

SIMULINK를 이용한 선형 동적 해석

김 성 겔*

서울산업대학교 기계설계자동화공학부

Linear Dynamic Simulation using SIMULINK

Seong Keol Kim*

School of Mechanical Design and Automation Engineering, Seoul National University of Technology, Seoul 139-743, Korea
(Received 12 November 2004 / Accepted 31 December 2004)

Abstract : Linear dynamic simulations with one and two degrees of freedom were built from SIMULINK in MATLAB commercial program. Before starting the simulations, initial conditions and system parameters which are mass, spring constant and coefficient of damping are easily inputted by user through each pop-up window, and the conditions for the simulation including time step, analysis methodology and so on can be modified with ease. Also, as soon as the simulations are started, the windows for animations which shows deformed motions dynamically with real time are popped-up and the graphical results are shown in time and frequency domains, simultaneously. The results of the simulations were verified through some examples of textbooks of mechanical vibrations. It was found that the programs would help us to solve any kind of linear dynamic simulation for one and two degrees of freedom.

Key words : Linear dynamic simulation(선형 동적 모사), Initial condition(초기조건), System parameter(시스템 파라미터), Animation(애니메이션), Real time(실시간), Time domain(시간영역), Frequency domain(주파수영역)

Nomenclature

- m : mass, kg
- k : spring constant, N/m
- c : damping coefficient, N/(m/s)
- $F(t)$: external excitation force, N

1. 서 론

현재 MATLAB^{1,2)}은 한국에 있는 대학 중 공대와 자연대에서 가장 많이 사용되고 있는 상용 프로그램으로 자리를 잡고 있으며, 대부분의 대학에서 MATLAB을 공급해주는 회사와 라이선스를 맺어 공식적으로 공학을 전공하는 사람들에게 많은 활용

이 되고 있다. 일부 대학에서는 이 프로그램의 사용 방법을 강의로 채택을 하고 있으며, 많은 공학 관련 강의에서 숙제를 해결하기 위한 수단으로 폭 넓게 사용되고 있다. 본 연구에서는 MATLAB에서 제공되는 광범위한 내용 중 동역학과 관련하여 선형 1자유도 및 2자유도 시스템을 해석하는 프로그램을 SIMULINK¹⁾를 이용하여 작성하였다. SIMULINK는 제어 및 기계역학을 포함하는 동역학 해석 등을 위한 도구이며, 창(window)을 띄운 상태에서 해석을 위해 필요한 도구들을 끌어와서 해석 및 애니메이션되는 프로그램을 작성할 수 있도록 도와준다. 실시간으로 다자유도 동적 모델에 대해 해석을 수행하면서 그 결과를 시간 및 주파수 영역에서 보여주면서 애니메이션되는 상용프로그램들이 현재 다양하게 제공되고 있으나 본 논문에서는 현재 대부분

*To whom correspondence should be addressed.
rhett@snut.ac.kr

의 대학교에서 보유하고 있는 MATLAB내의 SIMULINK를 이용하여 1 자유도 및 2 자유도 선형 동적 시스템에 대한 프로그램을 작성하고자 한다. 본 연구의 구성은 첫째, 해석 프로그램을 위해 필요한 각종 창(window), 즉 초기조건 창, 시스템 파라미터 창 등을 개발하고, 둘째, 1자유도 선형 동적해석을 위한 프로그램을 개발한다. 셋째, 1자유도 해석 프로그램을 기초로 2 자유도 선형 동적해석을 위한 프로그램을 개발하고자 한다.

2. 1자유도 동적해석

2.1 프로그램 개발

본 연구의 대상으로 한 1자유도 선형 시스템은 한 개의 질량(m)과 한 개의 선형스프링(k) 그리고 한 개의 감쇠(c)로 이루어져있다.

2.1.1 상태방정식³⁾의 유도 및 프로그램의 구성

1자유도 선형 시스템의 운동방정식은 식 (1)과 같으며, 상태방정식으로 변환한 식은 식 (2)이다.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (1)$$

$$[mD^2 + cD + k]x = F(t), \quad D = \frac{d}{dt}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dt^2} \quad (2)$$

상태변수는 식 (3)과 같으며, 최종 상태방정식은 식 (4)이다.

