

< 논문 >

# 초기조건을 갖는 이산계의 과도응답에 대한 스펙트럴해석법

김성환\* · 조주용\* · 이우식†

(2004년 9월 30일 접수, 2005년 3월 2일 심사완료)

## Spectral Analysis Method for the Discrete Systems with Initial Conditions

Sunghwan Kim, Jooyong Cho and Usik Lee

**Key Words :** Spectral Analysis Method(스펙트럴해석법), Fast Fourier Transform(고속 푸리에 변환), Dynamic Response(동적응답), Linear Discrete System(선형 이산계)

### Abstract

This paper introduces a fast Fourier transform (FFT)-based spectral dynamic analysis method for the transient responses as well as the steady-state responses of the linear discrete systems subject to non-zero initial conditions. The forced vibration of a viscously damped three-DOF system is considered as the illustrative numerical example. The proposed spectral analysis method is evaluated by comparing its results with the exact analytical solutions and the numerical solutions obtained by the Runge-Kutta method.

### 1. 서론

동역학 시스템의 동적 거동은 일반적으로 연립 2차 선형 상미분 방정식으로 표현할 수 있는데 이러한 동역학 시스템을 선형 이산계(linear discrete system)라 한다. 분포계(distributed system)의 경우에는 적절한 공간 이산화(spatial discretization)과정을 통하여 이산계(discrete system) 모델로 근사화할 수 있다. 선형 이산계의 동적응답을 구하는 방법으로서는 다양한 해석적 방법과 수치해석 기법이 그동안 수없이 개발되어 왔다. 특히, 지난 30여년간 컴퓨터 기술의 비약적인 발전에 따라 보다 정확도가 높은 근사해를 구하기 위한 방법으로서는 컴퓨터를 기반으로 하는 다양한 수치해석 기법들이 개발되었다. 대표적인 방법에는 직접 적분법(direct integration method), 모드해석법(modal analysis method), 이산시간 시스템 기법(discrete time system method), FFT(fast Fourier transform)를 활용하는 스펙트럴해석법(spectral analysis method: SAM) 등이 있다. 처음 세가지 해석법은 시간영역법(time-domain method)에 속하며,<sup>(1,2)</sup> 스펙트럴해석법은 주파수영역법(frequency-domain method)에 속한다.<sup>(3-5)</sup>

스펙트럴해석법에서는 이산 푸리에변환(discrete Fourier transform, DFT) 이론을 이용하여 종속변수를 시간영역에서 주파수영역으로 변환시킴으로써 주어진 상미분방정식을 주파수를 매개변수로 하는 대수방정식으로 변환시킨다. 유도된 대수방정식을 주파수영역에서 풀어서 각각의 이산주파수(discrete frequencies)에서의 푸리에 계수(Fourier coefficient)를 구한 후 IDFT(inverse discrete Fourier transform)를 사용하여 시간영역에서의 응답을 계산한다. 실제로 DFT 또는 IDFT를 연산하는 과정에서 FFT가 사용된다. FFT는 매우 효율적인 컴퓨터 알고리즘이기 때문에 컴퓨터 연산시간을 단축시켜줄 뿐만 아니라 해의 정확도를 향상시킬 수 있다.<sup>(3,6)</sup>

FFT를 활용하는 스펙트럴해석법은 가진력이 너무 복잡하여 수치적분법을 사용해야 하는 경우, 실험 측정시 아날로그-디지털 변환기를 사용하여 디지털 형태로 데이터를 저장하는 계측장비를 사용하는 경우, 재료의 구성방정식(constitutive equation)이 시간영역에서 보다는 주파수영역에서 측정하기에 더 적합한 경우, 그리고 주파수에 종속적인 스펙트럴요소(spectral element)모델을 구조해석에 적용하는 경우<sup>(7)</sup> 등에 매우 유용하다.

