

Design of H_∞ tracking control for linear systems with saturating actuators

李 淵 圭* · 金 明 淳** · 金 鎮 勳†

(Yeorn-Gui Yi · Myoung-Soon Kim · Jin-Hoon Kim)

Abstract - In this paper, we consider the H_∞ tracking control of linear system with a limited actuator capacity. The considered reference is a general time-varying one with bounded magnitude and rate. By adopting a similarity transform and a new state variable, we convert the original system equation to new one which has a tracking error as a part of the new state variable. First, we obtain a result on the low-gained H_∞ tracking control which never permits the actuator saturation. Next, we give a result on scheduled H_∞ tracking control which uses the actuator capacity more effectively. All results are in the form of linear matrix inequalities(LMI) which can be easily checked their feasibility. Finally, we give a numerical example to show the validity and usefulness of our results.

Key Words : H_∞ Tracking, Saturation, General Reference, LMI, Low-Gain and Scheduled

1. 서 론

제어 시스템 문제는 기준입력의 특성에 따라 레귤레이션 문제(regulation problem)와 추종문제(tracking problem)로 나누어진다. 레귤레이션 문제는 기준입력(reference)이 시간에 따라 일정한 경우를 말하며, 추종문제는 기준입력이 시간에 따라 변화하는 경우를 말한다. 그리고 선형 시스템에 대한 레귤레이션 문제는 안정화(stabilization) 문제로 쉽게 등가 변환이 되기 때문에 대부분의 경우 안정화 문제로 이를 해결하고 또한, 미리 정확하게 알려진 시변 기준입력(time-varying reference)을 추종하는 추종제어의 문제 역시 안정화 문제로 변환하여 추종제어기를 설계하는 것이 일반적이다[8]. 그러나 시변 기준입력이 정확하게 알려지지 않은 경우에 대한 추종 제어기 설계 방법에 대한 연구는 매우 미미한 수준이다.

실제 제어 시스템의 구현 시에는 제어기 출력 신호를 시스템 입력으로 변환하여 주는 구동기(actuator)가 반드시 있어야 한다. 이상적인 구동기는 용량이 충분히 커서 모든 제어 신호를 받아 선형적으로 변환해주는 것이나, 이렇게 되면 구동기의 크기 또는 부피가 커질 뿐만 아니라 가격 면에서도 매우 비경제적으로 된다. 따라서 가능한 적은 용량의 구동기로서 최대한의 효과를 내는 것이 바람직하기에 대부분의 제어 시스템에서는 구동기 용량에 제한이 가하여진다.

이런 제한된 구동기를 가지는 시스템에 이를 고려하지 않고 설계된 제어기를 인가하면, 시스템의 성능 저하뿐만 아니라 종종 시스템의 안정성까지도 보장하지 못한다[10]. 구동기의 용량 제한이 있는 경우 제어기 설계 방법으로는 다음의 세 가지 방법이 대표적으로 사용된다. (i) 구동기의 용량제한을 무시한 선형제어기를 설계한 후, 제어기의 이득을 시행착오(trial and error) 방법으로 줄여서 제어 성능을 최소한도로 저하시키도록 하는 앤티-와인드업(anti-windup) 제어방법[6]. (ii) 페루프 시스템의 동작 중에 절대로 구동기 포화가 발생되지 않도록 제어기 이득을 설계하는 저이득(low-gain) 제어기 설계방법[3][4][10]. (iii) 페루프 시스템 동작 중에 구동기의 포화를 허용하는 고이득(high-gain) 제어기 설계방법[1][2][3][4][10]이다. 그러나 이들 대부분은 안정화 문제나 외란감쇠문제에 대한 결과이다[3][10].

추종제어의 경우, 이의 추종성능은 시변기준입력의 최대 크기뿐만 아니라 이의 시간에 따른 변화율에 따라 달라지는 것이 일반적이다. 즉 같은 최대 크기를 가지더라도 이의 시간 변화율이 크면 추종성능이 떨어지는 것이 일반적이다. 따라서 추종제어기를 설계할 때 기준입력의 최대 크기뿐만 아니라 이의 최대 시간변화율도 고려한 제어기 설계가 요구된다.

2. 문제 기술 및 모델 변환

다음의 포화 구동기를 갖는 선형 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2 \text{sat}[u(t)] \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, $x \in R^n$ 은 상태, $u \in R^m$ 은 제어 입력, $y \in R^p$ 는 측정출력이고, 행렬 A, B_2, C 는 적당한 차원을 갖는 상수행렬

† 교신저자, 正會員 : 忠北大學校 電氣電子工學部 教授 · 工博

E-Mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr

* 正會員 : 忠北大學校 大學院 制御計測工學科 博士課程

** 學生會員 : 忠北大學校 大學院 制御計測工學科 碩士課程

接受日字 : 2004年 12月 28日

最終完了 : 2005年 1月 28日

(constant matrix)이다. 또한, 비선형 포화함수는 다음으로 주어지며 $sat[u] = [sat(u_1), sat(u_2), \dots, sat(u_m)]^T$, 각각의 제어 입력 u_i 에 대한 구동기 용량은 u_i^0 이다. 즉 제어 입력 u_i 에 대한 구동기 출력은 다음으로 기술된다.

$$sat(u_i) = \begin{cases} u_i^0 & , \text{if } u_i > u_i^0 \\ u_i & , \text{if } |u_i| \leq u_i^0 \\ -u_i^0 & , \text{if } u_i < -u_i^0 \end{cases} \quad (2)$$

