Std. deviation

그림 11 Mean and std. deviation for DSFEMP horizontal displacement of node 40

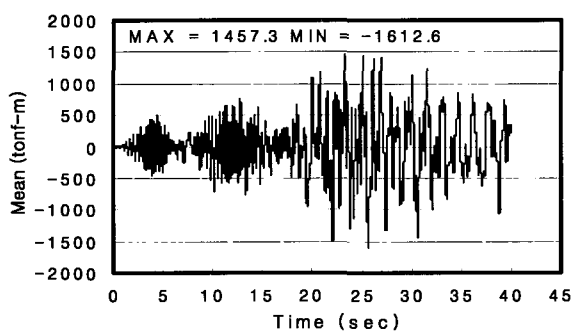


(a) Mean

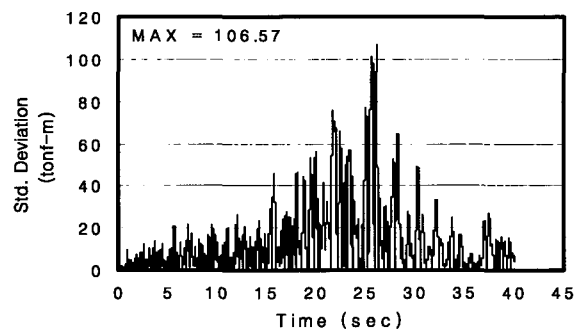


(b) Std. deviation

그림 12 Mean and std. deviation for DSFEMP axial force of member 42

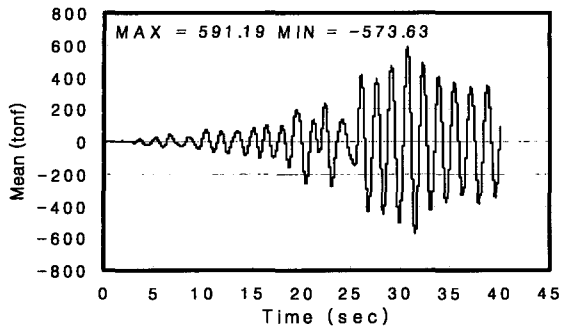


(a) Mean

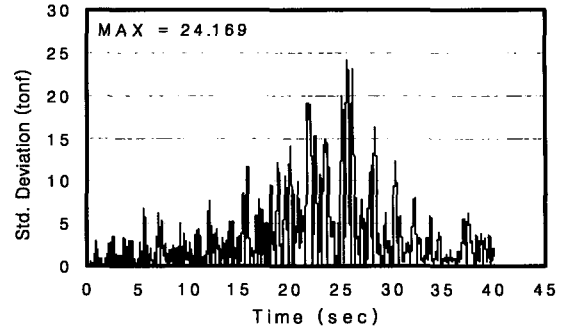


(b) Std. deviation

그림 13 Mean and std. deviation for DSFEMP bending moment of member 42

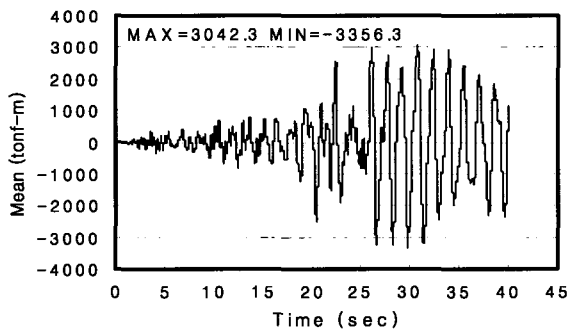


(a) Mean

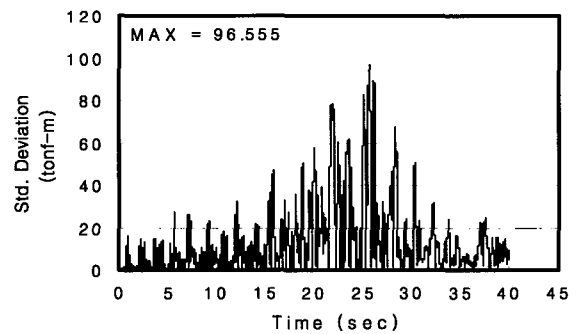


(b) Std. deviation

그림 14 Mean and std. deviation for DSFEMP axial force of member 53

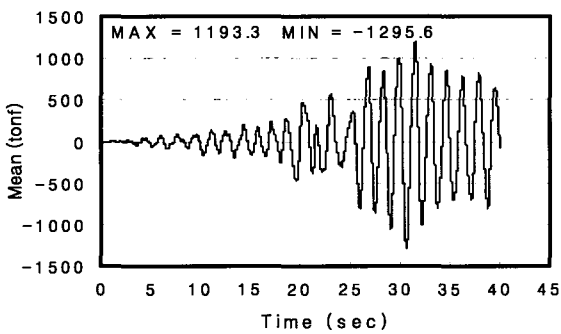


(a) Mean

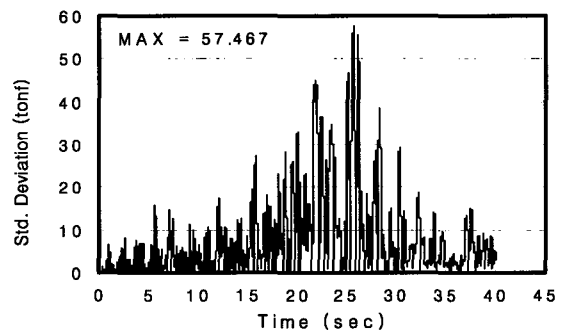


(b) Std. deviation

그림 15 Mean and std. deviation for DSFEMP bending moment of member 53

