

내부 유체의 조화 가진에 의한 배관의 주파수응답해석

Frequency Response Analysis of Pipe Conveying Harmonically Excited Fluid

오 준 석*

Oh, Jun-Seok

ABSTRACT

It is well known that the natural frequencies of the pipe come to be lower as internal fluid velocity and pressure increase, and the pipe will be unstable if the fluid velocity is higher than critical velocity. But even if the velocity of the fluid below the critical velocity, resonance will be caused by pulsation of the fluid. So the effects of pulsating fluid in pipe should be also taken into consideration for better analysis. The research of the vibration of piping system due to a fluid pulsation has been studied by many people. But most of them are dealt with determining the boundary between stable and unstable region without analyzing forced response in the stable region. In this study, not only stability analysis but also forced response analysis, which is caused by harmonically excited fluid especially, is conducted. In order to analyze the system numerically, the discretized equation is formulated by using FEM(Finite Element Method). And the results of this method are compared with those of AMM(Assumed Mode Method) which were used by many researcher earlier.

주요기술용어(주제어) : Forced response, Pipe conveying fluid, Harmonically excited fluid, Parametric resonance, FEM

1. 머리말

유체를 수송하는 배관에 관하여는 1950년대 Arabian Oil Transport Pipe Line의 동특성에 관한 연구 이후로 많은 학자들의 관심이 되어지고 있으며 내부 유체속도와 압력이 증가함에 따라 배관의 고유진동수가 낮아지고, 속도가 임계속도 이상일때 발생하는 좌굴 현상과 플러터 현상등은 많이 알려져 있다.^[1]

하지만 유체의 속도가 임계속도 이하일 때에도 유체의 맥동 성분으로 인해 공진현상이 발생할 수 있으며 배관의 설계에 있어서 유체의 맥동 또한 중요한 고려사항중의 하나로 두어야 한다.

이는 주기적인 압축력을 받는 column에서의 Parametric resonance와 유사한 현상으로 Mathieu-Hill 방정식 형태로서 표현되어지며, 몇몇의 경계조건에 대한 안정성 해석의 해가 알려져 있다. 그러나 기존의 유체에 의한 배관계의 진동에 대한 연구는 대부분이 갤러킨 근사에 의한 모드가정법(Assumed Mode Method)을 이용하여 해석하였다.^[1~4] 이 방법을 사용하면 관심있는 몇 개의 모드에 대해 알고 있는 모드

† 2004년 12월 20일 접수~2005년 3월 17일 게재승인

* 국방과학연구소(Agency for Defense Development)

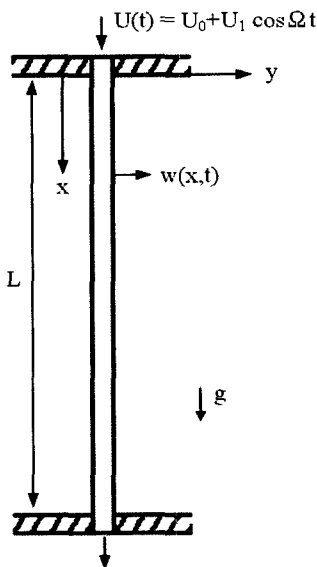
주저자 이메일 : junseok5@add.re.kr

함수를 이용하기 때문에 적은 수의 방정식만으로도 계산을 수행할 수 있지만 모드 함수를 알고 있어야 하므로 직관의 몇가지 경계조건에 대해서만 적용이 가능하다. 하지만 유한요소법(Finite Element Method)을 이용하여 방정식을 구성하면 다양한 경계조건에 적용이 용이하게 되고 고유치와 고유벡터를 이용하여 모드좌표계로의 변환을 통해 방정식을 구성할 수도 있게 되어 고차모드로의 확장도 가능하게 된다.

또한 이전까지의 연구는 안정성 해석을 통한 공진 영역과 안정영역의 경계를 결정짓는것이 주 내용으로 각 영역 일부에서의 시간응답 해석결과를 제시하고 있지만 본 논문에서는 특정주파수의 맥동성분을 갖는 유체를 포함하는 배관에 대해서 모드가정법(AMM)과 유한요소법(FEM)을 적용하여 안정성 해석뿐 아니라 맥동성분과 같은 주파수의 가진력에 의한 강제진동 주파수응답도 근사적으로 구하여 결과를 비교, 고찰해 보고자 한다.

2. 운동방정식

해석하고자 하는 모델은 길이가 L인 양단고정 수직배관으로써 그림 1에 나타내어져 있다.



[그림 1] Pipe Model

L은 배관의 전체 길이이고, $w(x, t)$ 는 배관의 입구로부터 x만큼의 위치에서의 횡 방향 변위이다. U는 유체의 속도로써 특정 주파수로 맥동하는 성분을 포함하고 있음을 나타내고 있다.

배관길이에 비해 단면적이 작은 경우에 대해서 오일러 보의 이론을 적용한 횡 방향의 운동방정식은 이전의 연구들에서도 많이 사용되어진 것과 같이 다음처럼 나타낼 수가 있다.^[1]

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left\{ \rho A U^2 - [(\rho A + m)g - \rho A \frac{dU}{dt}](L-x) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\rho A U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (\rho A + m)g \frac{\partial w}{\partial x} + c \frac{\partial w}{\partial t} + (\rho A + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

여기서 m은 배관의 단위길이당 질량, A는 배관의 내부단면적, ρ 는 유체의 밀도, c는 배관의 감쇠계수, g는 중력가속도를 나타낸다.

위의 운동방정식에서 첫 번째항과 마지막항만을 보면 보의 횡방향 운동방정식과 동일함을 알수 있고 중간부분의 항들이 모두 유체의 영향을 표현한 항들 이다.