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}_1 = v \quad (3)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \quad (4)$$

위에서 유도된 상태방정식을 이용하여 실시간으로 애니메이션되면서 그 해석결과를 보여주는 프로그램은 Fig. 1과 같은 구성도를 갖는다.

또한, 1자유도 선형시스템의 해석을 위해 작성된 프로그램은 10개이며, 각각의 프로그램의 상관관계는 Fig. 2에서 보여준다.

2.1.2 해석을 위해 필요한 도구

실제 해석을 수행하기 전에 작성된 각각의 프로그램의 도구들을 제시하고자 한다. SIMULINK 내에서 해석을 위해 필요한 블록들을 선택하여 작성

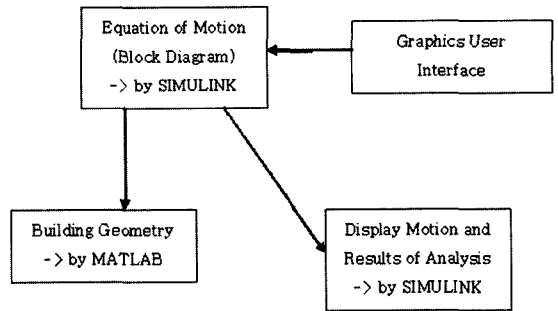


Fig. 1 Schematic of structures of program algorithms

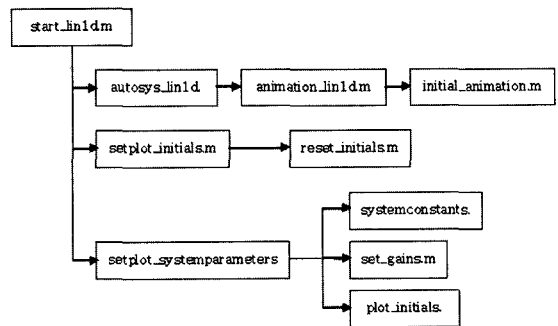


Fig. 2 Schematic of relationships of the programs for 1 DOF

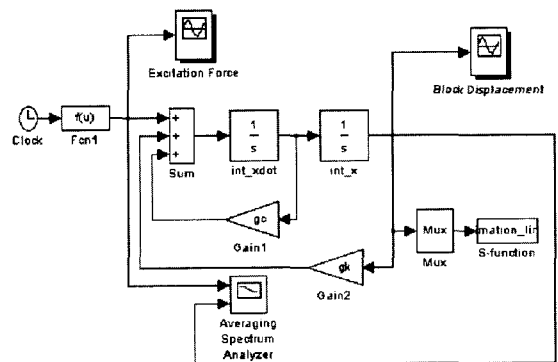


Fig. 3 SIMULINK program for the 1 DOF linear system

하였으며, 그 결과는 Fig. 3에 나타내었다.

해석을 수행하기 위해 SIMULINK에서 프로그램을 시작하면, Fig. 4 ~ Fig. 6의 창들이 차례로 나타난다. Fig. 4는 시스템의 파라미터를 사용자가 직접 입력하는 창으로, 각 파라미터 값은 직접 입력하거나 제공된 바(bar)의 좌우 이동에 의해서도 입력할 수 있도록 작성하였다. 또한, Fig. 5는 선형 1자유도 시스템의 초기 조건을 입력하는 창으로 초기 변위와 초기 속도를 입력할 수 있다. 마지막으로 Fig. 6은 실

시간으로 애니메이션되는 시스템을 보여주는 창을 나타내고 있다. 본 논문에서 제시된 모든 창들의 크기, 바탕 색, 선의 굵기 등은 필요에 따라 언제든지 수정이 가능하게 작성되었다.