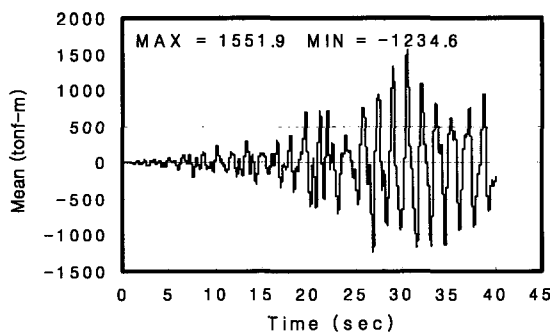


(a) Mean

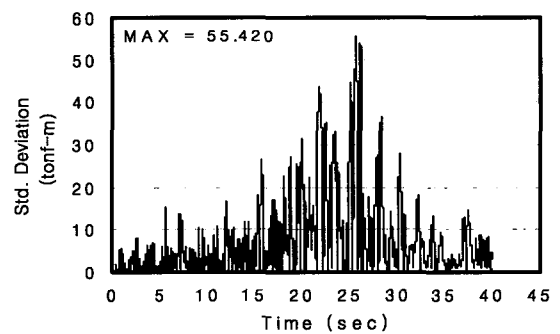


(b) Std. deviation

그림 16 Mean and std. deviation for DSFEMP axial force of member 85

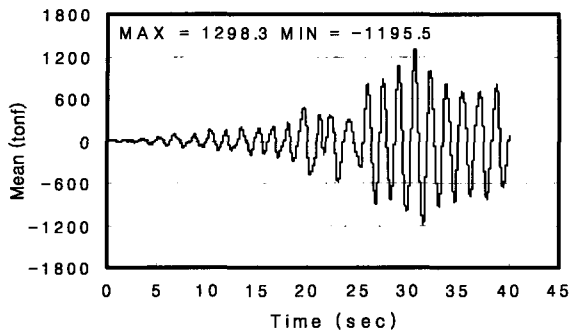


(a) Mean

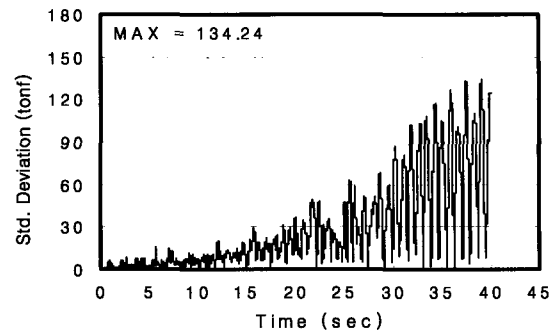


(b) Std. deviation

그림 17 Mean and std. deviation for DSFEMP bending moment of member 85

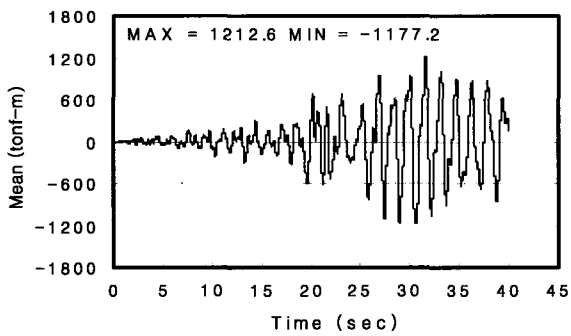


(a) Mean

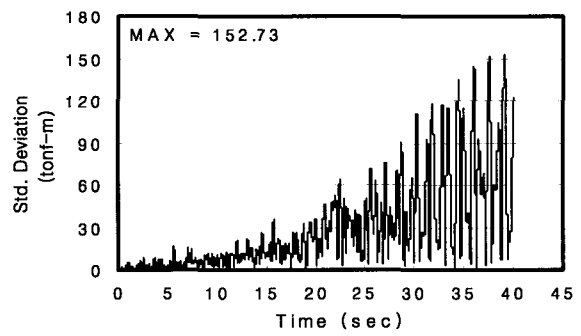


(b) Std. deviation

그림 18 Mean and std. deviation for DSFEMP axial force of member 87

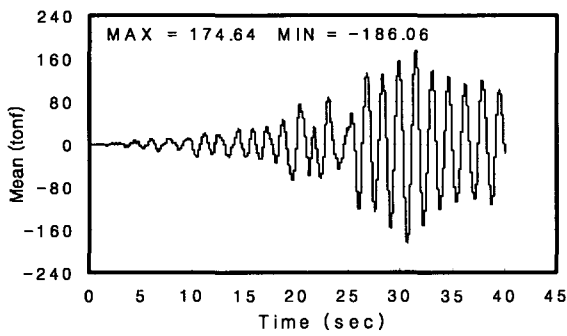


(a) Mean

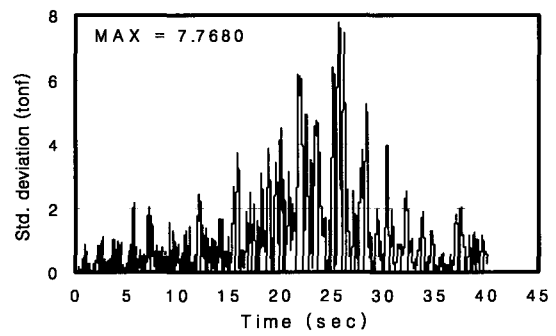


(b) Std. deviation

그림 19 Mean and std. deviation for DSFEMP bending moment of member 87

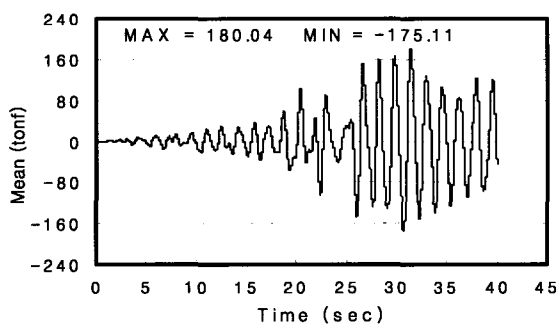