3. 이산화 방정식

가. 모드가정법(AMM)

수식의 일반화를 위해 앞에서 유도한 운동방정식을 무차원 방정식으로 변환하면 다음과 같다.

$$\eta'''' + \{u^2 + (\beta^{1/2}u - \gamma)(1-\xi)\eta'\} + 2\beta^{1/2}u\eta' + \gamma\eta' + \sigma\dot{\eta} + \ddot{\eta} = 0 \quad (2)$$

이때의 무차원변수들은 다음과 같다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{w}{L}, \quad \beta = \frac{\rho A}{\rho A + m}$$

$$\gamma = \frac{(\rho A + m)L^3}{EI}g, \quad u = \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^2 LU$$

$$\sigma = \frac{cL^2}{[EI(\rho A + m)]^{1/2}}, \quad \tau = \left[\frac{EI}{\rho A + m} \right]^{1/2} \frac{t}{L^2}$$

위 운동방정식으로부터 응답을 구하기 위해 우선 무차원 변위인 η 를 Galerkin 근사에 의해 이산화된 형으로써 표현할 수 있으며 다음과 같다.

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\xi) \alpha_j(\tau) \quad (3)$$

여기서 $\phi_j(\xi)$ 는 배관의 고유모드함수로서 가정할 수가 있으며, 이는 경계조건에 따라 결정되어진다.^[5]

또한 조화가진항을 포함한 유체의 속도식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u(\tau) = u_0 + u_1 \cos \Omega \tau \quad (4)$$

여기서, u_0 는 평균속도 성분이고 u_1 은 맥동진폭, Ω 는 유체 맥동 주파수, τ 는 무차원 시간이다.

식 (3)과 식 (4)를 운동방정식 (2)에 대입하고 전체 식에 $\phi_i(\xi)$ 를 곱한뒤 전 구간[0,1]에 대하여 적분을 취하면 고유함수인 $\phi(\xi)$ 의 직교성에 의해 운동방정식은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} + \{C + 2\beta^{1/2}(u_0 + u_1 \cos \omega \tau)P\} \vec{\alpha} \\ + \{A + [(u_0 + u_1 \cos \omega \tau)^2 - \gamma - \beta^{1/2} u_1 \omega \sin \omega \tau]Q \\ + [\gamma + \beta^{1/2} u_1 \omega \sin \omega \tau]R + \gamma P\} \vec{\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서

$$A = \text{diag}(\lambda_j^4), \quad C = \text{diag}(\sigma)$$

으로써 각각 고유치 행렬과 감쇠 행렬을 나타내며,

P, Q, R 은 각각

$$p_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\xi$$

$$q_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j'' d\xi$$

$$r_{ij} = \int_0^1 \phi_i \xi \phi_j'' d\xi$$

을 요소로 가지는 행렬으로써 경계조건에 의해 구할 수

가 있다.

그리고, $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}^T$ 는 일반좌표계로써 여기서는 N차의 모드좌표계를 나타낸다.

나. 유한요소법(FEM)

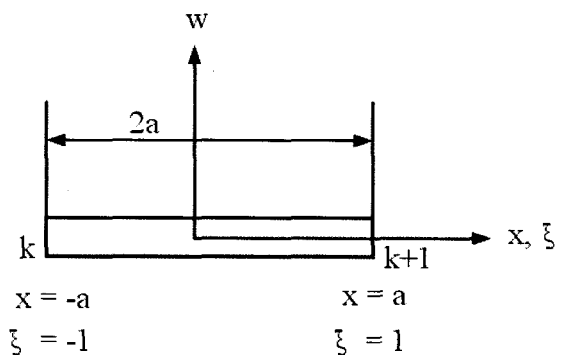
전체 운동방정식에 대한 유한요소 방정식을 유도하기 위하여 식 (1)에 가중함수 w^* 을 곱하여 전체길이에 대하여 적분을 취하면 다음과 같은 가중 잔차 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_0^L Ekw'''' w^* dx - \int_0^L \left(\rho A U^2 + \rho A L \frac{dU}{dt} \right) w'' w^* dx \\ + \int_0^L \left(-\rho A \frac{dU}{dt} x \right) w'' w^* dx + \int_0^L 2\rho A U w' w^* dx \\ + \int_0^L c w w^* dx + \int_0^L (\rho A + m) \ddot{w} w^* dx = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 '와 \cdot 은 각각 x와 t에 대한 미분을 나타내는 것이며 가중함수 w^* 은 임의의 함수이다.

FEM적용을 위하여 전체 배관을 요소로 분할 하였을 때 하나의 배관요소는 그림 2에 나타난 바와 같다. 이때 임의의 위치에서의 변위는 각 절점에서의 변위으로써 나타낼 수 있으며 각 요소 내부에서의 변위는 형상함수에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.^[6]

$$w = [N(\xi)] \{\vec{w}\}_e \quad (7)$$



[그림 2] Single pipe element

식 (7)을 이용하여 전체 운동방정식을 이산화된 유한요소 지배방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & (\rho A + m)[S_1]\{\vec{w}\} + \{2\rho A U[S_3] + c[S_1]\}\{\vec{w}\} \\
 & + \left\{ EI[S_2] - \left(\rho A U^2 + \rho A L \frac{dU}{dt} + (\rho A + m)gL \right) [S_4] \right. \\
 & \left. + (\rho A + m)g[S_3] + \rho A \frac{dU}{dt} ([S_3] + [S_6]) \right\} \{\vec{w}\} = \{\vec{f}\} \quad (8)
 \end{aligned}$$

이때 $\{\vec{f}\}$ 는 각 절점에 가해지는 외력항을 벡터로 표시하여 운동방정식에 추가한 것이다.

식 (8)은 유한요소법을 이용하여 구성된 최종 운동방정식으로써 전체 배관의 분할 요소수에 의해 각각의 행렬의 크기가 결정된다.