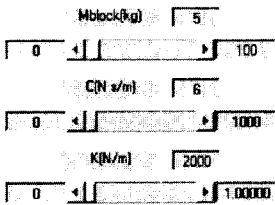


Fig. 4 Window for the system parameters for 1 DOF

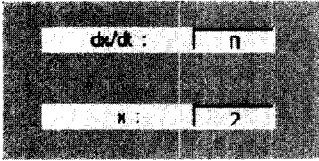


Fig. 5 Window for the initial conditions for 1DOF

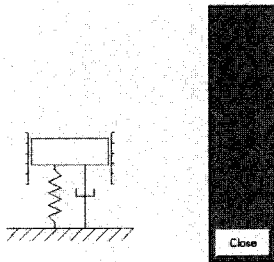


Fig. 6 Window for the animation in real time for 1 DOF

2.2 전산모사(Simulation) 및 해석결과

2.2.1 해석조건⁴⁾

본 논문에서 작성된 프로그램을 사용하여, 시스템 파라미터 중에서 스프링 상수 값 및 감쇠 값을 변화시킨 해석을 수행하였다. 본 해석을 위해 사용된 조건을 Table 1에 나타내었다. 본 논문에서는 제시할 수 없었지만, 각 해석에서 실시간으로 애니메이션되는 결과도 보여주었다.

Table 1 Conditions for the whole simulations

| Items | |
|-----------------------|--------------|
| Method for simulation | Runge-Kutta |
| Total time | 40 seconds |
| Time interval | 0.005 second |

2.2.2 시간 및 주파수영역에서의 해석⁵⁾

1) 해석 I

해석 I에서는 시스템 파라미터 중 질량과 스프링 상수는 고정시키고, 감쇠 값을 네 가지로 변경하면서 simulation을 수행하였다. 시스템 파라미터의 조건은 Table 2, 그리고 시간영역 및 주파수 영역에서 $c = 6$ 의 해석 결과는 Fig. 7과 Fig. 8에 나타내었다.

Table 2 Conditions for the analysis I

| Items | |
|------------------|---------------------------|
| Excitation force | $\frac{500}{e^{20t}}$ (N) |
| Mass | 5 (kg) |
| Spring constant | 2,000 (N/m) |
| Dampings | 1, 3, 6, and 12 (N/(m/s)) |

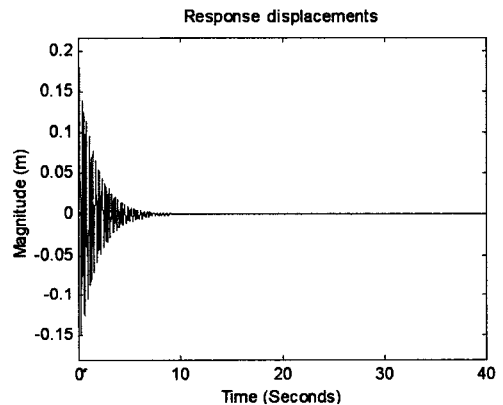


Fig. 7 Results of simulation for $m = 5, k = 2000, c = 6, x(0) = 0$ and $F_{max} = 500$

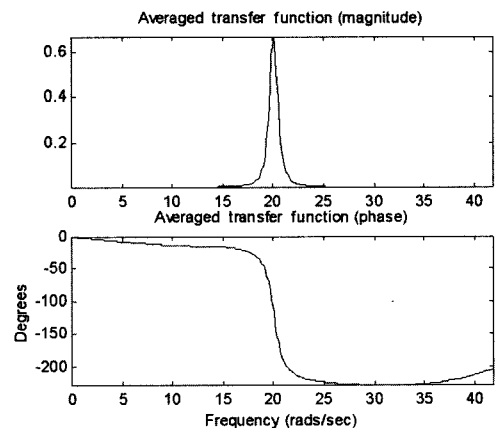


Fig. 8 Frequency response function for $m = 5, k = 2000, c = 6, x(0) = 0$ and $F_{max} = 500$

2) 해석 II

시스템 파라미터 중 감쇠 값을 고정시키고, 스프링 상수를 변경하면서 실시간 해석을 수행하였다. 해석을 위해 사용된 조건은 Table 3, 그리고 $k=4,000$ 의 해석 결과는 Fig. 9와 Fig. 10에 나타내었다.