(a) Mean

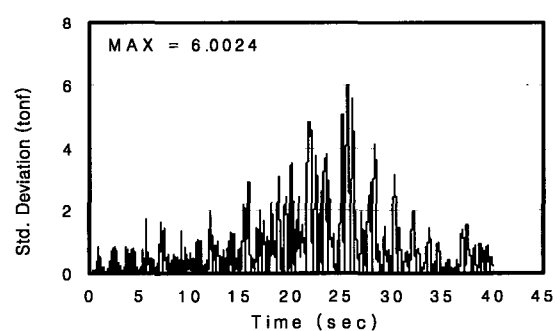


(b) Std. deviation

그림 20 Mean and std. deviation for DSFEMP cable tension of member 1



(a) Mean



(b) Std. deviation

그림 21 Mean and std. deviation for DSFEMP cable tension of member 17

4.4.3 케이블 긴장력

사장교와 같은 케이블지지 구조물은 케이블 긴장력을 결정하는 것이 매우 중요하다. 그러나 긴장력을 결정하는 것은 많은 어려움이 따른다. 본 연구에서는 사장교의 비선형성을 고려한 시산법(Trial and error method)을 이용하여 주형의 고정하중 분포에 따른 케이블의 초기긴장력을 모든 절점에서 최대 상대변위 0.001m의 수렴조건을 적용하여 결정하였다. 고정하중은 주탑과 케이블의 자중 및 주형의 자중과 부가고정하중을 포함하여 산정하였으며, 대상교량이 대칭구조이므로 케이블 1~17번 요소에 대하여 초기형상해석에 의한 초기긴장력 계산 결과는 표 6과 같다.

케이블 초기긴장력을 결정한 후 확률변수에 의한 케이블 긴장력에 대한 응답은 주탑을 중심으로 양 끝단에 있는 1, 17번 케이블의 응답을 고찰하였으며, 그림 20~21과 같이 도시하였다. 1, 17번 케이블의 최대 최소 긴장력 평균 응답은 174.64, -186.06tonf와 180.04, -175.11tonf로 나타났으며, 각각에 대한 표준편차는 7.77, 6.00tonf의 응답 결과를 보이고 있다. 변동계수는 1번 케이블의 경우 4.18%, 17번 케이블의 경우는 3.33%로 나타났다.