실제 해석 수행시 유한요소 모델의 분할 수가 많을수록 해의 정확도가 높아지므로 행렬의 크기는 상당히 커지게 되고, 이는 모드해석을 통한 모드 좌표계로의 변환을 통해 방정식의 수를 줄임으로써 더 쉽고 빠르게 수치 해석을 수행할 수가 있게 된다.

모드가정법에서 알고 있는 모드함수를 사용한 것과는 달리 유한요소법을 이용함에 있어서는 직접 요소 분할을 통해 구성된 행렬을 이용하여 모드해석을 수행하고 이로부터 구하여진 고유치 행렬과 고유벡터를 이용하게 된다.

모드해석을 통한 고유벡터를 이용하여 배관의 변위를 나타내면 다음과 같다.

$$\{\vec{w}\} = [\phi]\{\vec{\alpha}\} \quad (9)$$

여기서 $[\phi]$ 는 고유벡터, $\{\vec{\alpha}\}$ 는 모드좌표이다.

배관 내부에 흐르는 유체의 속도는 평균속도를 기준으로 특정 주파수의 맥동하는 성분을 포함하는 것으로써 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U(t) = U_0 + U_1 \cos \omega t \quad (10)$$

식 (9)과 식 (10)을 식 (8)에 대입하고 $[\phi]^T$ 를 곱

하여 간단히 정리하면 다음과 같게 된다.

$$\begin{aligned}
 & [U]\{\vec{\alpha}\} + \{2\rho A U_0[P] + 2\rho A U_1 \cos \omega t [P] + [F]\}\{\vec{\alpha}\} \\
 & + \{ [A] + (\rho A U_0^2 + 2\rho A U_0 U_1 \cos \omega t + \rho A U_1^2 \cos^2 \omega t \\
 & - \rho A L U_1 \omega \sin \omega t - (\rho A + m)gL) [Q] \\
 & + (\rho A U_1 \omega \sin \omega t + (\rho A + m)g) [R] + (\rho A + m)g [P] \} \{\vec{\alpha}\} \\
 & = [\phi]^T \{f\} \quad (11)
 \end{aligned}$$

여기서 각 행렬들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 [M] &= (\rho A + m)[S_1], & [K] &= EI[S_2] \\
 [U] &= [\phi]^T [M] [\phi], & [A] &= [\phi]^T [K] [\phi] \\
 [F] &= c[\phi]^T [S_1] [\phi], & [P] &= [\phi]^T [S_3] [\phi] \\
 [Q] &= -[\phi]^T [S_4] [\phi], & [R] &= -[\phi]^T ([S_3] + [S_6]) [\phi]
 \end{aligned}$$

식 (11)은 유한요소법을 이용하여 내부에 조화 맥동하는 유체가 흐르는 배관의 횡방향 진동에 대한 운동방정식으로 모드가정법에서의 식 (5)에 대응하는 것이 된다.

4. 수치 해석 방법

가. 시간응답 해석

앞에서와 같이 모드가정법(AMM) 및 유한요소법(FEM)에 의한 이산화된 운동방정식을 간단히 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[M]\{\vec{\alpha}\} + [C(t)]\{\vec{\alpha}\} + [K(t)]\{\vec{\alpha}\} = \{F(t)\} \quad (12)$$

위식에서 알 수 있듯이 감쇠를 나타내는 두번째항과 강성을 나타내는 세번째항이 시간의 함수로써 표현되어진다.

각 영역에서 직접 주어진 초기 변위에 의한 자유진동과 강제진동의 과도상태와 정상상태에서의 시간응답을 구하기 위해 흔히 사용되어지고 있는 4계

Runge Kutta법(RK4)을 이용하여 해석하였다.

나. 안정성 해석

식 (11)에서 속도진폭 $U_1 = 0$ 이 되면 정상상태 유동에서의 배관의 진동에 대한 문제로써 $[M]$, $[C]$, $[K]$ 행렬이 모두 시간에 대하여 일정하게 되어 좌변 행렬의 고유치해석을 통해 복소고유치의 실수부가 0이 되는 임계유속값을 알 수 있고, 유속이 임계유속보다 빨라지면 배관의 불안정현상이 관찰되는 것과 같게 된다.^[1]

그러나 속도진폭 $U_1 \neq 0$ 인 유동에서는 평균유속이 임계유속에 미치지 못하여도 조화맥동의 주파수와 배관의 고유진동수의 관계에 따라 공진현상이 관찰된다.

이는 parametric resonance라고 알려져 있는 것으로 맥동주파수 ω 가 $\frac{2\omega_n}{k}$, $k=1, 2, 3, \dots$ 근처의 특정 범위내에 포함되면 공진이 발생하게 되고, 유체의 속도 및 질량등에 의해 그 범위가 결정되어 진다. 여기서 ω_n 은 배관의 고유진동수이다.

이러한 공진에 의한 불안정영역을 판별하는 가장 쉽고 널리 알려진 방법으로 Bolotin's method^[7]가 있다. 이것은 시스템이 주기적으로 변할때의 전체 해를 그 주기 T와 2T에서의 해로서 표현하는 방법으로 여기서는 맥동주파수의 k/2배와 k배에 대한 푸리에 급수전개로서 해를 가정하여 그 계수들에 대한 행렬식을 이용하는 방법이다.