기존의 문헌을 살펴보면,<sup>(3-5)</sup> FFT를 활용하는 스펙트럴해석법은 정상상태(steady-state)응답 뿐만 아니라, 초기조건이 모두 영(0)인 경우 가진력에 의한 과도응답(transient response)을 구하는 방법으로 잘 이용되어 있다. 그러나, 초기조건이 영이

\* 인하대학교 대학원 기계공학과

† 책임저자, 회원, 인하대학교 기계공학과

E-mail : ulee@inha.ac.kr

TEL : (032)860-7318 FAX : (032)866-1434

아니라 존재하는 경우 FFT를 활용하는 스펙트럴 해석법을 이용하여 과도응답을 구하기 위한 방법과 응용 사례는 아직까지는 문헌에서 찾아볼 수 없다.

따라서, 본 논문에서는 초기조건이 존재하는 경우 FFT를 활용하는 스펙트럴해석법을 이용하여 과도응답을 구하는 방법을 소개하고자 한다. 본 논문에서 소개하는 스펙트럴해석법을 검증하기 위하여 점성 감쇠(viscous damping)를 갖는 3 자유도 진동계의 강제진동을 수치 예제로 다루었다.

## 2. DFT 이론

주기가  $T$  인 연속함수  $x(t)$ 는 다음과 같이 푸리에 급수(Fourier series)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_k \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i\omega_n t} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $\omega_n = n(2\pi/T) = n\omega_1$  이고  $X_n$  은 푸리에 계수로서 다음의 적분식으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} X_n &= a_n - ib_n \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad (n=0, 1, 2, \dots, \infty) \end{aligned} \quad (2)$$

두 식 (1)과 (2)를 연속함수  $x(t)$ 에 대한 푸리에 변환 쌍(Fourier transform pair)이라 한다.

연속함수  $x(t)$ 를 시간영역에서 이산화하면  $\{x(t_r)\}$ 의 형태로 얻을 수 있다. 만약  $N$ 개의 수로 이산화를 한다면 시간영역은 등 간격  $\Delta = T/N$ 으로 나눌 수 있고,  $x_r = x(t_r)$ 로 나타낼 수 있다. 여기서  $t_r = r\Delta$  ( $r = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ )이다. 그러면 식 (2)의 푸리에 계수는 다음과 같은 수치 적분식으로 나타낼 수 있다.

$$X_n = \sum_{r=0}^{N-1} x(t_r) e^{-i\omega_n t_r} \quad (n=0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (3)$$

식 (3)을 DFT라고 하며,  $x(t_r)$ 은 다음과 같은 역함수(inverse formula)로 구할 수 있다.

$$x(t_r) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{i\omega_n t_r} \quad (r=0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (4)$$

식 (4)를 IDFT라고 하며, 두 식 (3)과 (4)를 DFT 쌍(discrete Fourier transform pair)이라고 한다. 식 (3)은 식 (2)에 대한 근사화이지만, IDFT를 통하여 시간영역에서의 이산화된 함수 값으로 정확히 변환된다.<sup>(5,6)</sup> 식 (4)에서  $X_n$ 은  $X_{N-n}^* = X_n^*$  ( $n=0, 1, \dots, N/2$ )와 같이 배열된다. 여기서,  $X_n^*$ 는  $X_n$ 의 공액 복소수(complex conjugate)를 나타내며,  $X_{N/2}$

는 가장 높은 주파수인 나이퀴스트(Nyquist) 주파수  $\omega_{N/2} = (N/2)\omega_1$ 에 해당하는 성분이다.

FFT는 DFT 또는 IDFT의 연산시간을  $N/\log_2 N$ 으로 감소시키는 매우 효율적인 컴퓨터 알고리즘이다. FFT를 활용하는 스펙트럴해석법에서 비록 컴퓨터가 사용되긴 하지만 식 (3)과 식 (4)와 같은 해석적 표현을 그대로 사용하기 때문에 수치해석법의 하나가 아님을 주지할 필요가 있다. DFT와 FFT에 관한 더 자세한 내용은 문헌[6]에서 찾아볼 수 있다.