포화특성 (2)를 갖는 시스템 (1)의 추종특성은 구동기의 용량(u_i^0) 뿐만 아니라, 기준 입력 $y_r(t)$ 과 이의 시간 변화율 $\dot{y}_r(t)$ 의 특성에도 의존하게 된다. 즉, 상대적으로 작은 크기의 $\{\|y_r\|_{\max}, \|\dot{y}_r\|_{\max}\}$ 보다는 큰 값에 대한 추종 성능이 저하된다. 따라서 일반적으로 다음과 같은 기준입력에 대한 추종제어를 설계하는 것이 바람직하다.

$$y_r(t)^T \dot{y}_r(t) + \dot{y}_r(t)^T \dot{y}_r(t) \leq w_{\max}^2 \quad \text{그리고 } y_r(0) = 0.$$

이는 다음과 같이 새로운 벡터, $w(t)$,를 정의하면 다음과 동치이다.

$$w(t) = \begin{bmatrix} y_r(t) \\ \dot{y}_r(t) \end{bmatrix}, \quad w(t)^T w(t) \leq w_{\max}^2. \quad (3)$$

끝으로 추종오차는 다음으로 주어진다.

$$e(t) = y(t) - y_r(t). \quad (4)$$

2.1 문제 기술

A. 저이득 H_∞ 추종제어기 설계: 포화 구동기를 갖는 시스템 (1)에서 (3)에 정의된 $w(t)$ 로 부터 (4)에 정의된 추종오차까지의 L_2 이득이 최소가 되면서 또한 포화를 허용하지 않는 저이득 선형 제어기 $u(t)$ 를 설계하는 것이다.

B. 개인 스케줄링 H_∞ 추종제어기 설계: 저이득 H_∞ 추종제어기 설계는 설계 과정에서 얻어지는 리치블셋 내에서 항상 같은 제어이득을 이용하기에 구동기의 용량을 최대로 이용하지 못하는 단점이 있다. 이를 극복하기 위하여 리치블셋을 상태 크기에 따른 N 개의 서브셋 $\Omega_k, k=1, 2, \dots, N$ 로 나누어, 각각의 서브셋 Ω_k 에서 $w(t)$ 로 부터 (4)의 추종오차까지 L_2 이득 γ_k 가 최소가 되도록 하면서 포화를 허용하지 않는 제어기 $u^{(k)}(t), k=1, 2, \dots, N$ 을 설계한 후, 상태가 속하는 서브셋에 따라 제어기를 달리 적용하여 추종성능을 향상시키는 것이 주 목적이다.

2.2. 모델의 등가변환

시스템 (1)에서 출력을 추종오차로 바꾸어 쓰면 다음으로 기술된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2 sat[u(t)] \\ e(t) &= y(t) - y_r(t) = Cx(t) - y_r(t). \end{aligned} \quad (5)$$

그러나 위의 시스템 (5)에 대하여 기준입력 $y_r(t)$ 로부터 추종오차($e(t)$)까지의 L_2 이득을 최소로 하는 제어기를 설계하면 이의 L_2 이득은 항상 거의 1에 가깝고, 설계된 제어기는 $y(t) \rightarrow y_r(t)$ 의 성질을 갖지 않고 $Cx(t) \rightarrow 0$ 의 성질을 갖게 되므로 (5)로 기술된 시스템을 이용하여 제어기를 설계하면 원하는 추종제어기를 얻을 수 없다. 따라서 모델의 등가 변환을 통하여 추종오차가 상태에 포함되도록 하는 과정이 필요하다. 이를 위하여 다음의 행렬 $T = \begin{bmatrix} C \\ Z \end{bmatrix} \in R^{n \times n}$ 를(여기서 $Z \in R^{(n-p) \times n}$ 는 행렬 T 를 비특이화(nonsingular)하는 임의의 행렬이다) 선택하면 항상 $CT^{-1} = [I_p \ 0]$ 이 되므로[7], 유사변환(similarity transform) $\bar{x} = Tx$ 을 (1)에 행하면 다음의 등가 시스템을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}_2 sat[u(t)] \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, $\bar{A} = TAT^{-1}$, $\bar{B}_2 = TB_2$, $\bar{C} = CT^{-1} = [I_p \ 0]$ 이다.

여기에 새로운 상태 $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) - y_r(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ 를 도입하면 다음이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}_1 w(t) + \bar{B}_2 sat[u(t)] \\ e(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, $\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$, $\bar{A}_{11} \in R^{p \times p}$ 로 분해하면

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & -I \\ \bar{A}_{21} & 0 \end{bmatrix} \text{으로 주어진다.}$$

이 논문에서는, $diag(\cdot)$ 은 대각행렬(diagonal matrix)을 의미하며, $\|\cdot\|$ 는 벡터에 대한 노름, $|\cdot|$ 는 스칼라에 대한 절대값을 나타낸다. 다음으로, 행렬 Y 에 대하여 Y^T 는 전치행렬(transpose matrix)을, Y_i 는 i 번째 행벡터(row vector)를 의미하며, 두 대칭 행렬 X, Y 에 대하여 $X < Y$ 는 $X - Y$ 가 음확정행렬(negative definite matrix)임을 의미한다. 그리고 I 는 적당한 차원의 항등행렬(identity matrix)을 나타낸다.