즉, 응답을 표현한 다음식

$$\vec{\alpha} = \sum_k \left\{ \vec{a}_k \sin\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) + \vec{b}_k \cos\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) \right\}, k=0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

을 식 (11)에 대입하여 좌변과 우변을 항등식의 형태로 두면 sin과 cos함수로 이루어진 대수방정식들이 k에 따라 무한개가 구성되어진다. 이때 방정식 자체에 있는 $\sin\omega t$, $\cos\omega t$ 그리고 $\cos^2\omega t$ 항에 의해서 변위의 항과 곱해진 부분에서는 $\sin\left(\frac{1}{2}m\omega t\right)$ 와

$\cos\left(\frac{1}{2}m\omega t\right)$ 항들로 표현되어질 수가 있다. 여기서 $m=k-4, k-2, k, k+2, k+4$ 이다. 이러한 식들을 각각의 sin함수와 cos함수들의 계수들에 대한 항등식을 행렬의 형태로 나타내면 다음과 같이 나타낼 수가 있다.

$$[G_{ij}] \begin{Bmatrix} \vec{a}_i \\ \vec{b}_j \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (14)$$

여기서 $[G_{ij}]$ 는 다음과 같다.

$(4)_0$	0	0	$(7)_2$	$(8)_2$	0	0	0	$(10)_4$	0	0		
0	$(1)_1$	$(2)_1$	0	0	$(5)_3$	$(6)_3$	0	0	$(9)_3$	0		
	$(5)_1$	$(6)_1$			$(9)_1$							
0	$(3)_1$	$(4)_1$	0	0	$(7)_3$	$(8)_3$	0	0	$(10)_3$	0		
	$(7)_1$	$(8)_1$			$(10)_1$							
$(6)_2$	0	0	$(1)_2$	$(2)_2$	0	0	$(5)_4$	$(6)_4$	0	0		
$(6)_0$			$(9)_2$									
$(8)_2$	0	0	$(3)_2$	$(4)_2$	0	0	$(7)_4$	$(8)_4$	0	0		
$(8)_0$			$(10)_2$									
0	$(5)_1$	$(6)_1$	0	0	$(9)_3$	$(10)_3$	0	0	$(5)_5$	$(6)_5$...	
	$(9)_1$	$(10)_1$										
0	$(7)_1$	$(8)_1$	0	0	$(3)_3$	$(4)_3$	0	0	$(7)_5$	$(8)_5$		
	$(10)_1$											
0	0	0	$(5)_2$	$(6)_2$	0	0	$(1)_4$	$(2)_4$	0	0		
$(10)_0$	0	0	$(7)_2$	$(8)_2$	0	0	$(3)_4$	$(4)_4$	0	0		
$(10)_2$												
0	$(9)_1$	0	0	0	$(5)_3$	$(6)_3$	0	0	$(1)_5$	$(2)_5$		
0	0	$(10)_1$	0	0	$(7)_3$	$(8)_3$	0	0	$(3)_5$	$(4)_5$		

(15)

여기서 행렬 내부 요소들을 표기함에 있어서 하첨자로 표현된 숫자는 식 (13)에서의 k에 해당하는 것으로 해의 푸리에 급수전개 표현시 각각의 차수에 해당하는 것이다. 이것은 무한개까지 표현이 가능하나 수치해석을 위하여 적절한 차수까지 사용함으로써 정도높은 근사화가 가능하며, 본 논문의 후미 '수치해석예제' 부분에서도 표 1~4와 함께 고찰될 것이다.

그리고 식 (15) 행렬의 내부 요소들은 유한요소법에 의한 식 (11)에 적용한 경우에 대해서는 다음과 같이 표현된다.

$$(1) = -\frac{(k\omega)^2}{4} [U] + (*) + \frac{1}{2} \rho A U_1^2 [Q] \quad (16)$$

$$(2) = -\frac{k\omega}{2}[F] - 2\rho AU_0 \frac{k\omega}{2}[P] \quad (17)$$

$$(3) = \frac{k\omega}{2}[F] + 2\rho AU_0 \frac{k\omega}{2}[P] \quad (18)$$

$$(4) = -\frac{(k\omega)^2}{4}[U] + (*) + \frac{1}{2}\rho AU_1^2[Q] \quad (19)$$

$$(5) = \rho AU_0 U_1[Q] \quad (20)$$

$$(6) = -\rho AU_1 \frac{k\omega}{2}[P] - \frac{1}{2}\rho AU_1 \omega(L[Q] - [R]) \quad (21)$$

$$(7) = \rho AU_1 \frac{k\omega}{2}[P] + \frac{1}{2}\rho AU_1 \omega(L[Q] - [R]) \quad (22)$$

$$(8) = \rho AU_0 U_1[Q] \quad (23)$$

$$(9) = \frac{1}{4}\rho AU_1^2[Q] \quad (24)$$

$$(10) = \frac{1}{4}\rho AU_1^2[Q] \quad (25)$$

$$(5)' = \rho AU_0 U_1[Q] \quad (26)$$

$$(6)' = -\rho AU_1 \frac{k\omega}{2}[P] + \frac{1}{2}\rho AU_1 \omega(L[Q] - [R]) \quad (27)$$

$$(7)' = \rho AU_1 \frac{k\omega}{2}[P] - \frac{1}{2}\rho AU_1 \omega(L[Q] - [R]) \quad (28)$$

$$(8)' = \rho AU_0 U_1[Q] \quad (29)$$

$$(9)' = \frac{1}{4}\rho AU_1^2[Q] \quad (30)$$

$$(10)' = \frac{1}{4}\rho AU_1^2[Q] \quad (31)$$

여기서

$$(*) = [A] + (\rho AU_0^2 - (\rho A + m)gL)[Q] + (\rho A + m)g([P] + [R]) \quad (32)$$

이때 불안정성의 경계는 다음식으로 구할 수가 있다.^{[7][8]}

$$|G| = 0 \quad (33)$$

각 주파수 ω 에 따라 식 (33)의 좌변에 표시되어 있는 $|G|$ 를 수치해석적으로 구하면 안정영역에서는 양수가 되고 불안정영역에서는 음수가 됨을 알 수 있다.