## 3. 스펙트럴해석법

점성 감쇠를 갖는 선형 이산계 동역학 시스템에 대한 스펙트럴해석법을 다루고자 한다. 선형 이산계 동역학 시스템의 운동방정식은 다음과 같은 행렬식의 형태로 표현할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{f(t)\} \quad (5)$$

여기서  $\{u(t)\}$ 는 절점자유도 벡터이고  $\{f(t)\}$ 는 절점에 작용하는 외력 벡터이다.  $[M]$ 은 질량행렬,  $[C]$ 는 감쇠행렬, 그리고  $[K]$ 는 강성행렬이다. 식 (5)에 대한 초기조건은 아래와 같다.

$$\{u(0)\} = \{u_0\}, \quad \{\dot{u}(0)\} = \{\dot{u}_0\} \quad (6)$$

식 (5)의 일반해는 정상상태응답(steady-state response)  $\{u_p(t)\}$ 와 과도응답(transient response)  $\{u_n(t)\}$ 의 합으로 표현할 수 있다.

$$\{u(t)\} = \{u_p(t)\} + \{u_n(t)\} \quad (7)$$

### 3.1 정상상태응답

외력벡터  $\{f(t)\}$ 와 정상상태응답  $\{u_p(t)\}$ 를 DFT를 사용하여 스펙트럴 형태(spectral form)로 나타내면 다음과 같다.

$$\{f(t_r)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \{F_n\} e^{i\omega_n t_r} \quad (8)$$

$$\{u_p(t_r)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \{P_n\} e^{i\omega_n t_r}$$

식 (8)을 식 (5)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \{P_n\} &= \left[ [K] + i\omega[C] - \omega^2[M] \right]^{-1} \{F_n\} \\ &= [D(\omega_n)]^{-1} \{F_n\} \\ \{P_{N-n}\} &= \{P_n^*\} \quad (n=0, 1, 2, \dots, N/2) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $[D(\omega)]$ 는 동강성행렬(dynamic stiffness matrix)을 나타낸다.

식 (8b)를 시간에 대하여 미분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \{\dot{u}_p(t_r)\} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (i\omega_n) \{P_n\} e^{i\omega_n t_r} \\ &\equiv \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \{\bar{P}_n\} e^{i\omega_n t_r} \quad (r=0, 1, 2, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $\{\bar{P}_{N-n}\} = \{\bar{P}_n^*\}$  ( $n=0, 1, 2, \dots, N/2$ ) 이다.

식 (9)로부터 푸리에 계수  $\{P_n\}$ 을 구한 후, IFFT (inverse fast Fourier transform)를 사용하여 시간영역에서의 정상상태응답을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{u_p(t)\} \leftarrow \text{IFFT}\{P_n\} \quad (11)$$

### 3.2 과도응답

과도응답 부분은 다음과 같이 외력이 없는 경우의 운동방정식을 만족한다.

$$[M]\{\ddot{u}_h\} + [C]\{\dot{u}_h\} + [K]\{u_h\} = \{0\} \quad (12)$$

여기서  $\{u_h(t)\}$ 는 과도응답을 나타낸다. 과도응답  $\{u_h(t)\}$ 를 다음과 같은 형태로 가정할 수 있다.

$$\{u_h(t)\} = [\Phi]\{x_h(t)\} \quad (13)$$

여기서,  $[\Phi]$ 는 모드행렬(modal matrix)로서 다음과 같은 정규모드 직교성(orthogonality of normal modes)을 만족한다.

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I], \quad [\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Omega^2] \quad (14)$$

식 (14)에서  $[I]$ 는 단위행렬이고  $[\Omega^2]$ 는 대각선행렬이며 다음과 같이 정의된다.

$$[\Omega^2] = \text{diag}[\Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots, \Omega_m^2] \quad (15)$$

여기서  $\Omega_1 \leq \Omega_2 \leq \dots \leq \Omega_m$ 는 고유진동수이다.

식 (13)을 식 (12)에 대입한 후 식 (14)를 적용하면 다음과 같은 모드 방정식(modal equations)을 얻을 수 있다.

$$\ddot{x}_{hk} + 2\xi_k \Omega_k \dot{x}_{hk} + \Omega_k^2 x_{hk} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (16)$$

여기서  $\xi_k$ 는  $k$  번째 모드 감쇠비(modal damping coefficient)이다. 식 (16)의 특성방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta_k(\lambda) &= \lambda^2 + 2\xi_k \Omega_k \lambda + \Omega_k^2 \\ &= (\lambda - \lambda_{k1})(\lambda - \lambda_{k2}) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