Table 3 Conditions for the analysis II

| | |
|------------------|------------------------------|
| Items | |
| Excitation force | $\frac{500}{e^{20t}}$ (N) |
| Mass | 5 (kg) |
| Spring constant | 1,000, 2,000 and 4,000 (N/m) |
| Dampings | 6 (N/(m/s)) |

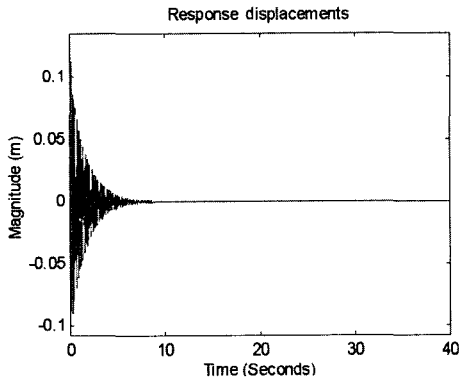


Fig. 9 Results of simulation for $m = 5, k = 4000, c = 6, x(0) = 0$ and $F_{max} = 500$

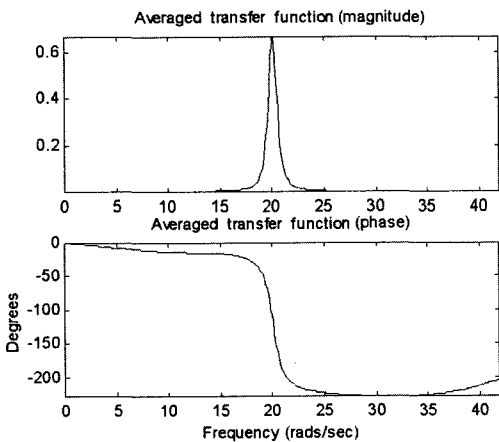


Fig. 10 Frequency response function for $m = 5, k = 4000, c = 6, x(0) = 0$ and $F_{max} = 500$

2.2.3 해석결과 및 고찰

해석 I에서는 감쇠 값이 증가할수록 시간영역에

서 가진력에 의한 진폭의 크기가 빠르게 감소됨을 알 수 있었다. 또한 감쇠 값이 증가할수록 공진주파수에서의 진폭의 크기가 상당히 감소를 하고 있어 일반적인 주파수 영역에서의 결과를 나타내고 있다. 해석 II에서는 감쇠 값이 일정하므로 해석을 시작한 지 10초 내에서 진폭의 크기가 0으로 되었으나, 스프링 상수의 크기가 증가할수록 가진력에 의한 초기진폭의 크기가 시간영역에서 감소됨을 알 수 있었다. 스프링 상수 값이 증가할수록 공진주파수에서의 진폭 크기가 다소 감소를 하고 있으며, 해당 공진 주파수의 크기는 상당히 증가함을 보여주고 있다. 본 프로그램을 통해 사용자는 시스템의 파라미터와 초기조건, 외부 가진력 그리고 해석에 필요한 조건들을 제작된 각각의 창을 통해 쉽게 입력을 할 수 있으며, 1자유도 모델이 실시간으로 애니메이션되어 그 운동을 파악할 수 있다. 또한 실시간으로 시간영역에서의 변위를 보여주고, 해석을 완료하면 주파수 영역에서의 결과도 보여준다.

3. 2자유도 동적해석

3.1 프로그램의 개발

3.1.1 상태방정식의 유도 및 프로그램의 구성

운동방정식은 식 (5)와 같으며, 상태방정식은 식 (6)이다.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_a + c_1 \dot{x}_a + k_1 x_a + c_2 (\dot{x}_a - \dot{x}_b) + k_2 (x_a - x_b) &= F(t) \\ m_2 \ddot{x}_b + c_2 (\dot{x}_b - \dot{x}_a) + k_2 (x_a - x_b) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} [m_1 D^2 + (c_1 + c_2)D + (k_1 + k_2)]x_a - k_2 x_b - c_2 \dot{x}_b &= F(t) \\ [m_1 D^2 + c_2 D + k_2]x_b - k_2 x_a - c_2 \dot{x}_a &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$D = \frac{d}{dt}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$$

상태변수는 2자유도이므로 식 (7)이 되고, 최종 상태방정식은 식 (8)이다.