다. 강제진동 주파수응답 해석

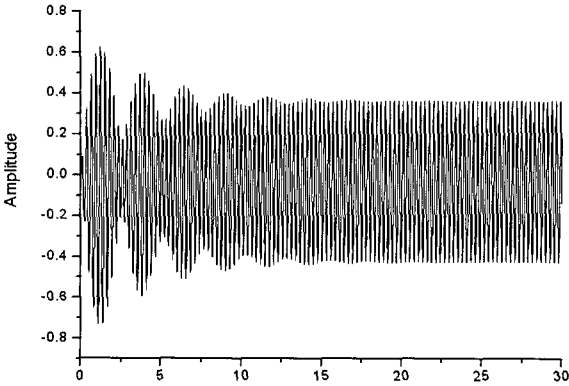
Parametric resonance에 대해서는 현재까지 많은 연구 결과가 발표 되었고 지금도 많은 연구가 이루어지고 있는데, 안정성 해석을 통한 불안정 영역과 안정영역의 경계를 결정하는 것이 대부분이다. 하지만 안정영역 내에서의 외부 가진력에 의한 강제진동 응답 해석에 있어서도 유체 맥동성분의 영향이 고려되어야 할 것이다.

우선 강제진동에 대한 정상상태에서의 응답 특성을 알아보기 위해 식 (11)에서 임의의 감쇠를 추가한뒤 충분한 시간이 지나는 동안의 강제진동 시간 응답을 구한것을 그림 3에 나타내었다.

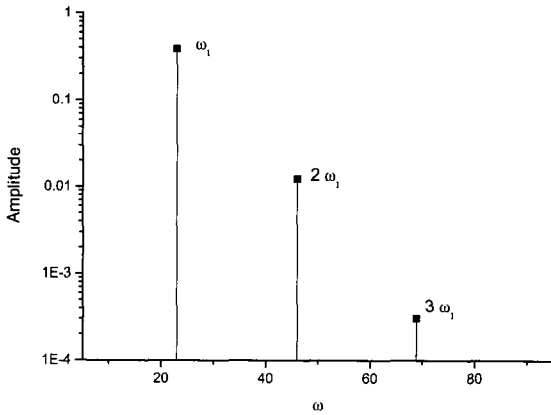
또한 충분한 시간후 정상 상태가 되었을 때의 시간 신호만을 따로 빼내어 FFT변환을 한 것을 그림 4에 나타내었다.

이때의 시간응답에 대한 수치해석은 식 (11)의 우변에 표현되어있는 외부 가진력의 주파수를 유체 맥동 주파수와 같은 것으로 하여 역시 4계 Runge Kutta 법을 이용하여 수행한 것이다.

일반적인 진동계에서의 강제진동 정상상태 응답 주파수는 가진 주파수와 같지만 여기서의 경우에는 그림 4에 보이는 바와 같이 유체 맥동 주파수와 같은 주파수의 외부 가진력이 가해 졌을때의 강제진동 응답은 가진 주파수의 조화 성분들의 합인 형태를 취함을 알 수가 있다.



[그림 3] Forced response($U_1/U_0 = 0.4$)
($\omega = 1.1\omega_1, \sigma = 0.5$)



[그림 4] FFT signal of steady state time response

강제진동 응답을 주파수 영역에서 직접 구하기 위해 식 (11)의 우변에 가진력 항을 $\vec{f} \sin(\omega t)$ 로 가정하면 다음과 같게 된다.

$$[M]\{\ddot{\alpha}\} + [C(t)]\{\dot{\alpha}\} + [K(t)]\{\alpha\} = \{\vec{f} \sin(\omega t)\} \quad (34)$$

식 (34)에 응답을 가진주파수의 조화항으로써 표현한 다음식

$$\vec{\alpha} = \sum_{k=0,1,2,\dots} \{\vec{a}_k \sin(k\omega t) + \vec{b}_k \cos(k\omega t)\} \quad (35)$$

를 대입하여 앞에서와 같은 방법으로 다음과 같은 행렬을 구성할 수가 있다.

k=0	k=1	k=2			
(4) ₀	(7) ₁	(8) ₁	0	(10) ₂	
(6) ₀	(1) ₁	(2) ₁	(5) ₂	(6) ₂	
-(6) ₀	-(9) ₁				
(8) ₀	(3) ₁	(4) ₁	(7) ₂	(8) ₂	...
+(8) ₀	+(10) ₁				
0	(5) ₁	(6) ₁	(1) ₂	(2) ₂	
(10) ₀	(7) ₁	(8) ₁	(3) ₂	(4) ₂	
+(10) ₀					
		⋮			⋮

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_0 \\ \vec{a}_1 \\ \vec{b}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{b}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \vec{f} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (36)$$

이때의 행렬의 내부 요소들은 식 (16)~(31)에 나타난 것과 같은 것이다.

이렇게 구성한 식에서 맥동 주파수 ω 를 변화시키며 연립방정식의 해를 수치적으로 구하면 강제진동 주파수 응답을 얻을 수가 있게 된다.

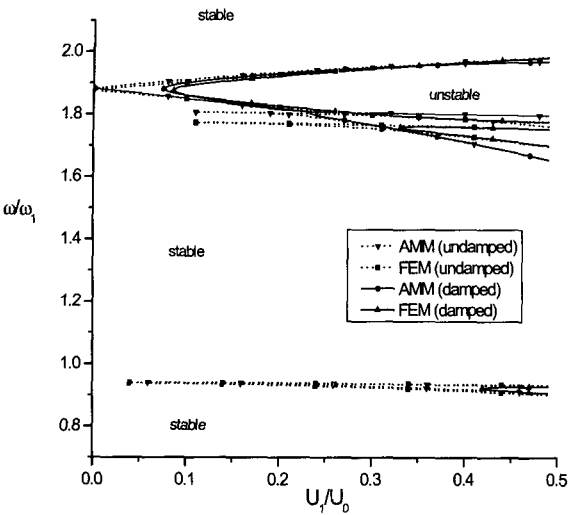
이때의 응답은 가진주파수에 해당하는 \vec{a}_1, \vec{b}_1 뿐 아니라 $\vec{a}_2, \vec{b}_2, \vec{a}_3, \vec{b}_3, \dots$ 등 고차성분들에 대해서도 같이 구하여 진다.