여기서  $\lambda_{k2}$ 는  $\lambda_{k1}$ 의 공액복소수(즉,  $\lambda_{k2} = \lambda_{k1}^*$ )이다. 식 (16)으로부터 과도응답  $x_{hk}(t)$ 을 구한 후 이에 대한 미분 값  $\dot{x}_{hk}(t)$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_{hk}(t) &= a_k e^{\lambda_{k1} t} + a_k^* e^{\lambda_{k2} t} \\ \dot{x}_{hk}(t) &= a_k \lambda_{k1} e^{\lambda_{k1} t} + a_k^* \lambda_{k2} e^{\lambda_{k2} t} \end{aligned} \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (18)$$

여기서, 상수  $a_k$ 와  $a_k^*$ 는 초기조건을 만족하도록

결정해야 한다.

$x_{hk}(t)$ 와  $\dot{x}_{hk}(t)$ 을 스펙트럴 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_{hk}(t_r) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_{kn} e^{i\omega_n t_r} \\ \dot{x}_{hk}(t_r) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{H}_{kn} e^{i\omega_n t_r} \end{aligned} \quad (r=0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (19)$$

식 (3)을 사용하여 식 (19)의 푸리에 계수  $H_{kn}$ 과  $\bar{H}_{kn}$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} H_{kn} &= \sum_{r=0}^{N-1} x_{hk}(t_r) e^{-i\omega_n t_r} = a_k X_{kn} + a_k^* Y_{kn} \\ \bar{H}_{kn} &= \sum_{r=0}^{N-1} \dot{x}_{hk}(t_r) e^{-i\omega_n t_r} = a_k \lambda_{k1} X_{kn} + a_k^* \lambda_{k2} Y_{kn} \end{aligned} \quad (20)$$

식(20)의 우변은 식(18)을 대입하여 정리한 결과이다. 여기서

$$\begin{aligned} X_{kn} &= \frac{1 - e^{\alpha_{kn} N}}{1 - e^{\alpha_{kn}}}, \quad (\alpha_{kn} = (\lambda_{k1} - i\omega_n)\Delta) \\ Y_{kn} &= \frac{1 - e^{\beta_{kn} N}}{1 - e^{\beta_{kn}}}, \quad (\beta_{kn} = (\lambda_{k2} - i\omega_n)\Delta) \end{aligned} \quad (21)$$

이고  $H_{k(N-n)} = H_{kn}^*$ ,  $\bar{H}_{k(N-n)} = \bar{H}_{kn}^*$  ( $n=0, 1, 2, \dots, N/2$ ) 이다.

식 (19)에서 구한  $x_{hk}(t)$ 와  $\dot{x}_{hk}(t)$ 을 각각 취합하여 다음과 같이 벡터로 표현될 수 있다.

$$\{x_h(t_r)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \{H_n\} e^{i\omega_n t_r} \quad (22)$$

$$\{\dot{x}_h(t_r)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \{\bar{H}_n\} e^{i\omega_n t_r}$$

여기서,

$$\{x_h\} = \{x_{h1} \quad x_{h2} \quad \dots \quad x_{hm}\}^T \quad (23)$$

$$\{\dot{x}_h\} = \{\dot{x}_{h1} \quad \dot{x}_{h2} \quad \dots \quad \dot{x}_{hm}\}^T$$

$$\{H_n\} = \{H_{1n} \quad H_{2n} \quad \dots \quad H_{mn}\}^T \quad (24)$$

$$\{\bar{H}_n\} = \{\bar{H}_{1n} \quad \bar{H}_{2n} \quad \dots \quad \bar{H}_{mn}\}^T$$

식 (22)를 식 (13)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\{u_h(t_r)\} = \frac{1}{N} [\Phi] \sum_{n=0}^{N-1} \{H_n\} e^{i\omega_n t_r} \quad (r=0, 1, \dots, N-1) \quad (25a)$$

$$\{\dot{u}_h(t_r)\} = \frac{1}{N} [\Phi] \sum_{n=0}^{N-1} \{\bar{H}_n\} e^{i\omega_n t_r} \quad (r=0, 1, \dots, N-1) \quad (25b)$$