$$x_1 = x_a, \quad x_2 = \dot{x}_1 = v_a, \quad x_3 = x_b, \quad x_4 = \dot{x}_3 = v_b \quad (7)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(k_1 + k_2) & -(c_1 + c_2) & k_2 & c_2 \\ m_1 & m_1 & m_1 & m_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_2 & c_2 & -k_2 & -c_2 \\ m_2 & m_2 & m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \\ m_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (8)$$

위에서 유도된 상태 방정식을 이용하여 해석을 위해 작성된 프로그램은 12개이며, 각각의 프로그램의 상관관계는 Fig. 11에서 보여준다. 그리고 각 프로그램의 역할은 앞의 1자유도 선형시스템 해석 프로그램들과 거의 유사하나 2자유도 시스템이므로 초기조건을 나타내는 창과 질량, 스프링 상수, 감쇠가 각각 1개씩 추가된 새로운 시스템에 대한 창 등에 관련된 프로그램 두 개가 추가되었다.

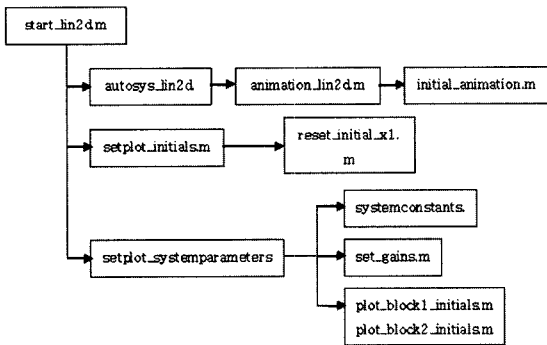


Fig. 11 Schematic of relationships of programs for 2 DOFs

3.1.2 해석을 위해 필요한 도구

1자유도 해석과 같이 SIMULINK 내에서 2자유도 선형해석을 위해 필요한 블록들을 작성하였으며, 그 결과를 Fig. 12에 나타내었다.

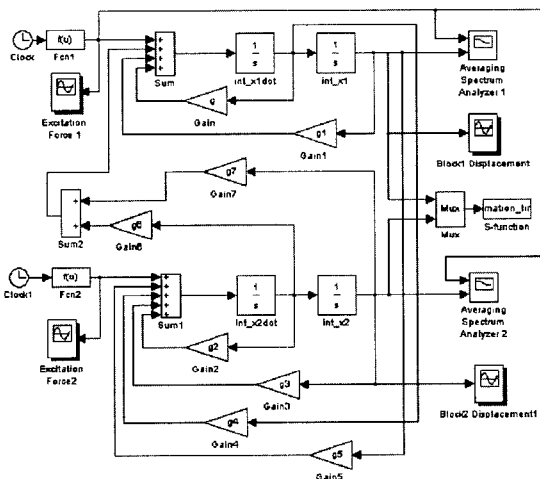


Fig. 12 SIMULINK program for the 2 DOFs linear system

해석을 위해 SIMULINK에서 프로그램을 실행하면, Fig. 13 ~ Fig. 14의 창들이 차례로 나타난다. 앞의

1자유도 선형시스템에 비해 1자유도가 추가되어 더 복잡한 형태의 창의 모습을 보여준다.

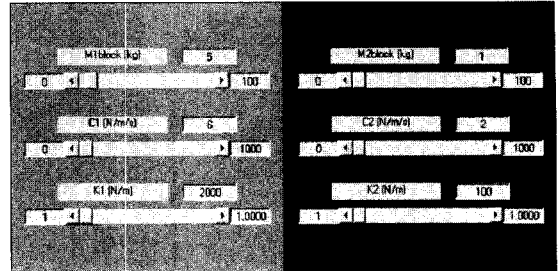


Fig. 13 Window for the system parameters for 2 DOFs

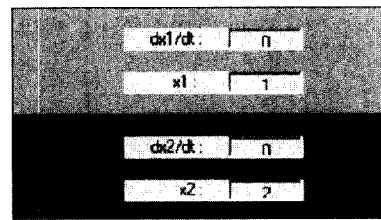


Fig. 14 Window for the initial conditions for 2 DOFs

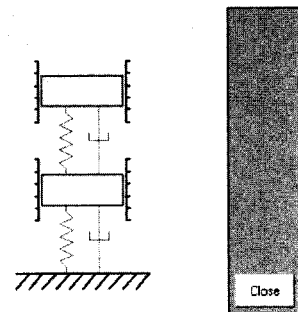


Fig. 15 Window for showing the animation for 2 DOFs

Fig. 15는 실시간으로 애니메이션되는 2자유도 선형시스템을 보여주는 창을 나타내고 있다.