5. 수치 해석 예제

식 (33)에 의한 안정성 해석 결과를 그림 5에 나타내었다. 여기서 ω_1 은 배관의 1차 고유진동수이다. 이때 해석을 위한 유한 요소 모델은 길이 1m인 양단고정 배관을 50개의 요소로 분할한 것이며, 20번째의 절점에 횡 방향으로의 가진력이 작용하고 유체의 평균 속도 $U_0 = 21 \text{ m/s}$ 로하여 해석하였다.

그림 5는 양단고정 직관의 1차 고유모드에 대한 불안정영역을 나타내고 있는데, 윗 부분의 불안정 영역이 $k=1$, 아랫 부분이 $k=2$ 일때의 공진영역에 해당되는 것이다.

그림 5에서 볼 수 있듯이 맥동성분의 진폭이 커짐에 따라 공진영역이 점차적으로 더 넓어짐을 알 수가 있다. 그리고 배관의 감쇠를 고려할 경우 맥동 진폭



[그림 5] Stability analysis of clamped-clamped pipe

이 특정 값 이하가 되면 parametric resonance가 발생하지 않을 수도 있음을 알 수가 있다. ω/ω_1 이 정확히 2 근처가 되지 않는 것은 ω_1 이 유체가 없는 배관의 고유진동수에 대해서 나타냈기 때문이다. 일정 유속이 흐를때 배관의 고유진동수가 낮아지는 특성을 감안한다면 당연한 것이다.

그림 5에서 볼 수 있듯이 유한요소법(FEM)을 이용하여 수치해석한 결과가 전통적인 방법인 모드가정법(AMM)에 의한 결과와 아주 유사함을 알 수 있다.

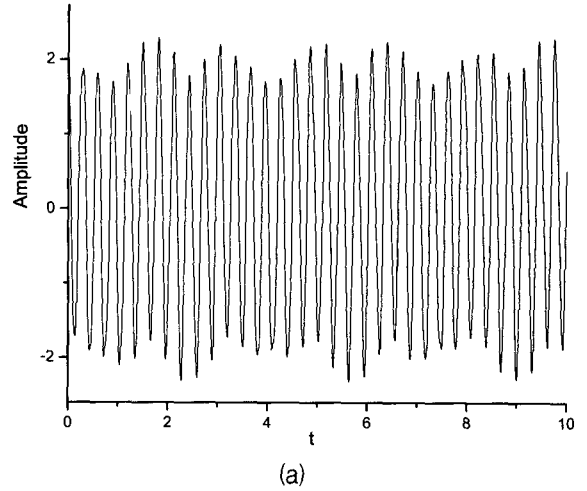
그리고 안정영역 및 불안정영역에서의 임의의 초기치에 대한 비감쇠 자유진동 응답을 Runge Kutta법을 이용하여 시간 영역에서 구한 결과를 그림 6에 나타내었다.

불안정 영역에서는 유동에 의한 자려 진동의 영향으로 공진이 발생하여 응답이 발산함을 알 수 있고, 안정 영역에서는 일반 진동계와 마찬가지로 여러 모드의 합성에 의한 자유 진동 응답이 나타난다.

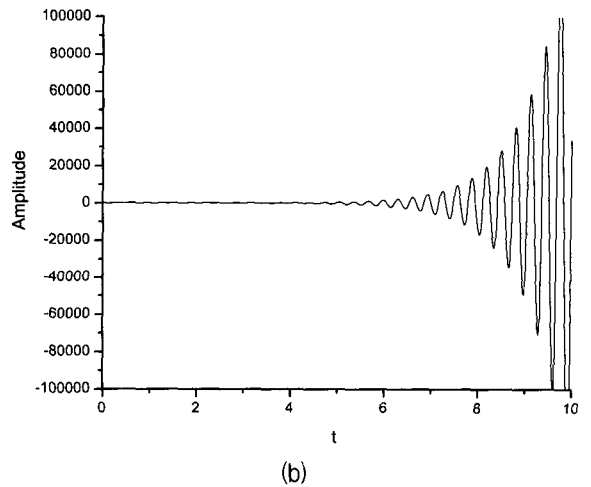
그리고 위와 같은 경우에 대해서 감쇠를 어느 정도 포함시켜서 시간영역에 대하여 해석을 수행하면 시간이 지남에 따라 자유진동이 상쇄되어 사라짐을 알 수 있다.

앞에서와 같은 조건에서 모드가정법으로 계산한 강제진동 주파수응답 해석결과를 그림 7에 나타내었다.