3. 저이득 H_∞ 추종 제어기 설계

저이득 제어기는 시스템 동작 중 절대로 포화가 발생되지 않는 제어를 말하며, 이를 효과적으로 다루기 위하여 다음의 두 개의 집합을 정의하자.

$$U := \{u \in R^m : |u_i(t)| < u_i^0, \forall i\} \quad (8)$$

$$\Omega := \{\xi \in R^n : V(\xi) := \xi^T Q^{-1} \xi \leq \sigma_0 w_{\max}^2\} \quad (9)$$

그러면 다음의 제어기를 시스템 (7)에 가하였을 때

$$u(t) = K\tilde{x}(t) + Hw(t) \quad (10)$$

만약 $u(t) \in U, \forall t$ 라면 페루프 시스템은 다음의 선형 시스템이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= [\bar{A} + \bar{B}_2 K] \tilde{x}(t) + [\bar{B}_1 + \bar{B}_2 H] w(t) \\ e(t) &= \bar{C} \tilde{x}(t). \end{aligned} \quad (11)$$

다음의 보조정리 1은 제어 (10)을 갖는 시스템 (7)이 $w(t)^T w(t) \leq w_{\max}^2$ 인 경우에 항상 선형적인 시스템 (11)로 동작함을 보장하는 결과이다.

보조정리 1: 시스템 (7)에서 $w(t)^T w(t) \leq w_{\max}^2$ 라 하자. 만약, 다음을 만족하는 양확정행렬 $Q \in R^{n \times n} > 0$ 와 임의의 행렬 $Y \in R^{n \times m}$, 그리고 양의 상수 $\alpha, \sigma_0, \sigma_1 > 0$ 이 존재하면

$$(i) \begin{bmatrix} \sigma_1 Q & 0 & Y_i^T \\ 0 & 1 - \sigma_1 \sigma_0 & H_i^T \\ Y_i & H_i & \left(\frac{u_i^0}{w_{\max}}\right)^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (12)$$

$$(ii) \begin{bmatrix} \bar{A}Q + Q\bar{A}^T + \bar{B}_2 Y + Y^T \bar{B}_2^T + \alpha Q & \bar{B}_1 + \bar{B}_2 H^T \\ \bar{B}_1^T + H^T \bar{B}_2^T & -\alpha \sigma_0 \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

다음의 제어를 갖는 시스템 (7)은

$$u(t) = K\tilde{x}(t) + Hw(t), \quad K = YQ^{-1} \quad (14)$$

항상 다음을 만족한다.

- (a) $\tilde{x}(t) \in \Omega, \forall t \geq 0$
- (b) $u(t) \in U, \forall t \geq 0.$

증명: 먼저, $w(t)^T w(t) \leq w_{\max}^2$ 이므로, $\tilde{x}(t) \in \Omega$ 인 영역(즉, $\tilde{x}(t)^T Q^{-1} \tilde{x}(t) \leq \sigma_0 w_{\max}^2$)에서는 다음의 관계식이 성립한다.

LMI (12)

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 Q & 0 \\ 0 & 1 - \sigma_1 \sigma_0 \end{bmatrix} - \left(\frac{w_{\max}}{u_i^0}\right)^2 \begin{bmatrix} Y_i^T \\ H_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i & H_i \end{bmatrix} > 0$$

$$\leftrightarrow \sigma_1 \tilde{x}(t)^T Q^{-1} \tilde{x}(t) + (1 - \sigma_1 \sigma_0) w(t)^T w(t)$$

$$- \left(\frac{w_{\max}^2}{u_i^0}\right)^2 u_i^T u_i > 0$$

$$\rightarrow \sigma_1 \sigma_0 w_{\max}^2 + (1 - \sigma_1 \sigma_0) w_{\max}^2 - \left(\frac{w_{\max}^2}{u_i^0}\right)^2 u_i^T u_i > 0$$

$$\rightarrow |u_i(t)| < u_i^0$$

따라서 우리는 다음을 얻는다.

$$\text{LMI (12) with } \tilde{x}(t) \in \Omega \rightarrow u(t) \in U \quad (15)$$

다음은, 제어 (14)를 갖는 시스템 (7)의 궤적은 항상 $\tilde{x}(t) \in \Omega$ 임을 모순법(by contradiction)으로 보인다. 이를 위해 $\tilde{x}(0) = 0 \in \Omega$ 임에도 불구하고 적당한 시간에 \tilde{x} 의 궤적이 집합 Ω 밖에 존재한다고 하자. 그러면 상태 궤적의 연속성에 의하여 다음을 만족하는 시간 $t_0 > 0$ 가 반드시 존재하여야 한다.

$$(i) \begin{cases} \tilde{x}(t) \in \Omega, t \in [0, t_0] \\ \tilde{x}(t) \notin \Omega, t \in (t_0, t_0 + \epsilon], \epsilon > 0 \end{cases}$$

$$(ii) \left. \frac{d}{dt} V(x(t)) \right|_{t=t_0} > 0 \quad (16)$$

그러면 조건 (15)에 의하여 다음이 성립하고

$$|u_i(t)| < u_i^0, \forall t \in [0, t_0]$$

시스템 (7)은 다음과 같이 선형적으로 동작한다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \bar{A}\tilde{x}(t) + \bar{B}_1 w(t) + \bar{B}_2 (K\tilde{x}(t) + Hw(t)) \\ e(t) &= \bar{C}\tilde{x}(t), \quad \forall t \in [0, t_0] \end{aligned}$$

따라서 $\forall t \in [0, t_0]$ 에서, 다음의 관계가 성립하여야 한다.