3.2 전산모사 및 해석결과

3.2.1 해석의 조건

해석을 위해 사용된 조건은 1자유도 선형시스템 해석과 동일한 Table 1을 사용하였다.

3.2.2 시간 및 주파수영역에서의 해석

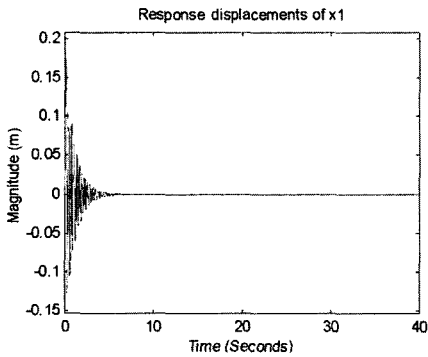
1) 해석 I

시스템 파라미터 중 각 자유도의 질량과 스프링 상수는 고정시키고, 감쇠 값을 변경하면서 해석하

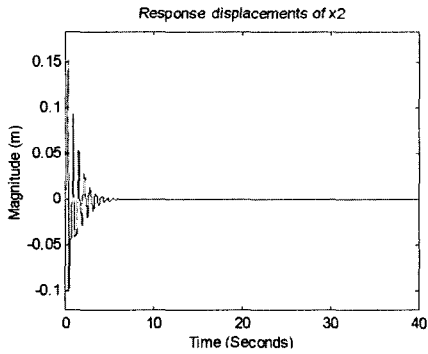
였다. 시스템 파라미터의 조건은 Table 4에서, 그리고 $c_1 = 6$ 과 $c_2 = 2$ 에 대한 해석 결과는 Fig. 16와 Fig. 17에 나타내었다.

Table 4 Conditions for the analysis I

| Items | |
|------------------|--|
| Excitation force | $F_1 = \frac{100}{e^{20t}}, F_2 = 0$ (N) |
| Mass | $m_1 = 5, m_2 = 1$ (kg) |
| Spring constant | $k_1 = 2000, k_2 = 100$ (N/m) |
| Dampings | $c_1 = 6, c_2 = 2, 5$ (N/(m/s)) |



(a)

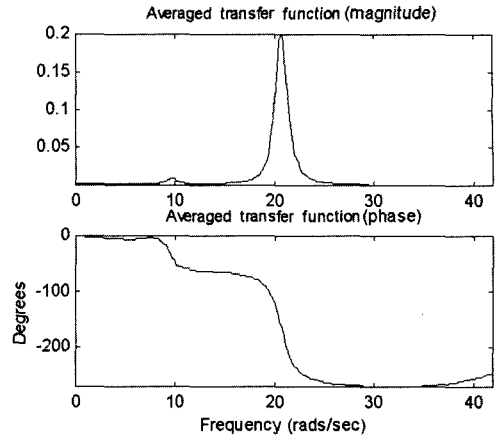


(b)

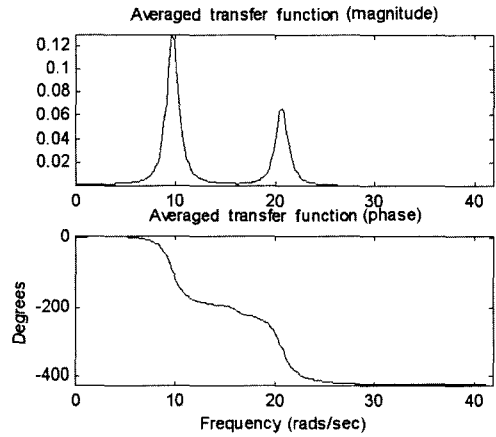
Fig. 16 Results of simulation in $x_1(0) = x_2(0) = 0, F_{1max} = 100$ N, $F_{2max} = 0$ $m_1=5$ kg, $k_1=2000$ N/m, $c_1= 6$ N/(m/s), $m_2=1$ kg, $k_2=100$ N/m, and $c_2=2$ N/(m/s)

2) 해석 II

시스템 파라미터의 모든 값과 초기조건 등을 고정시키고, 가진력의 위치를 변경하면서 실시간 해석을 수행하였다. 해석을 위해 사용된 조건은 Table 5에 나타내었다.