표 6 Initial cable tension force (tonf)

Cable No.	Cable tension	Cable No.	Cable tension
1	284.329	10	182.353
2	258.640	11	107.852
3	237.618	12	150.895
4	219.120	13	167.433
5	200.128	14	180.392
6	177.696	15	200.841
7	334.013	16	241.770
8	52.969	17	244.387
9	61.498	-	-

5. 사장교의 신뢰성해석

본 장에서는 DSFEMP에 의한 응답해석 결과를 이용하여 신뢰성해석을 수행하였다. 변위의 불확실량은 사용성에 대한 신뢰성해석이므로 생략하였으며, 케이블 긴장력, 주형과 주탑의 축력 및 휨모멘트에 의해서 신뢰성해석을 수행하였다. 이때 각각의 확률변수는 정규분포를 갖으며 서

로 무상관(비연성)관계를 갖는 것으로 가정하였다. 신뢰성 해석 방법은 AFOSM 방법에 의해 수행하였으며, 대상 사장교의 신뢰성지수(β) 및 파괴확률(P_f)을 계산하여 서로 비교·검토하였다. 대상사장교의 케이블을 Locked Coil로 가정할 때, 케이블의 극한인장응력은 $10,300\text{kgf/cm}^2$ 이고, 주형과 주탑은 SM400인 강재로 간주하여 극한응력을 $2,400\text{kgf/cm}^2$ 로 가정하였다. 또한 극한응력에 대한 변동계수(C.O.V)는 15%로 가정하였다.^{20),21)}