LMI (13)

$$\leftrightarrow \tilde{x}(t)^T Q^{-1} [\bar{A}Q + Q\bar{A}^T + \bar{B}_2 Y + Y^T \bar{B}_2^T + \alpha Q] Q^{-1} \tilde{x}(t) + 2\tilde{x}(t)^T Q^{-1} (\bar{B}_1 + \bar{B}_2 H) w(t) - \alpha \sigma_0 w(t)^T w(t) < 0$$

$$\leftrightarrow \frac{d}{dt} V(x(t)) + \alpha V(x(t)) - \alpha \sigma_0 w(t)^T w(t) < 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} V(x(t)) + \alpha V(x(t)) - \alpha \sigma_0 w_{\max}^2 < 0 \quad (17)$$

그러나 시간 $t = t_0$ 에서는 조건 (16)에 의하여

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} V(x(t))|_{t=t_0} + \alpha V(x(t))|_{t=t_0} - \alpha \sigma_0 w_{\max}^2 \\ & = \frac{d}{dt} V(x(t)) \Big|_{t=t_0} > 0 \end{aligned}$$

이 되므로 (17)에 위배된다. 따라서 LMI (12)와 (13)을 동시에 만족하면 (16)을 만족하는 시간 t_0 가 존재하지 않는다. 따라서 모든 시간에서 항상 $u(t) \in U$ 이고, $\tilde{x}(t)$ 는 항상 $\tilde{x}(t) \in \Omega$ 이다.

다음의 정리 1은 저이득 H_∞ 추종제어에 관한 주요 결과이다.

정리 1: 시스템 (7)에서 $w(t)^T w(t) \leq w_{\max}^2$ 라 하자. 만약, 다음을 동시에 만족하는 양확정행렬 $Q \in R^{n \times n} > 0$ 와 임의의 행렬 $Y \in R^{n \times m}$, 그리고 양의 상수 $\alpha, \sigma_0, \sigma_1 > 0$ 이 존재하면

(i) LMI (12)

(ii) LMI (13)

$$(iii) \begin{bmatrix} \bar{A}Q + Q\bar{A}^T + \bar{B}_2 Y + Y^T \bar{B}_2^T & Q\bar{C}^T & \bar{B}_1 + \bar{B}_2 H \\ \bar{C}Q & -I & 0 \\ \bar{B}_1^T + H^T \bar{B}_2^T & 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

다음의 제어를 가지는 시스템 (7)은

$$u(t) = K\tilde{x}(t) + Hw(t), \quad K = YQ^{-1} \quad (19)$$

다음을 동시에 만족한다.

(a) $\tilde{x}(t) \in \Omega, \forall t \geq 0$

(b) $u(t) \in U, \forall t \geq 0$

(c) $w(t)$ 로부터 추종오차($e(t)$)까지의 L_2 이득은 γ 보다 크지 않다.

증명: 보조정리 1에 의하여, LMI (12)와 LMI (13)은 제어 (19)가 (a)와 (b)를 동시에 만족함을 보장한다. 따라서 시스템 (7)은 시스템 (11)과 동치이다. 다음은 시스템 (11)에 대하여 LMI (18)에 의하여 $w(t)$ 로부터 $e(t)$ 까지의 L_2 이득이 γ 보다 크지 않음을 보인다.

먼저, $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T Q^{-1} \tilde{x}(t)$ 라 하면, $V(\tilde{x}(t)) \geq 0$ 이고, 또한 $V(\tilde{x}(0)) = 0$ 이다. 이를 이용하면, 시스템 (11)의 궤적에 따라서 다음을 얻는다.

LMI (18)

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}Q + Q\bar{A}^T + \bar{B}_2 Y + Y^T \bar{B}_2^T + Q\bar{C}^T \bar{C}Q & \bar{B}_1 + \bar{B}_2 H \\ \bar{B}_1^T + H^T \bar{B}_2^T & -\gamma^2 \end{bmatrix} < 0$$

$$\leftrightarrow \dot{\tilde{x}}(t)^T Q^{-1} [\bar{A}Q + Q\bar{A}^T + \bar{B}_2 Y + Y^T \bar{B}_2^T + Q\bar{C}^T \bar{C}Q] Q^{-1} \tilde{x}(t)$$

$$+ 2\tilde{x}(t)^T Q^{-1} (\bar{B}_1 + \bar{B}_2 H) w(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) < 0$$

$$\leftrightarrow \frac{d}{dt} V(\tilde{x}(t)) + e(t)^T e(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) < 0$$

$$\rightarrow V(\tilde{x}(t)) - V(\tilde{x}(0))$$

$$+ \int_0^t e(\tau)^T e(\tau) d\tau - \gamma^2 \int_0^t w(\tau)^T w(\tau) d\tau < 0$$

$$\rightarrow \int_0^t e(\tau)^T e(\tau) d\tau - \gamma^2 \int_0^t w(\tau)^T w(\tau) d\tau < 0$$

$$\rightarrow \frac{\left(\int_0^t e(\tau)^T e(\tau) d\tau \right)^{1/2}}{\left(\int_0^t w(\tau)^T w(\tau) d\tau \right)^{1/2}} < \gamma$$

따라서 L_2 이득이 γ 보다 크지 않다.