식 (7)을 식 (6)에 대입하면 다음과 같은 식을

얻을 수 있다.

$$\{\mathbf{u}_0\} = \{\mathbf{u}_p(0)\} + \{\mathbf{u}_h(0)\} \quad (26a)$$

$$\{\dot{\mathbf{u}}_0\} = \{\dot{\mathbf{u}}_p(0)\} + \{\dot{\mathbf{u}}_h(0)\} \quad (26b)$$

식 (8)과 식 (25a)를 식 (26a)에 대입하고, 식 (10)과 식 (25b)를 식 (26b)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\{\mathbf{u}_0\} = \frac{1}{N} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \{\mathbf{P}_n\} + [\Phi] \sum_{n=0}^{N-1} \{\mathbf{H}_n\} \right) \quad (27)$$

$$\{\dot{\mathbf{u}}_0\} = \frac{1}{N} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \{\bar{\mathbf{P}}_n\} + [\Phi] \sum_{n=0}^{N-1} \{\bar{\mathbf{H}}_n\} \right)$$

식 (20)을 이용하면 식 (24)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \{\mathbf{H}_n\} &= [\mathbf{X}_n] \{\mathbf{a}\} + [\mathbf{Y}_n] \{\mathbf{a}^*\} \\ \{\bar{\mathbf{H}}_n\} &= [\mathbf{A}_1] [\mathbf{X}_n] \{\mathbf{a}\} + [\mathbf{A}_1^*] [\mathbf{Y}_n] \{\mathbf{a}^*\} \end{aligned} \quad (28)$$

여기서,

$$\{\mathbf{a}\} = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m\}^T \quad (29)$$

$$\{\mathbf{a}^*\} = \{a_1^* \ a_2^* \ \dots \ a_m^*\}^T$$

$$[\mathbf{X}_n] = \text{diag}[X_{1n} \ X_{2n} \ \dots \ X_{mn}] \quad (30)$$

$$[\mathbf{Y}_n] = \text{diag}[Y_{1n} \ Y_{2n} \ \dots \ Y_{mn}]$$

$$[\mathbf{A}_1] = \text{diag}[\lambda_{11} \ \lambda_{21} \ \dots \ \lambda_{m1}] \quad (31)$$

$$[\mathbf{A}_1^*] = \text{diag}[\lambda_{11}^* \ \lambda_{21}^* \ \dots \ \lambda_{m1}^*]$$

식 (28)을 식 (27)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} [\bar{\mathbf{X}}] \{\mathbf{a}\} + [\bar{\mathbf{Y}}] \{\mathbf{a}^*\} &= \{\mathbf{d}\} \\ [\mathbf{A}_1] [\bar{\mathbf{X}}] \{\mathbf{a}\} + [\mathbf{A}_1^*] [\bar{\mathbf{Y}}] \{\mathbf{a}^*\} &= \{\mathbf{v}\} \end{aligned} \quad (32)$$

여기서,

$$[\bar{\mathbf{X}}] = \sum_{n=0}^{N-1} [\mathbf{X}_n], \quad [\bar{\mathbf{Y}}] = \sum_{n=0}^{N-1} [\mathbf{Y}_n] \quad (33)$$

$$\{\mathbf{d}\} = [\Phi]^T [\mathbf{M}] \left( N \{\mathbf{u}_0\} - \sum_{n=0}^{N-1} \{\mathbf{P}_n\} \right) \quad (34)$$

$$\{\mathbf{v}\} = [\Phi]^T [\mathbf{M}] \left( N \{\dot{\mathbf{u}}_0\} - \sum_{n=0}^{N-1} (i\omega_n) \{\mathbf{P}_n\} \right)$$

식 (34)에는 식 (14)의 직교성으로부터 구한  $[\Phi]^{-1} = [\Phi]^T [\mathbf{M}]$ 의 관계식이 적용되었다. 식 (32)를 상수 벡터  $\{\mathbf{a}\}$  또는  $\{\mathbf{a}^*\}$ 에 관하여 연립하여 풀면  $\{\mathbf{a}\}$ 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