5.1 한계상태방정식

DSFEMP에 의해 계산된 평균과 표준편차를 바탕으로 부재의 파괴확률을 산정하였다. 주형과 주탑에서는 축력과 휨모멘트가 동시에 작용하고, 케이블에는 긴장력만 작용하고 있으므로, 확률변수는 축력, 휨모멘트, 단면이차모멘트, 케이블긴장력 및 단면적으로 구성된다. 주형과 주탑 및 케이블에 대한 부재응력을 확률변수의 함수로 나타내면 식 (19)와 같다.

$$\sigma_g = \frac{P(\cdot)}{A(\cdot)_g} + \frac{M(\cdot)}{I(\cdot)_g} y, \quad \sigma_c = \frac{T(\cdot)}{A(\cdot)_c} \quad (19)$$

여기서 σ_g, σ_c : 주형과 주탑, 케이블의 응력

$P(\cdot), M(\cdot)$: 주형, 주탑의 축력, 휨모멘트

$T(\cdot)$: 케이블의 긴장력

$A(\cdot)_g, A(\cdot)_c$: 주형, 주탑, 케이블의 단면적

$I(\cdot)_g$: 주형과 주탑의 단면이차모멘트

따라서 한계상태방정식은 다음 식과 같이 정의할 수 있다.

$$g(\cdot)_{\sigma_g} = \sigma_{yg} - \frac{P(\cdot)}{A(\cdot)_g} - \frac{M(\cdot)}{I(\cdot)_g} y \quad (20)$$

$$g(\cdot)_{\sigma_c} = \sigma_{yc} - \frac{T(\cdot)}{A(\cdot)_c} \quad (21)$$

여기서 σ_{yg}, σ_{yc} 은 주형, 주탑과 케이블의 극한응력을 나타내고 있으며, 한계상태방정식에 대한 표준편차는 식 (22)와 같이 계산할 수 있다.

$$\sigma_{g(\cdot)} = \left[\sum_i \left(\frac{\partial g(\cdot)}{\partial X_i} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 \right]^{1/2} \quad (22)$$

본 연구에서는 식 (20), (21)을 이용하여 확률변수에 의해 발생하는 최대 부재응력에 대하여 평균과 표준편차를 계산하여 신뢰성해석을 수행하였다.

5.2 신뢰성해석 결과

한계상태방정식을 이용하여 주형은 주형과 주탑의 접합부인 42번 부재, 중앙경간의 53번 부재, 또한 주탑은 주형과 주탑의 접합부인 85번 부재, 주탑 최하단부인 87번 부재에 대하여 신뢰성해석을 수행하였다. 케이블은 주탑을 중심으로 끝단에 있는 1, 17번 부재에 대하여 신뢰성해석을 수행하였다. DSFEMP에 의한 각각의 부재력에 대한 평균, 표준편차, 변동계수는 표 5와 같이 나타났으며, 신뢰성지수 및 파괴확률은 표 7과 같다.

표 7 Reliability Index and failure probability

Member No.	Reliability index (β)	Failure probability (P_f)
Cable	1	5.406
	17	5.451
Girder	42	4.639
	53	3.181
Tower	85	4.725
	87	6.648

6. 결 론

본 연구에서는 확률유한요소법을 이용하여 기존의 신뢰성이론에 적합하도록 정식화하여 사장교 구조물을 대상으로 동적응답해석 및 신뢰성해석을 보다 효율적으로 수행할 수 있는 프로그램을 작성하였다.

작성된 프로그램(DSFEMP)을 이용하여 기존의 확정론적인 방법 및 DMCS응답해석에 따른 신뢰성 평가방법과는 다른 해석방법에 의해 확률변수에 의한 사장교 구조물의 동적응답을 정량적으로 파악하였으며, 계산된 신뢰성지수와 파괴확률을 검토하여 사장교 구조물의 안전성을 평가하였다. 본 연구에서 작성한 프로그램의 타당성은 DMCS에 의한 응답해석과의 비교, 자유진동해석 및 상관관계를 검토하여 검증하였다. DSFEMP프로그램은 효율성 면에서 볼 때 반복적인 동적응답해석 시 시간이 과다하게 소요되는 DMCS의 단점을 해결할 수 있으며, 단 한 번의 해석으로 확률변수에 대한 영향을 명확하게 파악할 수 있는 유용한 수단으로 판단된다. 또한 구조해석의 각 단계마다 확률변수에 의한 분산특성을 고려할 수 있기 때문에 사장교와 같이 복잡한 구조물의 신뢰성 해석을 보다 효과적으로 수행할 수 있었다.