4. 저이득 H_∞ 게인 스케줄링 추종 제어기 설계

위에서 설계된 저이득 H_∞ 추종제어는 절대로 포화가 일어나지 않도록 설계하였기 때문에 일반적으로 포화를 허용하는 제어보다 성능이 좋지 못한 것이 사실이다[10]. 이를 보완하기 위하여 상태의 크기에 따라 제어기의 이득을 다르게 하는 스케줄링 추종제어기를 설계한다[5]. 먼저, 저이득 추종제어기의 설계에서 구하여진 집합 Ω 를 주어진 N 개의 서브셋으로 다음과 같이 나누자.

$$\Omega_k = \left\{ x : x^T Q^{-1} x \leq \frac{1}{\delta_k} \sigma_0 w_{\max}^2 \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

여기서 $1 = \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_N$ 이다. 다음 그림 1은 $N=3$ 인 경우에 대한 서브셋을 나타낸다.

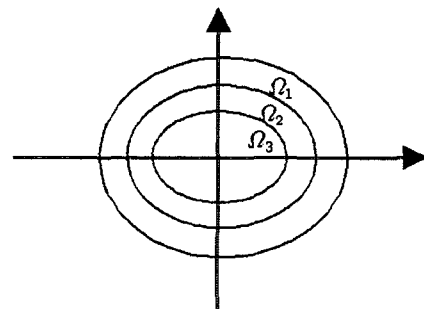


그림 1. 2차원 시스템에 대한 3개의 서브셋 예
Fig. 1. Example of 3 subsets for 2-dimensional system

다음의 정리 2는 각 서브셋 Ω_k 에서의 다음의 제어기는

$$u^{(k)}(t) = K^{(k)}\tilde{x}(t) + H^{(k)}w(t)$$

절대로 포화가 일어나지 않으면서 L_2 이득은 γ_k 보다 크지 않음을 보장하는 결과이다. 그리고 $1 = \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_N$ 이므로 L_2 이득은 $\gamma_N < \gamma_{N-1} < \dots < \gamma_1$ 이다.

정리 2: 시스템 (7)을 생각하자. 그리고 양확정행렬 $Q = Q^T \in R^{n \times n} > 0$ 과 스칼라 σ_0 를 정리 1에 의하여 구하여진 값들이라 하자. 만약 다음을 만족하는 $Y_i^{(k)} \in R^m$, 그리고 양의 상수 $\alpha^{(k)}, \sigma_0^{(k)}, \sigma_1^{(k)} > 0$ 이 존재하면

$$(i) \begin{bmatrix} \sigma_1^{(k)}\delta_k Q & 0 & [Y_i^{(k)}]^T \\ 0 & 1 - \sigma_1^{(k)}\sigma_0 & [H_i^{(k)}]^T \\ Y_i^{(k)} & H_i^{(k)} & \begin{pmatrix} u_i^0 \\ w_{\max} \end{pmatrix} \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

$$(ii) \begin{bmatrix} \bar{A}Q + Q\bar{A}^T + \bar{B}_2 Y^{(k)} + [\bar{B}_2 Y^{(k)}]^T & Q\bar{C}^T & \bar{B}_1 + \bar{B}_2 H^{(k)} \\ \bar{C}Q & -I & 0 \\ [\bar{B}_1 + \bar{B}_2 H^{(k)}]^T & 0 & -\gamma_k^2 \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

다음의 제어기는

$$u^{(k)}(t) = K^{(k)}\tilde{x}(t) + H^{(k)}w(t) \quad (23)$$

$\tilde{x}(t) \in \Omega_k$ 일 때, 다음을 만족한다.

- (a) $u^{(k)}(t) \in U$
- (b) L_2 이득은 γ_k 보다 크지 않다.

증명: 먼저, $w(t)^T w(t) \leq w_{\max}^2$ 이므로, $\tilde{x}(t) \in \Omega_k$ 인 영역 (즉, $\tilde{x}(t)^T Q^{-1} \tilde{x}(t) \leq \frac{1}{\delta_k} \sigma_0 w_{\max}^2$)에서는 다음의 관계식이 성립하므로

LMI (21)

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1^{(k)}\delta_k Q & 0 \\ 0 & 1 - \sigma_1^{(k)}\sigma_0 \end{bmatrix} - \left(\frac{w_{\max}}{u_i^0} \right)^2 \begin{bmatrix} [Y_i^{(k)}]^T \\ [H_i^{(k)}]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i^{(k)} & H_i^{(k)} \end{bmatrix} > 0$$

$$\leftrightarrow \sigma_1^{(k)}\delta_k \tilde{x}(t)^T Q^{-1} \tilde{x}(t) + (1 - \sigma_1^{(k)}\sigma_0) w(t)^T w(t) - \left(\frac{w_{\max}}{u_i^0} \right)^2 [u_i^{(k)}]^T u_i^{(k)} > 0$$

$$\rightarrow \sigma_1^{(k)}\sigma_0 w_{\max}^2 + (1 - \sigma_1^{(k)}\sigma_0) w_{\max}^2 - \left(\frac{w_{\max}}{u_i^0} \right)^2 [u_i^{(k)}]^T u_i^{(k)} > 0$$

$$\rightarrow |u_i^{(k)}(t)| < u_i^0$$

우리는 다음을 얻는다.

$$\text{LMI (21) with } \tilde{x}(t) \in \Omega_k \rightarrow u^{(k)}(t) \in U \quad (24)$$

따라서 $\tilde{x}(t) \in \Omega_k$ 일 때 $u(t) = u^{(k)}(t)$ 를 적용하면 (24)에 의하여 포화가 발생되지 않으므로 시스템 (7)은 다음으로 동작한다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \bar{A}\tilde{x}(t) + \bar{B}_1 w(t) + \bar{B}_2 (K^{(k)}\tilde{x}(t) + H^{(k)}w(t)) \\ e(t) &= \bar{C}\tilde{x}(t). \end{aligned}$$

다음으로 위의 시스템 궤적에 따라서 다음을 얻는다.