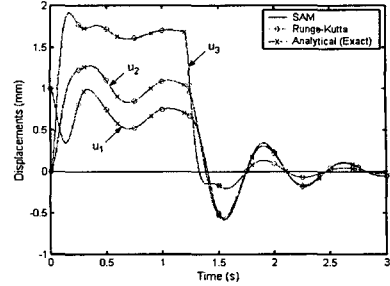
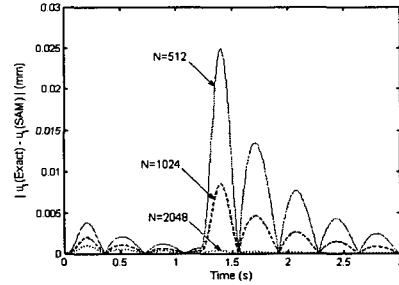
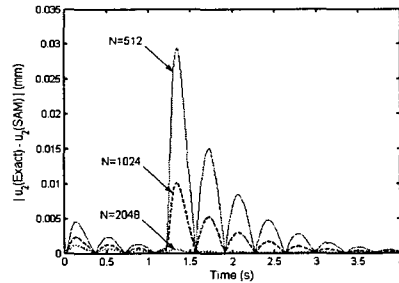


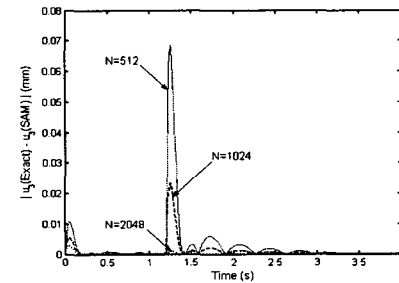
Fig. 1 Comparison of the time histories  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  and  $u_3(t)$  obtained by different solution methods



(a) Time history  $u_1(t)$



(b) Time history  $u_2(t)$



(c) Time history  $u_3(t)$

Fig. 2 Solution accuracy vs. the number of samples  $N$

Table 1 Comparison of CPU times and time averaged errors

Method		SAM (Present)			Runge-Kutta Method	
		N=512	N=1024	N=2048	Δt=0.0005(s)	Δt=0.0001(s)
CPU Time (seconds)		0.182	0.323	0.792	0.984	3.428
Time Averaged Error (%)	$U_1(t)$	1.056	0.384	0.048	0.426	0.013
	$U_2(t)$	0.922	0.335	0.042	0.371	0.010
	$U_3(t)$	0.513	0.186	0.023	0.205	0.006

$$\{a\} = \frac{i}{2} [R] \left( [A]^* \{d\} - \{v\} \right) \quad (35)$$

여기서,

$$[R] = \text{diag} [R_1 \ R_2 \ \dots \ R_m]$$

$$R_k = \frac{1}{\text{Im}(\lambda_{k1}) \sum_{n=0}^{N-1} X_{kn}} \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (36)$$

초기조건을 이용하여 식 (35)로부터  $\{a\}$  또는  $\{a^*\}$  를 먼저 구한 후, 식 (28)을 이용하여  $\{H_n\}$  을 구한다. 그리고 나서 다음과 같이 IFFT를 사용하여 과도응답  $\{x_h(t)\}$  을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{x_h(t)\} \Leftarrow \text{IFFT} \{H_n\} \quad (37)$$

시간영역에서의 과도응답  $\{u_h(t)\}$  는 식 (37)을 식 (13)에 대입하여 얻을 수 있다. 마지막으로 시스템의 초기조건을 고려한 동적응답은 식 (7)에 보인 바와 같이 정상상태응답  $\{u_p(t)\}$  와 과도응답  $\{u_h(t)\}$  의 합으로 구할 수 있다.

#### 4. 수치예제

본 연구에서 제안한 FFT를 활용하는 스펙트럴 해석법을 검증하기 위한 방법으로, 이론 해석적으로 구한 엄밀해와 Runge-Kutta 알고리즘을 이용한 수치해석 결과를 상호 비교하였다. 이론 해석적으로 엄밀해를 구할 수 있는 예제로서 다음과 같이 비례 점성감쇠(proportional viscous damping)를

갖는 3 자유도 진동계를 생각하였다.