그림 7에서의 세가지의 그래프는 각각 1차, 2차, 3



(a)



(b)

[그림 6] Time response ($U_1/U_0 = 0.4$)

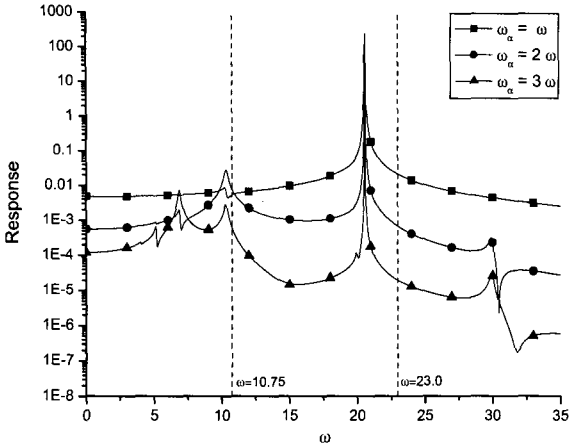
(a) $\omega/\omega_1 = 1.1$ (stable region)

(b) $\omega/\omega_1 = 1.8$ (unstable region)

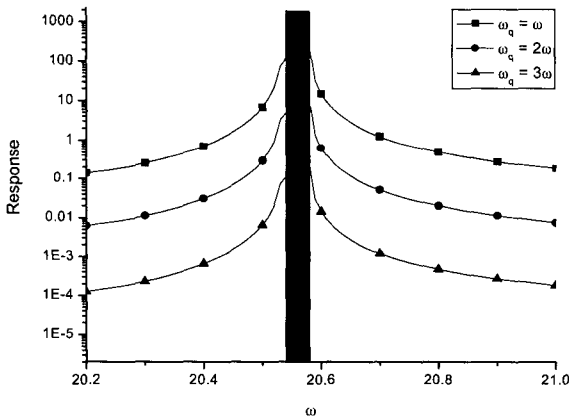
차 성분에 해당하는 응답으로써 시간응답에 의해 계산한 결과와 비교하기 위해서는 각 조화 성분을 푸리에 합으로 계산하면 시간응답과 같아짐을 알 수 있다.

그림 8은 그림 7에서 공진에 해당하는 부분을 확대한 것으로 검정색으로 표시된 부분은 안정성 해석시의 불안정 영역으로써 응답이 발산하는 부분이므로 주파수응답에서의 값은 무시하여야 한다.

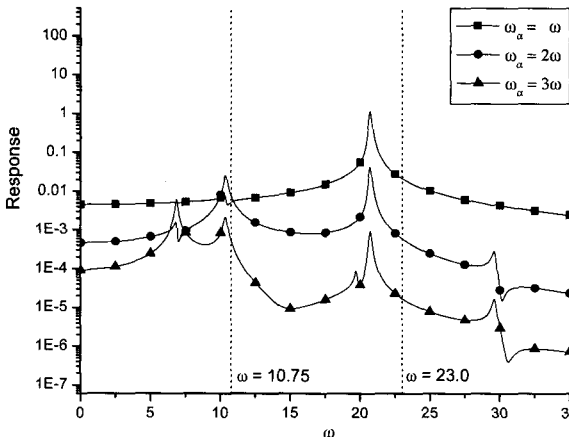
같은 해석을 유한요소법으로 행하였을때의 결과는 그림 9에 나타내었다.



[그림 7] Frequency response(AMM)



[그림 8] Resonance region in frequency response



[그림 9] Frequency response(FEM)

그림 7과 그림 9에서 보는바와 같이 유한요소법에 의한 주파수응답 또한 모드가정법에 의한 결과와 아주 유사하게 나타남을 알 수 있다.

이 역시 시간영역에서 계산한 결과와 비교하기 위해서는 각 조화 성분을 푸리에 합으로 계산하면 시간 응답과도 같아짐을 알 수 있다

수치적인 비교예로써 $\omega = 10.75$ 일때와 $\omega = 23.0$ 일때의 두가지 경우에 대해서 모드가정법 및 유한요소법에 의한 강제진동 주파수응답 해석결과와 Runge Kutta법에 의한 결과를 비교한 것이 표 1~표 4에 나타나 있다.

[표 1] Comparison of the results at $\omega = 10.75$ (AMM)

	RK4	FRF			Error (%)
		k = 1	k = 2	k = 3	
0	3.508e-4	2.871e-3	3.567e-3	3.747e-4	6.81
1	4.838e-3	6.297e-3	5.242e-3	5.169e-3	6.84
2	7.133e-3	-	6.969e-3	7.570e-3	6.13
3	5.596e-4	-	-	5.940e-4	6.15

[표 2] Comparison of the results at $\omega = 23.0$ (AMM)

	RK4	FRF			Error (%)
		k = 1	k = 2	k = 3	
0	1.107e-3	1.108e-3	1.119e-3	1.119e-3	1.08
1	2.024e-2	2.006e-2	2.032e-2	2.032e-2	0.40
2	6.481e-3	-	6.617e-3	6.604e-3	1.90
3	2.289e-5	-	-	1.955e-5	14.59

[표 3] Comparison of the results at $\omega = 10.75$ (FEM)

	RK4	FRF			Error (%)
		k = 1	k = 2	k = 3	
0	9.3255e-5	7.4657e-4	9.1808e-5	9.6075e-5	3.02
1	1.667e-3	1.98e-3	1.69e-3	1.67e-3	0.18
2	2.254e-3	-	2.15e-3	2.32e-3	2.93
3	1.4525e-4	-	-	1.62e-4	11.53

[표 4] Comparison of the results at $\omega=23.0(\text{FEM})$

	RK4	FRF			Error (%)
		k = 1	k = 2	k = 3	
0	2.42e-4	2.33157e-4	2.3697e-4	2.3693e-4	2.1
1	6.761e-3	6.75e-3	6.79e-3	6.79e-3	0.43
2	1.9532e-4	-	1.9899e-4	1.9844e-4	1.6
3	6.236e-6	-	-	5.6757e-6	8.99

표 1과 표 2는 모드가정법에 의한 결과인 그림 7에서 세로줄로 표시한 두 부분이며 첫번째의 경우는 고유진동수의 1/2배가 되는 위치의 근처로써 응답의 2차 성분이 맥동에 의한 공진이 발생되는 주파수와 근접하기 때문에 그렇지 않은 경우에 비해서 오차의 비율이 약간 더 높게 나타남을 알 수 있고 두번째의 경우는 공진과는 거리가 다소 있는 부분으로써 오차가 아주 낮음을 알 수가 있다. 다만 3차 성분의 값이 1차성분과 비교할때 오차의 비율이 비교적 높게 나타났지만 크기 자체가 무시할수 있을만큼 너무 작기 때문에 전체의 응답 크기에는 영향을 미치지 못함을 알 수 있다.