LMI (22)

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}Q + Q\bar{A}^T + \bar{B}_2 Y^{(k)} + [\bar{B}_2 Y^{(k)}]^T & Q\bar{C}^T & \bar{B}_1 + \bar{B}_2 H^{(k)} \\ \bar{C}Q & -I & 0 \\ [\bar{B}_1 + \bar{B}_2 H^{(k)}]^T & 0 & -\gamma_k^2 \end{bmatrix} < 0$$

$$\leftrightarrow \tilde{x}(t)^T Q^{-1} (\bar{A}Q + Q\bar{A}^T + \bar{B}_2 Y^{(k)} + Y^{(k)T} \bar{B}_2^T + Q\bar{C}^T \bar{C}Q) \times Q^{-1} \tilde{x}(t) + 2\tilde{x}(t)^T Q^{-1} (\bar{B}_1 + \bar{B}_2 H^{(k)}) w(t) - \gamma_k^2 w(t)^T w(t) < 0$$

$$\leftrightarrow \frac{d}{dt} V(\tilde{x}) + e(t)^T e(t) - \gamma_k^2 w(t)^T w(t) < 0$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow V(\tilde{x}(t)) - V(\tilde{x}(0)) \\ &\quad + \int_0^t e(\tau)^T e(\tau) d\tau - \gamma_k^2 \int_0^t w(\tau)^T w(\tau) d\tau < 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int_0^t e(\tau)^T e(\tau) d\tau - \gamma_k^2 \int_0^t w(\tau)^T w(\tau) d\tau < 0$$

$$\rightarrow \frac{\left(\int_0^t e(\tau)^T e(\tau) d\tau \right)^{1/2}}{\left(\int_0^t w(\tau)^T w(\tau) d\tau \right)^{1/2}} < \gamma_k$$

따라서 L_2 이득이 γ_k 보다 크지 않다.

스케들링 제어기 설계 및 적용 순서:

Step 1. 정리 1에 의하여 γ 를 최소화하는 행렬 Q, K, H 와 집합 Ω 를 얻는다. 그리고 $K^{(1)} \leftarrow K, H^{(1)} \leftarrow H$ 로 한다.

Step 2. 미리 주어진 δ_i 와 수식 (20)의 정의에 따라 집합 Ω 를 N 개의 서브셋 $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ 로 나눈다.

Step 3. Step 1의 행렬 Q 와 스칼라 σ_0 를 사용하여, 정리 2로부터 $K^{(k)}, H^{(k)}, k = 2, 3, \dots, N$ 를 각각 구한다.

Step 4. 다음의 규칙에 따라 설계된 제어기를 적용한다.

$$u(t) = \begin{cases} u^{(k)}(t) & , \text{if } \bar{x} \in \Omega_k - \Omega_{k+1}, k = 1, 2, \dots, N-1 \\ u^{(N)}(t) & , \text{if } \bar{x} \in \Omega_N \end{cases}$$

5. 수치 예제

다음으로 주어지는 포화 구동기를 갖는 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sat}[u(t)] \\ y(t) &= [1 \ 0]x(t). \end{aligned} \tag{25}$$

여기서 구동기의 용량은 $u^0 = 15$ 라고 하고, 기준입력 $y_r(t)$ 은 $w(t)^T w(t) \leq w_{\max}^2 = 1$ 를 만족한다고 하자. 그리고 개루프(open-loop) 시스템의 고유치가 $\{1, 2\}$ 임으로, 제어를 가하지 않은 개루프 시스템은 불안정(unstable)한 시스템이다.

5.1 저이득 제어기 설계 및 결과

제어기는 저이득 제어로써 다음의 3가지를 고려한다.

- Type (i) : $u(t) = Kx(t)$
- Type (ii) : $u(t) = Kx(t) + H_m y_r(t)$
- Type (iii) : $u(t) = Kx(t) + Hw(t)$

다음 표 1은 정리 1을 이용하여 LMI (11)-(13)을 만족하면서 L_2 이득 γ 를 최소화하도록 설계된 저이득 제어기의 이득 및 이 때의 L_2 이득을 각각 보인다.

표 1. 설계된 저이득 H_∞ 추종제어기

Table 1. Designed low-gain H_∞ tracking control

	설계된 제어기 이득	L_2 이득
Type (i)	$K = -[34.3655 \ 1.6078]$	0.1488
Type (ii)	$K = -[42.5604 \ 1.7057], H_m = -3.3547$	0.0678
Type (iii)	$K = -[113.2836 \ 1.9466], H = [-3.8806 \ 1.9407]$	0.0028

이 설계된 제어기를 설계기준인

$$w(t)^T w(t) = y_r(t)^T y_r(t) + \dot{y}_r(t)^T \dot{y}_r(t) \leq w_{\max}^2 = 1 \text{을 만족하는 다음의 기준입력(그림 2)을}$$

$$y_r(t) = 0.568 [\sin(t) + \sin(0.5t)] \tag{26}$$

설계된 시스템에 실제로 적용하였을 때 얻어진 최대 추종 오차는 다음 표 2와 같다.