추후 연구과제로 불확실성을 갖는 확률변수들의 상호간 상관성을 고려하여 신뢰성해석을 수행해야 할 것이다. 또한 지진하중, 풍하중 등을 고려한 3차원 확률유한요소해석

프로그램 개발 및 신뢰성해석 등에도 범위를 확대해 나갈 필요성이 있다고 판단된다.

참 고 문 헌

1. Fleming, J. F., Egesell, E. A., "Dynamic Behavior of a Cable Stayed Bridge", *Earthquake Engineering and Structure Dynamics*, Vol. 8, 1980. pp.1~16
2. Nazmy, A. S., Abdel-Ghaffar, A. M., "Non-linear Earthquake Response Analysis of Long Span Cable Stayed Bridges Theory", *Earthquake Engineering and Structure Dynamics*, Vol. 19, 1990. pp.45~62
3. 한국건설기술연구원, "장대교량의 설계 및 시공에 관한 연구", 연구보고서 KICT/95-SE-111-64, 1995
4. 한국건설기술연구원, "장대교량의 내풍성능 향상 기술에 관한 연구", 연구보고서, 2000
5. 현대건설기술연구소, "현수교의 시공 단계 해석 시스템 개발", 최종보고서, 1994
6. Kleiber, M., Hien, T. D., *The Stochastic Finite Element Method*, John Wiley & Sons, 1991.
7. Handa, K., *Application of Finite Element Method in the Statistical Analysis of Structures*, Div. of Structural Design, Chalmers University of Technology, Sweden, 1975
8. Handa, K., Karrholm, G., *Application of Lognormal Distribution Function in the Statistical Analysis of Structures*, Div. of Structural Design, Chalmers University of Technology, Sweden, 1979
9. Ernst, H. J., *Der E-Modul von Seilen unter Berucksichtigung des Durchchanges*, *Der Bauingenieur*, Vol.40, No.2, 1965
10. 정인수, 확률유한요소법을 이용한 사장교의 신뢰해석, 충남대학교 박사학위논문, 2002
11. 양영순, 김지호, "평면 FRAME 구조물의 확률유한요소해석", 한국전산구조공학회, 제2권 제4호, 1989 pp.89~98
12. 이태열, 사장교 케이블의 최적화에 관한 연구, 한국과학기술원 석사학위논문, 1997
13. 한성호, 확률유한요소법을 이용한 사장교의 동적확률유한요소해석 및 신뢰성해석에 관한 연구, 충남대학교 박사학위논문, 2003
14. 지영준, 김화준, 허정권, C로 구현한 수치해석, 높이깊이, 1993
15. Shooman, M. L., *Probabilistic Reliability : An Engineering Approach*, McGraw-Hill, New York, 1968

16. Hasofer, A. M., Lind, N. C., "Exact and Invariant Second Moment Code Format", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 100, No. EM1, 1974, pp.111~121
17. Rackwitz, R., Fiessler, B., "Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences", *Computers and Structures*, Vol. 9, No. 5, 1978, pp.489~494
18. 윤군진, 이완수, "사장교의 정적 비선형 해석과 초기형상결정해석", 대한토목학회논문집, 제21권, 제1-A호, pp.165~177, 2001
19. 건설부, 진도대교 안전진단, 한국건설기술연구원, 한양대학교 산업과학연구소, 1993
20. 건설부, 도로교 표준시방서, 1996
21. 변운주, 김우종, "강사장교의 설계와 시공", 한국강구조학회지, 제3권, 제2호, 1991, pp.18~30