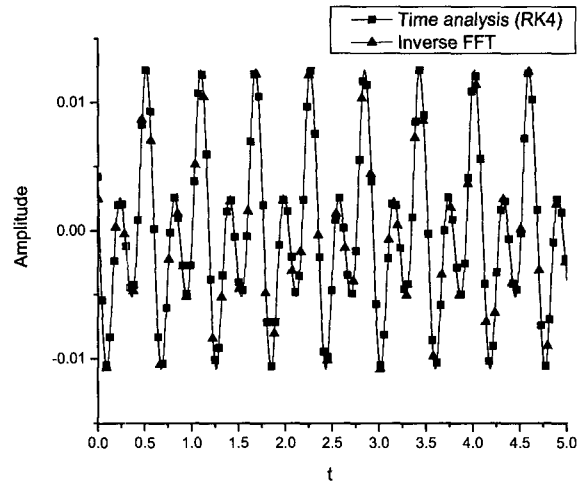
표 3과 표 4는 같은 방식으로 해석한 것으로써 유한요소법에 의한 계산결과와의 비교예이다.

결과에서 알 수 있듯이 유한요소법에 의한 응답도 시간응답에 의한 결과와 아주 작은 오차율을 보임을 알 수 있다.

마지막으로 위에서 구한 응답들 중 한가지에 대해서 Inverse FFT를 이용하여 시간응답을 만들어서 Runge Kutta법을 이용해서 직접 시간응답을 계산한 것과 비교한 것을 그림 10에 나타내었다.

보는바와 같이 진폭 뿐 아니라 위상면에서도 아주 유사한 것을 확인할 수 있다.

비록 본 논문에서는 실험과의 비교를 통한 해석결과의 검증과정을 제시하지는 못하고 있지만, 모드가정법에 의한 결과의 실험적 검증에 관해서는 이미 다른 연구자들에 의해서 수행된 바 있으므로 본 논문에서는 모드가정법에 의한 결과와의 비교로써 이를 대신하였다.^[8]



[그림 10] Time signal comparison of the results at $\omega=10.75$

6. 맺음말

배관 진동에 있어서 임계속도 이상의 유속을 갖는 유체로 인한 불안정성과는 달리 임계속도 이하일 때에도 유체의 맥동 성분으로 인해 공진현상이 발생할 수 있으며, 특히 조화적으로 변하는 유체에 의한 공진은 특정 영역으로 표현할 수 있으며 이러한 영역의 경계를 결정짓는 안정성 해석을 통해 맥동 진폭의 영향을 알 수 있었다.

즉, 맥동주파수 ω 가 $2\omega_n/k$, $k=1, 2, 3, \dots$ 근처의 특정범위 내에 포함되면 공진이 발생하게 되고, 유체의 속도 및 배관의 진동모드차수 등에 의해 그 범위가 결정 된다. (ω_n 은 배관의 고유진동수)

또한 안정영역 내에서 강제진동에 의한 주파수응답도 근사적으로 직접 구할 수가 있고 그 결과가 시간응답과 비교했을 때 비교적 정확함을 확인할 수가 있었다.

연속계에서의 전체 운동방정식을 모드가정법을 이용하여 무차원화 및 이산화 방정식을 구성하여 수치해석을 수행한 결과와 유한요소법을 이용하여 이산화 방정식을 구성하고 좌표변환을 통한 모드좌표계에서의 수치해석 결과의 비교를 통하여 정식화한 유한요

소 방정식의 타당성 또한 확인 할 수가 있었다.

즉, 내부유체의 조화가진에 의하여 시변파라미터를 갖는 배관의 운동방정식에 대해서도 유한요소법을 이용하여 정식화를 수행하여 수치해석을 수행하는 것이 가능함을 알 수가 있었다.

기존에 많이 사용되어지고 있는 모드가정법은 모드 함수를 알고있는 상태에서 해석을 수행하기 때문에 모드함수를 알 수 있는 직관 및 몇가지 경계조건에 대해서만 제한적으로 사용할 수가 있지만 본 논문에서 정식화한 유한요소 방정식을 이용하여 해석을 수행한다면 해석 알고리즘상에서 직접 모드해석을 수행하여 고유벡터를 구하여 사용하기 때문에 3차원 배관계의 진동해석으로의 확장된 연구를 수행함에 있어서도 유한요소법이 더욱 유용할 것이다.

참 고 문 헌

- [1] Michael P. Païdoussis, Fluid-Structure Interactions; slender structures and axial flow Volume 1, Academic Press, 1998.
- [2] M. P. Païdoussis and C. Sundararajan, Parametric and Combination Resonances of a Pipe Conveying Pulsating Fluid, Journal of Applied Mechanics vol.42, 1975, p.780~784.
- [3] Jerry H. Ginsberg, The Dynamic Stability of a Pipe Conveying a Pulsatile Flow, International Journal of Engineering Science vol.11, 1973, p.1013~1024.
- [4] S. T. Ariaratnam and N. Sri Namachchivaya, Dynamic Stability of Pipes Conveying Pulsating Fluid, Journal of Sound and Vibration, vol.107, 1986, p.215~230.
- [5] Robert D. Blevins, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold Company, 1995.
- [6] Maurice Petyt, Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Cambridge University Press, 1990.
- [7] V. V. Bolotin, The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden Day Inc, 1964.
- [8] M. P. Païdoussis and N. T. Issid, Experiments on Parametric Resonance of a Pipes Containing Pulsatile Flow, Journal of Applied Mechanics vol.43, 1976, p.198~202.