(a) Frequency response function of x_1



(b) Frequency response function of x_2

Fig. 17 Frequency response functions in $x_1(0) = x_2(0) = 0, F_{1max} = 100$ N, $F_{2max} = 0$ $m_1=5$ kg, $k_1=2000$ N/m, $c_1= 6$ N/(m/s), $m_2=1$ kg, $k_2=100$ N/m, and $c_2=2$ N/(m/s)

Table 5 Conditions for the analysis II

| Items | |
|------------------|--|
| Excitation force | $F_1 = 0, \frac{100}{e^{20t}}, F_2 = 0, \frac{100}{e^{20t}}$ (N) |
| Mass | $m_1 = 5, m_2 = 1$ (kg) |
| Spring constant | $k_1 = 2000, k_2 = 100$ (N/m) |
| Dampings | $c_1 = 6, c_2 = 2$ (N/(m/s)) |

3.2.3 해석결과 및 고찰

해석 I의 주파수 영역에서는 x_1 에서의 가진력만 존재하므로 x_1 과 관련된 두 번째 공진주파수의 진폭만 크게 나타났다. 그러나 x_2 변위에 대한 결과에서는 두 자유도의 상호 관련성이 증대되어 두 개의 공

진주파수의 진폭이 크게 발생되었다.

해석 II에서는 x_1 에 힘을 가한 경우 x_2 의 변위에 영향을 크게 주지만, 반대의 경우에는 x_1 의 변위에 영향을 거의 주지 않았다. 주파수영역에서는, 해석 I의 결과인 Fig. 17과 반대의 결과를 보여주었다. 즉, 가진력의 위치에 따라 관련된 공진주파수의 진폭크기가 영향을 크게 받았다.

4. 결론

- 1) 1자유도 선형 시스템에서는 MATLAB과 MATLAB 내의 SIMULINK를 사용하여 전체 10개의 프로그램을 작성하였으며, 다양하고 정확한 해석결과를 실시간으로 보여주었다.
- 2) 질량이 두 개이며, 각각의 질량에 대해 선형 스프링과 선형 감쇠가 한 개씩 존재하면서 서로 커플된 2자유도 선형 시스템에 대한 실시간 해석 및 애니메이션되는 프로그램 12개를 작성하였다. 시스템 파라미터와 초기조건 그리고 가진력 등을 입력하는 창들이 2자유도 시스템에 맞게 수정되었으며, 주 프로그램도 SIMULINK 내에서 커플된 2자유도 선형 시스템에 맞게 다시 작성되었다.
- 3) 본 연구를 통해 작성된 프로그램으로 1자유도

및 2자유도 선형시스템의 파라미터 및 초기조건 그리고 가진력 등을 사용자가 직접 변경할 수 있으며, 실시간으로 그 운동을 보여주는 애니메이션기능과 더불어 그래프로 시간영역에서 변위를 나타내는 동역학 해석이 가능하게 하여 사용자가 쉽게 선형 동역학 문제를 이해할 수 있으며, 선형 자동차공학에도 적용될 수 있으리라 생각한다.

References

- 1) The Math Works Inc., SIMULINK (User's Guide), Prentice Hall, NJ, 1996.
- 2) The Math Works Inc., MATLAB (Reference Guide), The Math Works Inc., 1994.
- 3) V. S. Vladimov, Equations of Mathematical Physics, Marcel Dekker, 1971.
- 4) L. Meirovitch, Computational Methods in Structural Dynamics, SIJTHOFF & NOORDHOFF, 1980.
- 5) S. H. Hwang, H. J. Kim, C. S. Park and G. R. Choi, "Structural and Dynamic Analysis of Three-Axis Road Simulator," Transactions of KSAE, Vol.11, No.5, pp.105-111. 2003.