표 2. 최대 추종오차

Table 2. Maximum tracking error

	Type (i)	Type (ii)	Type (iii)
$\max e(t) (\times 10^{-3})$	110.7225	39.7357	1.1197

그리고 다음 그림 2는 대표적으로 Type (ii)에 대한 기준 입력(y_r), 출력(y)과 추종오차(e)를 보여준다.

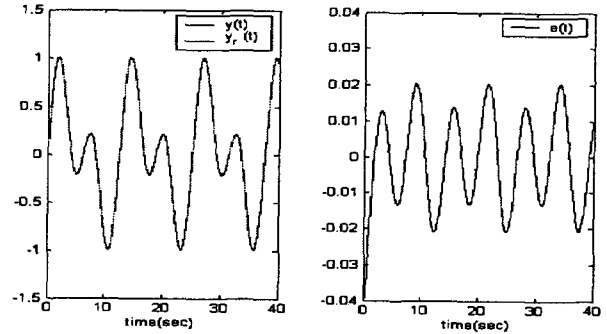


그림 2. 기준입력, 출력 그리고 추종오차(저이득 제어)

Fig. 2. Reference, output and tracking error(low gain control)

위의 표 2에서 보듯이, 설계된 제어기 성능은 y_r, y_r 모두를 피드백에 사용한 Type (iii)의 추종제어 성능이 가장 좋고, y_r 만을 피드백에 사용된 Type (ii) 추종 제어 성능이 다음이고, y_r, y_r 을 제어 피드백에 전혀 사용하지 않은 Type (i)의 추종 제어 성능이 가장 나쁘다.

5.2 게인 스케들링 추종 H_∞ 제어기 설계 및 결과

위에 설계된 저이득 H_∞ 추종제어의 성능을 개선하기 위하여 상태의 크기에 따라 제어 이득을 달리 하는 게인 스케들링 추종 H_∞ 제어기를 설계한다. 이를 위하여 $\delta_k = [1, 5, 5^2, 5^3, 5^4]$ 와 (20)의 정의를 이용하여 위에서 설계된 리처블셋을 다음의 5개의 셋으로 분할하고

$$\Omega_k = \left\{ x : x^T Q^{-1} x \leq \frac{1}{\delta_k} \sigma_0 w_{\max}^2 \right\}, k = 1, 2, \dots, 5$$

정리 2를 이용하여 각 서브셋에 대한 저이득을 보장하면서 L_2 이득을 최소로 하는 L_2 이득을 구한 것이 다음의 표 3이다.

표 3. 각 셋에서의 L_2 이득

Table 3. L_2 gain at each sub-ellipsoid

	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
Type (i)	0.1488	0.0677	0.0605	0.0605	0.0605
Type (ii)	0.0678	0.0464	0.0464	0.0464	0.0464
Type (iii)	0.0028	0.0026	0.0026	0.0026	0.0026

그리고 다음의 표 4는 위에서 설계된 제어기를 위의 (26)에 제시된 기준입력에 실제로 적용하였을 때 얻어진 최대 추종오차를 나타낸다.

표 4. 최대 추종오차(스케줄링 제어)

Table 4. Maximum tracking error(scheduled control)

	Type (i)	Type (ii)	Type (iii)
$\max e(t) (\times 10^{-3})$	21.055	20.897	1.1062

위의 표 2와 표 4에서 보듯이, Type (i), Type (ii), Type (iii) 각각의 경우에 스케줄링 제어는 저이득 제어에 비하여 최대오차의 크기가 약 80.98%, 47.36%, 1.21% 개선되었음을 알 수 있다. 즉, 스케줄링 제어의 경우는 Type (i)과 Type (ii)의 경우에는 매우 성능개선이 되나, Type (iii)의 경우의 성능 개선은 매우 미미함을 보여준다. 이의 이유는 Type (iii)의 경우 원래의 추종오차가 워낙 적어서 스케줄링 제어로 인한 성능 향상이 적음을 보여준다.

다음의 그림 3은 Type (ii)에 대한 기준입력(y_r), 출력(y)과 추종오차(e)를 보여주는 것이고, 그림 4는 대표적으로 Type (ii)의 경우 스케줄링 제어를 한 경우 제어입력($u(t)$)와 스케줄링 제어시 사용된 제어기의 인덱스를 그린 그림이다.