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3c & -2c & 0 \\ -2c & 3c & -c \\ 0 & -c & 3c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{Bmatrix} \quad (38)$$

식 (38)에서  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $c = 40 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ ,  $k = 1000 \text{ N}/\text{m}$  이고,  $f(t) = 4 [1-s(t-1.2)] \text{ N}$  이며,  $s(t)$ 는 단위 계단함수 (unit step function)이다. 시스템의 초기변위와 초기 속도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{u_1, u_2, u_3\} &= \{1, 0, 0\} \text{ (mm)} \\ \{\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3\} &= \{0, 1, 0\} \text{ (mm/s)} \end{aligned} \quad (39)$$

스펙트럴해석법, Runge-Kutta 알고리즘을 이용한 수치해석법, 모드해석법을 이용한 해석적 방법 (analytical method)으로 각각 구한 동적응답  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$ 를 Fig. 1에 상호 비교하였다. 시간영역에서의 평균 오차가 0.05% 이내의 정확도를 가진 동적응답을 얻기 위하여, 스펙트럴해석법에는 DFT 주기  $T = 5$  초, 샘플링 개수 (sampling number)  $N = 2048$  개를 사용하였으며, Runge-Kutta 법에서는 시간 증분간격  $\Delta t = 0.0001$  초를 사용하였다. Fig. 1은 FFT를 활용하는 스펙트럴해석법으로 구한 결과가 엄밀해(exact analytical solution)와 거의 같음을 보여 주고 있다.

Fig. 2는 샘플링 개수  $N$ 을 증가시킬수록 스펙트럴 해석법으로 구한 결과가 엄밀해에 수렴하는 것을 보여주고 있다. Fig. 1과 Fig. 2는 샘플 개수  $N$ 을 2048 개까지 증가시키면 스펙트럴해석법으로 구한 결과가 엄밀해에 충분히 수렴함을 보여주고 있다.

Table 1은 스펙트럴해석법과 Runge-Kutta 법의 컴퓨터 연산시간과 시간평균 오차를 비교하여 보여주고

있다. FFT 를 활용하는 스펙트럴해석법의 연산시간이 Runge-Kutta 법의 연산시간에 비하여 상대적으로 적게 소요됨을 알 수 있다

## 5. 결 론

본 연구에서는 초기조건이 존재하는 경우 선형 이산계의 동적응답을 FFT를 활용하는 스펙트럴해석법을 사용하여 구하는 방법을 소개하였다. FFT 를 활용하는 스펙트럴해석법은 점성감쇠가 있는 3 자유도 강제진동계를 예제로 하여 검증하였다.

FFT를 활용하는 스펙트럴해석법은 Runge-Kutta법으로 구한 결과뿐만 아니라 엄밀해와 비교해 볼 때 매우 높은 정확도를 보여주었다. 또한 동일한 수준의 정확도를 갖는 해를 얻기 위해 소요되는 전산시간이 Runge-Kutta법에 비하여 적게 요구됨을 확인하였다.

본 연구에서 소개한 스펙트럴해석법을 확장하여 동강성행렬(dynamic stiffness matrix) 모델로 표현되는 연속체계 문제에 적용하기 위한 연구를 현재 진행하고 있다.

## 후 기

이 논문은 2004 년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음 (KRF-2004-041-D00034).

## 참고문헌

- (1) Newland, D. E., 1989, *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, John Wiley & Sons, New York.
- (2) Meirovitch, L., 1980, *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noodhoff, The Netherlands.
- (3) Doyle, J. F., 1997, *Wave Propagation in Structures, Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms*, 2nd ed., Springer, New York.
- (4) Lee, U., Kim, J. and Leung, A.Y. T., 2000, "The Spectral Element Method in Structural Dynamics," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 32, No. 6, pp. 451~465.
- (5) Ginsberg, J. H., 2001, *Mechanical and Structural* Doyle, J. F., 1997, *Wave Propagation in Structures, Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms*, 2nd ed., Springer, New York.
- (6) Newland, D. E., 1993, *Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*, 3rd ed., Longman, New York.
- (7) Oh, H., Cho, J. and Lee, U., 2004, "Spectral Element Analysis for an Axially Moving Viscoelastic Beam," *KSME International Journal*, Vol. 18, No. 7, pp. 1159~1168.