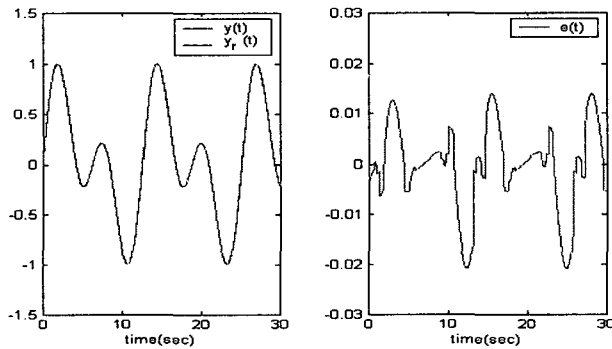


그림 3. 기준입력, 출력 그리고 추종오차(스케줄링 제어)
Fig. 3. Reference, output and tracking error(scheduled control)

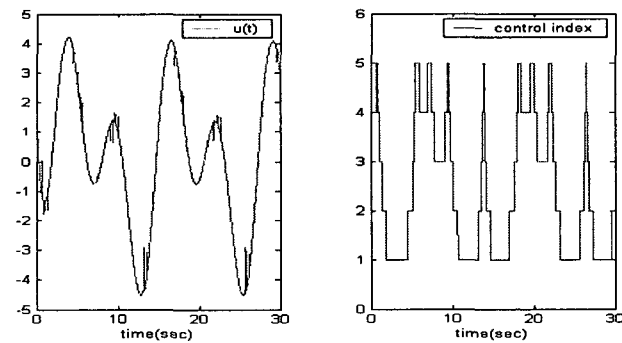


그림 4. 제어입력과 제어기 인덱스(스케줄링 제어)
Fig. 4. Control input and control index (scheduled control)

즉, 어느 시간에 제어기의 인덱스(control index)가 3이라는 것은 이 시간에 제어는 $u(t) = u^{(3)}(t)$ 가 사용되었음을 의미한다.

다. 그림 3과 그림 4에서 보듯이 제시된 제어 방법의 추종 성능이 매우 우수함을 알 수 있다.

6. 결 론

본 논문에서는 구동기 용량에 제한이 있는 선형 시스템의 추종제어기 설계를 고려하였다. 고려된 기준입력은 크기 및 이의 시간 변화율에 제한이 있는 일반적인 것이고, 제어는 항상 포화가 일어나지 않는 저이득 제어기 설계 방법을 고려하였다. 먼저 상태 변환을 통하여 추종오차를 새로운 상태변수에 포함되도록 하는 등가 시스템을 얻은 후, 이 등가 시스템에 대하여 기준입력과 이의 시간 변화율을 포함하는 양으로부터 추종오차까지의 L_2 이득이 최소가 되도록 하는 저이득 제어기 설계방법에 대한 결과를 제시하였다. 또한 저이득 제어기가 구동기의 용량을 최대도 이용하지 못하는 단점을 극복하기 위한 스케줄링 제어기 설계 방법도 함께 제시하였다. 그리고 모든 제어기 설계 조건은 LMI 형태이기에 잘 알려진 Matlab의 LMI toolbox를 이용하면 쉽게 이의 해를 구할 수 있는 장점이 있다. 끝으로 실제의 기준입력을 통한 시뮬레이션을 통하여 설계된 제어기들의 추종성능이 매우 우수함을 보였다.

감사의 글

이 논문은 2004년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비 지원에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

- [1] P.O. Gutman and P. Hagander, "A new design of constrained controllers for linear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 30, pp.22-33, 1985.
- [2] J.-H. Kim and Z. Bien, "Robust stability of uncertain linear systems with saturating actuators", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.39, pp.202-207, 1994.
- [3] D.S. Bernstein and A.N. Michel(Eds.), "Special issue: saturating actuators", *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, vol.5, pp.375-540, 1995.
- [4] Z. Lin and A. Saberi, "A semi-global low-and-high gain design technique for linear systems with input saturation-stabilization and disturbance rejection", *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, vol. 5, pp.381-398, 1995.
- [5] S. Srivastava and F. Jabbari, "Scheduled controllers for disturbance attenuation of systems with bounded inputs", *Proc. of American Control Conference*, Chicag pp.735-739, 2000.
- [6] L. Zaccarian and A. R. Teel, "A common framework for anti-windup, bumpless transfer and reliable design", *Automatica*, vol.38, pp.1735-1744, 2002.
- [7] C.T. Chen, *Linear system theory and design*, Oxford university press, 1984.

- [8] B.O.D. Anderson and J.B. Moore, *Optimal control: Linear quadratic methods*, Prentice-Hall, 1989.
- [9] S. Boyd, El Ghaoui, L.E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM, 1994.
- [10] T. Hu and Z. Lin, *Control systems with actuator saturation*, Birkhauser, 2001.

저 자 소 개



이 연 규(李淵圭)

1970년 6월 28일생. 1998년 충북대학교 전자공학과 졸업. 2000년 동 컴퓨터과학과 졸업(석사). 2000년~2003년 한국전자통신연구원 연구원. 2004~현재 충북대 대학원 제어계측공학과 박사과정.

Tel : 043-286-7329

E-Mail : hobii@nate.com



김 명 순(金明淳)

1976년 2월 29일생. 1998년~2002년 대경 직업전문학교 교사. 2003년 충주대학교 제어계측공학과 졸업. 2003~현재 충북대학교 대학원 제어계측공학과 석사과정.

Tel : 043-852-1313

E-mail : robust3650@hotmail.com



김 진 훈(金鎭勳)

1961년 10월 8일생. 1985년 서울대 전기공학과 졸업. 1985년~1987년 신영전기(주) 연구원. 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 1993년 동 전기 및 전자공학과 졸업(공학박사). 1993년~1994년 경상대 공대 제어계측공학과 전임강사. 1998년~1999년 미국 UCI 방문교수. 1995~현재 충북대학교 전기전자 및 컴퓨터공학부 교수.

Tel : 043-261-2387, Fax : 043-268-2386

E-Mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr