

〈 논문 〉

동하중을 받는 구조물의 최적화에 관한 연구동향

강 병 수[†] · 박 경 진^{*}

(2004년 1월 28일 접수, 2004년 12월 3일 심사완료)

An Overview of Optimization of Structures Subjected to Transient Loads

Byung-Soo Kang and Gyung-Jin Park

Key Words : Dynamic Response Optimization(동적반응최적화), Review(재고찰), Time Dependent Constraint(시간종속 구속조건), Design Sensitivity(설계민감도), Approximation(근사화), Equivalent Static Load(등가정하중), Flexible Multibody Dynamic Systems(유연다물체 동역학계)

Abstract

Various aspects of structural optimization techniques under transient loads are extensively reviewed. The main themes of the paper are treatment of time dependent constraints, calculation of design sensitivity, and approximation. Each subject is reviewed with the corresponding papers that have been published since 1970s. The treatment of time dependent constraints in both the direct method and the transformation method is discussed. Two ways of calculating design sensitivity of a structure under transient loads are discussed – direct differentiation method and adjoint variable method. The approximation concept mainly focuses on response surface method in crashworthiness and local approximation with the intermediate variable. Especially, as an approximated optimization technique, Equivalent Static Load method which takes advantage of the well-established static response optimization technique is introduced. And as an application area of dynamic response optimization technique, the structural optimization in flexible multibody dynamic systems is reviewed in the viewpoint of the above three themes

1. 서 론

동하중이 가해지는 구조물의 반응을 최적화하는 연구는 1970년대 Fox, Willmert, Afimiwala 등의 연구에서 시작되었다고 할 수 있다.⁽¹⁻³⁾ 70년대 초반 이전에는 주로 주파수영역에서의 최적화에 관한 연구가 이루어졌다. 70년대 초반 이전의 주파수영역에서의 최적화에 관한 문헌들은 참고문헌(4~7)에서 발견할 수 있다. 동하중을 받는 구조물의 최적화에 관한 연구는 그 동안 많은 진전을 보았다. 특히, 전산환경의 발달과 유한요소법의 광범위한 사용에 힘입어 구조물의 최적화 기법들은 새로운 발전단계에 들어서고 있다. 먼저 이 논문

에서는 시간 영역에서 선형해석을 이용하여 동하중이 가해지는 구조물의 반응을 최적화하는 것을 구조물의 동적반응최적화라고 정의한다. 이 글의 목적은 동적반응최적화에 관한 그 동안의 연구를 재고찰하는데 목적이 있다. 재고찰의 범위는 민감도정보에 기반한 연구에 국한된다. 민감도정보를 사용하지 않는 연구와⁽⁸⁻¹³⁾ 비선형해석을 이용하는 최적화연구는⁽¹⁴⁻²¹⁾ 이 재고찰에서 다루지 않는다. 또한 구조최적설계에 관한 일반적인 지식은 이 논문에서 자세히 다루지 않는다.⁽²²⁻²⁸⁾

구조물의 동적반응최적화에서는 크게 세 가지 주제가 논의의 대상이 될 수 있다. 그것들은 시간종속제한조건 처리와 설계민감도의 계산 및 근사화이다. 이 세 가지 문제에 대해 성공적인 대처 방안을 내놓으려는 노력들이 동적반응최적화 분야에서 지금까지 이루어진 연구의 주된 흐름이라 할 수 있다. 여기서는 이 세 주제들의 연구에 대하여 논한다.

[†] 책임저자, 회원, 한양대학교 최적설계기술연구소
E-mail : kbsoo@ihanyang.ac.kr
TEL : (031) 400-4065, FAX : (031) 407-0755

^{*} 회원, 한양대학교 기계공학과

구조물의 동적반응최적화는 일반적으로 다음의 문제를 만족하는 설계변수 벡터 \mathbf{b} 를 찾는 일이다.

$$\min f = c_0(\mathbf{b}) \tag{1}$$

$$\text{s. t. } g_i = h_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), \ddot{\mathbf{z}}(t), t) \leq 0; i = 1, \dots, m \tag{2}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{f}(t) \tag{3}$$

여기서 \mathbf{M} 은 질량 행렬, \mathbf{K} 는 강성 행렬, \mathbf{f} 는 외력, \mathbf{z} 는 구조물의 변위, $\dot{\mathbf{z}}$ 과 $\ddot{\mathbf{z}}$ 은 속도 및 가속도이다. 감쇠 행렬은 생략하였다. 식 (1)이 다음과 같이 최대값의 최소화문제(min-max problem)일 경우도 있다.

$$\min f = \max c_0(\mathbf{b}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), \ddot{\mathbf{z}}(t), t) \tag{4}$$

이 때에는 의사변수(artificial variable)를 사용하여 식 (4)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽²⁹⁾

$$\min f = b_{art} \tag{5}$$

$$\text{s. t. } g = \max c_0(\mathbf{b}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), \ddot{\mathbf{z}}(t), t) \leq b_{art} \tag{6}$$

식 (5)-(6)은 식 (1)-(2)의 형태에 속한다. 그러나 Kim 등은 식 (4)와 식 (5)-(6)이 동등한 정식화하기는 하지만 식 (5)-(6)을 푸는 것이 식 (4)를 푸는 것보다 수학적으로 좀더 많은 노력이 필요하다는 것을 지적하였다.⁽³⁰⁾

2. 시간종속제한조건의 처리

현대의 엔지니어링 환경에서는 컴퓨터의 사용이 불가피하다. 식 (2)는 연속적인 시공간에서 기술되었다. 그러나 실제로는 식 (1)-(3)의 문제를 연속적인 시공간(continuous time space)에서 이산적인 시공간(discrete time space)으로 가져와서 수치적인 방법으로 푼다. 따라서 식 (2)의 제한조건은 이산적으로 나누어진 시절점(time grid point)의 수만큼 생성된다.

수치최적화기법은 순차적 이차계획법(Sequential Quadratic Programming; SQP)^(23,24)과 같이 제한조건을 직접 다루는 직접법(direct method)과 확장라그랑지법(Augmented Lagrange Multiplier Method; ALM method)^(23,31,32)과 같이 제약조건과 목적함수를 하나의 범함수로 변환하는 변환법(transformation method)으로 크게 나눌 수 있다. 이 두 방법을 사용할 경우에 대해 시간종속제한조건의 처리를 논한다.

2.1 직접법에서의 시간종속구속조건 처리

2.1.1 등가범함수법

직접법의 특징은 부문제(sub-problem)를 푸는 것

이다. 부문제를 풀 때에는 목적함수의 설계민감도와 함께 제한조건의 설계민감도도 필요하다. 동적반응최적화문제는 많은 수의 제한조건이 생성되는데, 이들을 모두 포함시켜 부문제를 푸는 것은 비효율적일 때가 많다. 부문제 풀이의 효율성을 높이기 위해 Feng 등과 Kocer 등은 식 (2)의 제한조건을 식 (7)과 같이 하나의 등가범함수로 변환시켜 이를 제한조건으로 사용하였다.^(33,34)

$$\int_0^T \langle g_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), \ddot{\mathbf{z}}(t), t) \rangle dt \leq 0 \tag{7}$$

여기서

$$\langle g_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), \ddot{\mathbf{z}}(t), t) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } g_i < 0 \\ g_i & \text{if } g_i \geq 0 \end{cases} \tag{8}$$

이다. 이 방법의 기본 취지는 제한조건이 위배되는 시간대에서의 위배량들을 없애면서, 동시에 수많은 시간종속제한조건을 단 하나의 제한조건으로 변환하는 것이다. 최적화 결과만을 보았을 때, 식 (7)이 만족된다면 식 (2)가 만족된다. 또 식 (2)가 만족되면 당연히 식 (7)이 만족된다.

그러나 이 방법에는 두 가지의 수학적 약점이 있다. 첫 번째 약점으로 이 방법은 라그랑지 승수를 시불변량(time invariant quantity)으로 취급한다는 점이다. 시간종속제한조건이 특정 시간대 $[t_1, t_2]$ 에서 위배되었다고 하자. 이 경우 라그랑지 함수(Lagrange function)의 도함수에서 식 (2)에 해당 하는 항은 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \lambda_i(t) \nabla g_i dt \tag{9}$$

여기서 $\lambda_i(t)$ 는 라그랑지 승수인데 시변량(time variant quantity)이다. 이제 등가범함수법에 따라 변형된 제한조건은 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle g_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), \ddot{\mathbf{z}}(t), t) \rangle dt = \int_{t_1}^{t_2} g_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), \ddot{\mathbf{z}}(t), t) dt \tag{10}$$

라그랑지 함수의 도함수에서 식 (10)에 대응하는 항은 다음과 같다.

$$\lambda_i \int_{t_1}^{t_2} \nabla g_i dt \tag{11}$$

식 (11)에서 제한조건이 하나뿐이기 때문에 라그랑지 승수는 특정 시간대 $[t_1, t_2]$ 에서 상수가 되었다. 이런 이유로 인해 일반적으로 식 (1)-(3)의 KKT 최적성 조건과 등가범함수에 의해 변형된 제한조건을 사용하는 최적화문제의 KKT 최적성 조건은 동일하지 않다. 두 번째 약점은 Fig. 1과 같이 고려하는 시구간에서 여러 번 제한조건을 위배하는 경우에는 식 (7)이 미분불가능한 점이다.

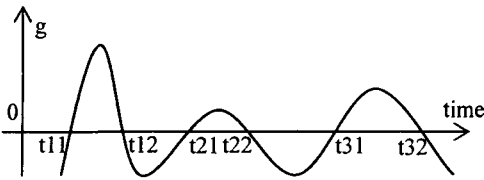


Fig. 1 Multiple violations of a constraint over time interval

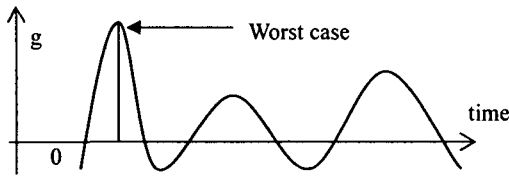


Fig. 2 Worst case approach

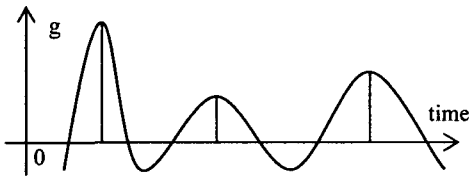


Fig. 3 All the local maximum responses which are taken as constraints

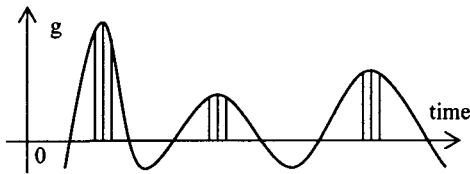


Fig. 4 Point wise constraints at time grid points near local maximums

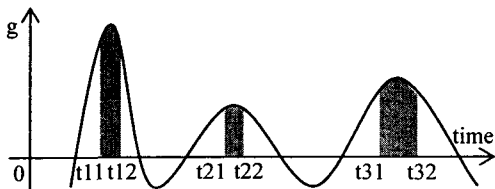


Fig. 5 Multiple equivalent functionals near the local maximum responses

이런 약점들로 인해 등가범함수법은 수치적인

불안정성이 있는 것으로 보고되어 있다.⁽³⁵⁾

2.1.2 최악조건법

등가범함수법에 대한 대안으로 생각할 수 있는 것은 식 (2)에서 위험한 시간대의 제한조건들만을 고려하여 부문제의 크기를 줄이는 방법들이다. 가장 쉽게 생각할 수 있는 방법은 최악조건(worst-case)만을 고려하는 것이다.^(29,36,37) Fig. 2는 이 방법을 설명하고 있다. 이 방법은 전체 시구간에서 제한조건이 가장 크게 위배될 때의 시간 하나만을 고려하는 것이다. 이는 고려하는 제한조건 수를 획기적으로 줄일 수 있다. 그러나 최적화가 진행되면서 제한조건이 최대로 위배되는 시간은 일반적으로 일정하지 않다. 즉, 설계가 진행됨에 따라 최악조건이 나타나는 시점들이 시간축상을 움직이는 문제에서는 이 방법의 의한 최적화의 수렴속도가 느리다.

2.1.3 모든 국부최대점을 제한조건으로 처리

최악조건법을 개선한 것으로 국부최대점들을 모두 제한조건으로 고려하는 방법을 생각할 수 있다. 이 방법은 최악조건법의 단점을 어느 정도 극복할 수 있는 가능성이 있다. 그러나 매 반복마다 평형방정식을 푼 후 국부최대점들을 찾는 별도의 노력이 필요하다. Grandhi 등은 다수 개의 국부최대점들을 찾아내는 알고리즘을 제안하였다. 이들이 제안한 알고리즘은 시간격을 일정하게 두고 평형방정식을 푸는 적분알고리즘을 채용한 경우에 유용하다.^(38,39) 그러나 이 방법 역시 최적화가 진행되면서 국부최대점들이 변하는 현상에 성공적으로 대처하기 힘들다.

2.1.4 국부최대점 근처의 모든 반응을 제한조건으로 처리

여기서 생각할 수 있는 또다른 처리법은 국부최대점 근처의 모든 반응들을 제한조건으로 삼는 것이다. 이 방법은 국부최대점이 나타나는 시간이 최적화과정 동안 심하게 변하지 않을 경우에 사용할 수 있다. Fig. 4는 이 방법을 나타내고 있다.⁽⁴⁰⁾

2.1.5 다수개의 등가범함수로 처리

국부최대점 근처의 모든 반응을 제한조건으로 처리하는 것이 효율성면에서 부담스럽다면 Fig. 5의 방법을 대안으로 생각할 수 있다. 이는 국부최대점 근처 영역을 각각의 등가범함수로 처리하는 방법을 나타내고 있다.⁽⁴¹⁾ 이 방법은 Fig. 4의 방법보다 다루는 제한조건이 수가 적지만 라그랑지 승수를 시불변량으로 보는 모순을 근본적으로 피할 수는 없다. 그러나 라그랑지 승수의 모순이 영향을 미치는 적분 시구간이 원래의 등가범함수

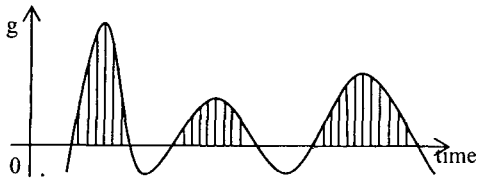


Fig. 6 Point wise constraints at all the time grid points with active constraint strategy

법에 비해 상대적으로 짧기 때문에, 수치적 불안정성이 개선될 것을 기대할 수 있다. 또한 각각의 등가범함수는 미분가능하다.

2.1.6 모든 시점점에서 제한조건을 고려하면서 활성제한조건전략을 적용

식 (2)를 처리하는 가장 손쉬운 방법은 식 (2)를 모든 시점점에 적용하면서 동시에 활성제한조건전략(active constraint strategy)을 사용하는 경우일 것이다.⁽⁴²⁻⁴⁶⁾ Fig. 6은 이 방법을 보여주고 있다. 이 방법은 제한조건이 대부분의 시구간에서 위배되는 경우에는 사용하기 힘들다. 그런데 이 방법은 다른 어떤 방법보다 수치적으로 구현하기가 간편하고, 이미 존재하는 상용코드를 이용하여 비교적 용이하게 사용할 수 있다. 제한조건이 위배되는 시구간들이 매우 길지 않다면, 오늘날의 발달된 전산환경에서 시간중속제한조건의 처리 방법으로 이 방법을 충분히 고려할 수 있다.

한편, 직접법으로 문제를 풀기위한 알고리즘 중에서는 이전 반복에서의 정보를 필요로 하는 것들이 있다. 예를 들어, 순차적이차계획법(Sequential Quadratic Programming; SQP)같은 알고리즘은 근사화된 헤시안을 갱신하는 과정에 필요한 값을 계산하기 위해, 다음과 같이 이전 반복에서의 라그랑지 함수가 필요하다.⁽⁶⁾

$$y = \nabla_b \Phi(b^q, \lambda^q) - \nabla_b \Phi(b^{q-1}, \lambda^{q-1}) \quad (12)$$

여기서 식 (12)에서의 라그랑지 함수들의 정의는 동일해야 한다. 그런데 지금까지 논의한 시간중속 제한조건의 처리 방법을 사용하게 되면 대부분의 경우, 특히 초기 반복과정에서는 q번째 반복과 q-1번째 반복에서의 제한조건의 수나 시점점의 위치들이 일치하지 않는다. 이 사실은 식 (12)에서의 q번째의 라그랑지 함수의 정의와 q-1번째의 라그랑지 함수의 정의가 동일하지 않은 것을 의미한다. 이 경우에는 근사화된 헤시안을 갱신하는 과정이 정상적으로 이루어지지 않아, 결과적으로 최적화과정 전체에 나쁜 영향을 미친다. Lim등은 이 문제점에 대한 대안으로서 다소 복잡한 전략을 제안하였는데, 궁극적인 방법은 근사화된 헤시안

을 항등행렬(identity matrix)로 재설정하는 것이다.⁽⁴⁷⁾

2.2 변환법에서의 시간중속제한조건 처리

변환법의 특징은 제한조건이 있는 문제를 제한조건이 없는 문제로 변환시켜서 문제를 해결하는 것이다. 그러므로 변환법으로 문제를 풀게 되면 단 하나의 함수만을 최소화시키면 된다. 특히, 동적반응최적화문제에서 다루어야 하는 수많은 시점점 제한조건들을 모두 하나의 함수로 변환시켜 처리할 수 있다는 점은 좋은 아이디어이다.⁽⁴⁸⁻⁵³⁾ 외부벌칙함수법(exterior penalty function method)을 사용하여 제한조건을 처리한 예도 있지만,⁽⁵⁾ 이 논문에서는 변환법의 대표적인 확장라그랑지 승수법(Augmented Lagrange Multiplier method; ALM method)에 대해 논한다.^(31,32) 확장라그랑지 함수를 정의하는 방법은 여러 가지가 있다.^(48,51,53) 그 중에서 Paeng 등과 Chahande 등이 제안한 형태를 소개하면 다음과 같다.^(48,50)

$$\Phi(b, \theta, r, T) = f(b) + \frac{1}{2} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^m r_i \{ \max(0, g_i(b, t) + \theta_i(t)) \}^2 \right] dt \quad (13)$$

식 (11)에서 사용된 라그랑지 승수와 벌칙계수 r과 또다른 계수 $\theta_i > 0$ 에 관한 자세한 설명은 참고문헌 (50)에서 찾을 수 있다. 식 (13)의 우변의 두 번째 벌칙항이 시점점별 제한조건을 처리한 항이다. 여기에 포함되어있는 함수 $\max(0, g + \theta)$ 는 각 시점점에서의 제한조건값들을 평가하여 위배된 제한조건들의 값만을 사용하도록 한다. 더욱이 일종의 여유계수(marginal parameter) 역할을 하는 $\theta_i > 0$ 로 인해 잠재제한조건전략을 구현할 수 있다. 다시 말하면, 확장라그랑지 승수법에서는 그 구조상 활성제한조건전략 또는 제한조건제거전략을 사용하여 시간중속제한조건을 자동적으로 처리한다. 때문에 직접법에서처럼 시간중속을 처리하기 위해 인위적인 노력을 할 필요가 없다.

그런데 식 (13)의 우변의 두 번째 항의 형태는 식 (7)-(8)과 유사하다. 그러나 식 (13)에서 사용된 라그랑지 승수 $r_i \theta_i(t) = u_i(t)$ 는 시간에 관한 함수이다. 따라서 등가범함수법을 사용했을 때의 라그랑지 승수를 시불변량으로 간주한 것과는 다르다. 또 식 (11)은 미분가능하기 때문에 설계민감도를 구하는데도 어려움이 없다.^(52,48)

확장라그랑지 함수를 이용하려면 라그랑지 승수의 갱신에 주의하여야 한다. 동적반응최적화에서는 개별 제한조건의 설계민감도가 필요없는 갱신 알고리즘을 사용해야만 효율성 면에서 직접법에

대해 우위를 점할 수 있다. 그런데 그런 종류의 갱신 알고리즘은 반복적으로 이루어지는 비제약 최적화의 결과가 아주 정확해야만 한다.⁽³²⁾ 정확한 비제약 최적점을 찾기 위해서는 각각의 비제약 최적화의 반복횟수가 늘어날 수 밖에 없다. 때문에 이 알고리즘을 대형의 구조문제에 그대로 적용하여 확장라그랑지 함수의 최적점을 찾는 것은 비효율적이다. 그렇다고 해서 각각의 비제약 최적화를 부정확하게 수행하면 각각의 비제약 최적화 내의 반복횟수는 줄겠지만, 전체 비제약 최적화의 풀이 횟수가 늘어나 전체적인 수렴이 지연된다. 실제 공학문제에 라그랑지 승수법을 적용할 경우에는 두 경우를 적절히 혼용할 수 있다. 예를 들면, 한 번의 비제약 최적화에서는 다소 부정확한 해를 구하고 그 다음의 비제약 최적화에서는 정확한 해를 구하는 식의 절충안을 생각할 수 있다.⁽³²⁾ 한편, 라그랑지 승수와 벌칙계수를 갱신하는 규칙에 포함되는 여러 계수들도 수렴성에 많은 영향을 미친다. 일단의 저자들은 라그랑지 승수와 벌칙계수에 영향을 미치는 계수들을 결정하는 규칙을 개선하여 수렴성을 향상시키려는 시도를 하였다.^(49,54)

3. 설계민감도 해석

최적설계과정에서 가장 중요한 부분은 탐색방향 \mathbf{d} 를 잘 정하는 것이다. 탐색방향을 정하기 위해서는 일반적으로 다음과 같이 원래 문제에서 형성된 부문제(sub-problem)를 풀어야 한다.

$$\text{Find } \mathbf{d} \quad (14)$$

$$\text{to minimize } \nabla c \cdot \mathbf{d} \quad (15)$$

$$\text{s. t. } \mathbf{g}_i + \nabla \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{d} \leq 0; i = 1, \dots, m \quad (16)$$

∇c , $\nabla \mathbf{g}$ 등의 구배값은 부문제를 푸는데 있어서 반드시 필요한 정보이다. 제한조건들의 구배정보를 구하려면 일반적으로 다음을 계산하여야 한다.

$$\nabla c = \frac{\partial c}{\partial \mathbf{b}} \quad (17)$$

$$\nabla \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{z}} \frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{b}} + \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \frac{d\dot{\mathbf{z}}}{d\mathbf{b}} + \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \ddot{\mathbf{z}}} \frac{d\ddot{\mathbf{z}}}{d\mathbf{b}} \quad (18)$$

위의 식들에서 구하기 어려운 부분은 $\frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{b}}$, $\frac{d\dot{\mathbf{z}}}{d\mathbf{b}}$,

$\frac{d\ddot{\mathbf{z}}}{d\mathbf{b}}$ 의 값들이다. 설계민감도 해석은 이 값들을 구하는 작업이다. 설계민감도 해석은 구조물의 평형방정식과 밀접한 관련이 있다. 동적반응최적화에서 구조물의 평형방정식은 대개 2계미분방정

식이다. 설계민감도를 구하기 위한 방정식 역시 2계미분방정식이다. 설계민감도를 구하는 방법은 크게 두 부류로 구분된다. 직접미분법(direct differentiation method; DDM)과 보조변수법(adjoint variable method; AVM)이 그것들이다.⁽⁵⁵⁻⁵⁷⁾

3.1 직접미분법(direct differentiation method)

3.1.1 직접적분법

식 (3)으로부터 설계민감도를 얻기 위해 식 (3)을 설계변수에 대해 직접 미분하고 정리하면 다음과 같은 미분방정식을 얻는다.^(17,58-61)

$$\mathbf{M} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{b}} \right) + \mathbf{K} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{b}} \right) = \frac{d\mathbf{f}(t)}{d\mathbf{b}} - \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{b}} \ddot{\mathbf{z}} - \frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{b}} \dot{\mathbf{z}} \quad (19)$$

식 (19)는 $\frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{b}}$ 에 관한 이계미분방정식이다. 식 (19)를 실제로 수치적분하는 방법으로는 Newmark 법과 같은 기존의 수치적분법을 사용할 수 있다.^(62,63) 참고문헌 (64)에 식 (19)를 수치적으로 적분하는 절차가 소개되어 있다. 이 미분방정식을 직접 적분하게 되면 식 (18)에 필요한 $\frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{b}}$, $\frac{d\dot{\mathbf{z}}}{d\mathbf{b}}$,

$\frac{d\ddot{\mathbf{z}}}{d\mathbf{b}}$ 를 시간의 함수로 얻을 수 있다. 그 결과 식 (14)-(16)의 부문제를 풀어 탐색방향을 결정할 수 있다. 여기서 우변의 $\frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{b}}$, $\frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{b}}$ 를 해석적으로 구하게 되면 식 (19)를 해석적 방법(analytic method)으로 풀 것이고, 유한차분법으로 구하게 되면 식 (19)를 준해석적 방법(semi-analytic method)으로 풀 것이다.

직접미분법으로 설계민감도를 구하기 위해서는 식 (19)의 미분방정식을 설계변수의 개수만큼 반복해서 풀어야 한다. 따라서 설계변수의 개수가 많아지면 직접적분법을 이용한 설계민감도해석은 그다지 효율적이지 않다.

3.1.2 모드중첩법(mode superposition method)

식 (19)는 식 (3)과 유사한 형태를 가진 미분방정식이다. 때문에 식 (3)을 풀기 위해 적용하는 근사화기법을 식 (19)를 푸는데도 대부분 적용할 수 있다. 모드중첩법을 사용하여 식 (3)의 해를 다음과 같이 근사화한다.^(34,53,60,65,66)

$$\mathbf{z}(t) = \Phi \mathbf{q}(t) \quad (20)$$

식 (20)에 의해 식 (3)은 다음과 같이 근사화된다.

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{f} \quad (21)$$

여기서 Φ 는 모드 행렬(modal matrix)이다. 식

(20)으로부터 설계변수에 대한 변위의 민감도는 다음과 같다.

$$\frac{dz}{db} = \frac{d\Phi}{db} \mathbf{q} + \Phi \frac{dq}{db} \quad (22)$$

$$\frac{dz}{db} = \frac{d\Phi}{db} \dot{\mathbf{q}} + \Phi \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{db} \quad (23)$$

$$\frac{dz}{db} = \frac{d\Phi}{db} \ddot{\mathbf{q}} + \Phi \frac{d\ddot{\mathbf{q}}}{db} \quad (24)$$

식 (22)-(24)의 $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ 등은 식 (21)을 풀어서 얻을 수 있다. 식 (22)-(24)의 우변의 첫 번째 항의 근사모드행렬의 민감도 $\frac{d\Phi}{db}$ 는 아이겐벡터의 민감도를 구하는 여러 방법들 중 하나를 사용하여 구할 수 있다.⁽⁶⁷⁻⁷²⁾ 식 (22)-(24)의 우변의 두 번째 항의 민감도 $\frac{dq}{db}, \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{db}, \frac{d\ddot{\mathbf{q}}}{db}$ 등은 다음의 미분방정식을 풀어서 구할 수 있다.

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{db} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \frac{dq}{db} = \Phi^T \frac{d\mathbf{f}}{db} + \mathbf{B}_1 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_2 \mathbf{q} \quad (25a)$$

$$\mathbf{B}_1 = - \left[\Phi^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} \Phi + \Phi^T \mathbf{M} \frac{d\Phi}{db} \right] \quad (25b)$$

$$\mathbf{B}_2 = - \left[\Phi^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b} \Phi + \Phi^T \mathbf{K} \frac{d\Phi}{db} \right] \quad (25c)$$

식 (25)는 식 (22)-(24)를 식 (19)에 대입하여 얻은 결과이다. 일반적으로 식 (25)는 원래의 식 (19)에 비해 그 크기가 매우 작다. 즉, \mathbf{q} 의 차원이 \mathbf{z} 의 차원보다 훨씬 작다. 따라서 식 (25)를 푸는 시간이 식 (19)을 푸는 시간보다는 적을 것임을 알 수 있다. Greene 등은 선형시스템에 모드중첩법을 적용하여 수행할 수 있는 몇 가지 설계민감도 해석법을 소개하고 이들을 수치해석적인 입장에서 비교하였다.⁽⁶⁰⁾ Greene 등이 인용한 여러 과도응답해석 기법에 관한 자세한 내용은 다른 문헌을 참고하면 도움이 될 것이다.^(62,63) 한편, 공학문제에 실제로 모드중첩법을 적용할 경우에는 종종 아이겐벡터의 민감도 값이 아주 작아 무시할 수 있다는 가정을 하여 민감도 해석 과정을 간단하게 만들기도 한다. 즉,

$$\frac{d\Phi}{db} = 0. \quad (26)$$

으로 가정하고 이를 바탕으로 식 (22)-(25)를 다음과 같이 간단하게 계산한다.

$$\frac{dz}{db} = \Phi \frac{dq}{db} \quad (27)$$

$$\frac{dz}{db} = \Phi \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{db} \quad (28)$$

$$\frac{dz}{db} = \Phi \frac{d\ddot{\mathbf{q}}}{db} \quad (29)$$

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{db} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \frac{dq}{db} = \Phi^T \frac{d\mathbf{f}}{db} + \mathbf{B}_1 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_2 \mathbf{q} \quad (30a)$$

$$\mathbf{B}_1 = -\Phi^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} \Phi \quad (30b)$$

$$\mathbf{B}_2 = -\Phi^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b} \Phi \quad (30c)$$

일부의 상용 소프트웨어에서 이 방법을 사용하고 있다.⁽⁷³⁾

모드중첩법은 선형시스템에서만 적용할 수 있다는 단점이 있지만 유용한 방법이다. 그러나 식 (20)의 근사화를 어느 정도까지 할 것이냐는 모드중첩법이 가지고 있는 해묵은 숙제이다. 구조물이 하중에 비해 단단할 경우 즉, 구조물의 고유진동수가 하중의 주파수에 비해 현저히 높을 때에는 식 (3)의 평형방정식의 일반해(general solution)에서 특수해(particular solution)가 차지하는 비중이 커지게 된다.⁽⁷⁴⁾ 일반해에서 특수해가 차지하는 비중이 커지면 관성력 $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}}$ 의 역할이 미미하여 그 구조물은 거의 정적시스템처럼(static system) 거동한다.^(63,64,74) 이 경우에는 식 (20)의 근사화에서 고차모드까지 포함하는 것이 옳지만, 모드가속법(mode acceleration method) 등을 이용하면 고차의 모드를 사용하지 않아도 좋은 결과를 얻을 수 있다.^(60,65) Dutta 등은 유한요소법에서 모드중첩법을 적용하여 설계민감도를 구할 경우에 생각할 수 있는 여러 오차들을 제시하였다. 그 중에서 연속체의 이산화에서 비롯되는 오차, 시간의 이산화에서 비롯되는 오차, 고차 모드를 버림으로써 생기는 오차 등이 설계민감도의 오차에 주된 영향을 끼치고 있음을 지적하였다.⁽⁷⁵⁻⁷⁸⁾

3.2 보조변수법(adjoint variable method)

보조변수법은 확장반응함수(augmented response function)을 정의하고 이 함수의 설계민감도를 원래 반응의 설계민감도로 취하는 방법이다. 이 과정에서 보조변수를 도입하여 보조변수방정식을 풀어야 한다.^(56,72,79-84) 동하중이 가해지는 구조물에서 다음 제한조건의 설계민감도를 보조변수법으로 구하는 과정을 살펴본다.

$$g = \int_0^T h(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}, \mathbf{b}, t) dt \quad (31)$$

식 (31)에 대응하는 확장반응함수 A 는 다음과 같다.

$$A = \int_0^T h(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{b}, t) dt + \int_0^T \lambda^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} - \mathbf{f}) dt \quad (32)$$

그런데 식 (3)에 의해 식 (31)의 값과 식 (32)의 값은 같다. 또한 식 (3)은 항상 만족해야 하므로 식 (31)의 설계민감도와 식 (32)의 설계민감도 또한 같다. 즉, 다음의 관계 성립한다.

$$\frac{dg}{d\mathbf{b}} = \frac{dA}{d\mathbf{b}} \quad (33)$$

식 (32)를 설계변수에 관하여 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\mathbf{b}} = & \int_0^T \frac{\partial h}{\partial \mathbf{b}} dt + \int_0^T \lambda^T \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{b}} \ddot{\mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{z} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{b}} \right) dt \\ & + \int_0^T \underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial \mathbf{z}} \frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{b}} + \frac{\partial h}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \frac{d\dot{\mathbf{z}}}{d\mathbf{b}} + \frac{\partial h}{\partial \ddot{\mathbf{z}}} \frac{d\ddot{\mathbf{z}}}{d\mathbf{b}} \right)}_X dt + \int_0^T \lambda^T \left(\mathbf{M} \frac{d\ddot{\mathbf{z}}}{d\mathbf{b}} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{b}} \right) dt \end{aligned} \quad (34)$$

이제 식 (34)에서 X로 표시된 항이 다음의 관계를 만족하도록 임의의 보조변수벡터 λ 를 결정한다.

$$\begin{aligned} X = & \int_0^T \left(\frac{\partial h}{\partial \mathbf{z}} \frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{b}} + \frac{\partial h}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \frac{d\dot{\mathbf{z}}}{d\mathbf{b}} + \frac{\partial h}{\partial \ddot{\mathbf{z}}} \frac{d\ddot{\mathbf{z}}}{d\mathbf{b}} \right) dt \\ & + \int_0^T \lambda^T \left(\mathbf{M} \frac{d\ddot{\mathbf{z}}}{d\mathbf{b}} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{b}} \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

식 (35)를 보조변수방정식이라고 부른다. 식 (35)을 보조변수벡터 λ 에 관하여 푼다. 부분적분을 적용하여 얻은 결과에 초기치를

$$\frac{d\dot{\mathbf{z}}}{d\mathbf{b}}(0) = \frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{b}}(0) = \mathbf{0} \quad (36)$$

으로 두면 식 (35)는 최종적으로 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{M}\ddot{\lambda} + \mathbf{K}\lambda = \left(-\frac{\partial h}{\partial \mathbf{z}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial \dot{\mathbf{z}}} - \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial h}{\partial \ddot{\mathbf{z}}} \right)^T \quad (37a)$$

$$\lambda^T(T)\mathbf{M} + \frac{\partial h}{\partial \dot{\mathbf{z}}}(T) = \mathbf{0} \quad (37b)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{z}}(T) - \lambda^T(T)\mathbf{M} - \frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial \dot{\mathbf{z}}}(T) = \mathbf{0} \quad (37c)$$

여기서 \mathbf{M} 과 \mathbf{K} 는 대칭행렬이라 가정하였다. 식 (37)은 λ 에 관한 2계미분방정식인데 종단값이 지정되어 있는 종단값문제(terminal value problem)이다. 식 (37)을 풀어 얻은 해인 보조변수벡터 λ^* 를 식 (34)에 대입하면 X항이 없어지면서 식 (34)를 다음과 같이 간단하게 나타낼 수 있다.

$$\frac{dg}{d\mathbf{b}} = \frac{dA}{d\mathbf{b}} = \int_0^T \frac{\partial h}{\partial \mathbf{b}} dt + \int_0^T \lambda^{*T} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{b}} \ddot{\mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{z} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{b}} \right) dt \quad (38)$$

여기서 식 (33)의 관계가 적용되었다. 식 (37)을 살펴보면 설계변수가 많고 활성제한조건의 수가 적은 경우에는 직접미분법에 비해 보조변수법이 더 효율적임을 알 수 있다.

식 (31)과 같이 적분형이 아닌, 시절점별 제한조건을 다루는 데는 보조변수법이 적절하지 않다. 직접법(direct method)으로 구조최적설계를 시도하는 저자들은 대부분 보조변수법을 식 (31)과 같은 적분형 제한조건에 적용하고 있다.^(34,35,76,82,85) 시절점별 제한조건을 보조변수법으로 처리하기 위해 다음과 같이 디락 델타 함수(Dirac delta function)를 사용하는 방법을 생각할 수는 있다.^(25,35,85) 특정시간 t_i 에 부과된 제한조건함수

$$g = h(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}, t) \Big|_{t_i} \quad (39)$$

는 디락 델타 함수를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$g = \int_0^T h(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}, t) \delta(t - t_i) dt \quad (40)$$

식 (40)은 식 (31)과 같은 적분형이므로 보조변수법을 적용할 수 있다. 그러나 각 시절점별 제한조건들을 모두 식 (40)과 같은 형태로 변환해야 하는 경우라면 이 방법은 매우 비효율적이다. q 개의 시절점에 부과된 시절점별 제한조건을 식 (40)과 같은 형태로 변환한다면 이것은 q 개의 확장반응함수를 정의하는 것과 같다. 결과적으로 식 (37)의 미분방정식을 q 번 풀게 되는 셈인데, q 의 수가 커지면 직접미분법에 비해 보조변수법이 가지는 잇점이 사라진다. 또한, 시절점별 제한조건을 보조변수법으로 처리하려면 2.1절에서 논의한 제한조건의 인위적인 처리가 선행되어야 한다. 이런 이유로 시절점별 제한조건에는 보조변수법을 적용하지 않는 것이 일반적이다.

동적반응최적화 문제에서 보조변수법이 유용한 경우는 변환법을 사용할 때이다. 식 (13)의 확장라그랑지 함수의 설계민감도를 보조변수법으로 구하는 경우를 보자. 식 (13)에 보조변수법을 적용하면 다음의 보조변수방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\lambda} + \mathbf{K}\lambda = & - \sum_{i=1}^m r_i \left\{ \max(0, g_i + \theta_i) \right\} \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{z}} \\ & + \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^m r_i \max(0, g_i + \theta_i) \frac{\partial g_i}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \right\} \\ & - \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_{i=1}^m r_i \max(0, g_i + \theta_i) \frac{\partial g_i}{\partial \ddot{\mathbf{z}}} \right\} \end{aligned} \quad (41a)$$

$$\lambda^T(T)\mathbf{M} + \sum_{i=1}^m r_i \max(0, g_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}, T) + \theta_i(T)) \frac{\partial g_i}{\partial \dot{\mathbf{z}}}(T) = \mathbf{0}$$

(41b)

$$-\dot{\lambda}^T(T)\mathbf{M} + \sum_{i=1}^m r_i \max(0, g_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, T) + \theta_i(T)) \frac{\partial g_i}{\partial \dot{\mathbf{z}}}(T) - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^m r_i \max(0, g_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, T) + \theta_i(T)) \frac{\partial g_i}{\partial \dot{\mathbf{z}}}(T) = 0 \quad (41c)$$

식 (41)의 해 λ 를 구하여 다음의 식에 대입하면 식 (13)의 확장라그랑지 함수의 설계민감도를 얻을 수 있다.

$$\frac{d\Phi}{d\mathbf{b}} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{b}} + \int_0^T \sum_{i=1}^m r_i \{ \max(0, g_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, t) + \theta_i(t)) \} \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{b}} dt + \int_0^T \lambda \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{b}} \ddot{\mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{z} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{b}} \right) dt \quad (42)$$

식 (42)는 식 (13)의 확장라그랑지 함수의 확장반응함수를 설계변수에 대해 미분한 결과이다. 식 (34)에서 알 수 있듯이 확장라그랑지 함수의 설계민감도를 보조변수법으로 구하기 위해 필요한 미분방정식의 풀이 횟수는 2번 (식 (3)의 풀이와 식 (41)의 풀이)이다. 따라서 수치적으로 구현하는데 필요한 노력을 제외한다면 확장라그랑지 승수법과 보조변수법의 조합은 계산비용 측면에서 매우 효율적이라 할 수 있다.

3.3 시유한요소법(time finite element method)

시유한요소법은 식 (3)의 미분방정식을 대수방정식으로 변환하여 푸는 방법이다.⁽⁸⁶⁻⁸⁸⁾ 변환된 대수방정식으로부터 직접미분법으로 설계민감도를 구할 수 있다.^(89,90) 시유한요소법에서는 식 (3)의 해를 다음과 같이 가정한다. 여기서 식 (3)을 잠시 일자유도계로 가정한다.

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{j=1}^N q_j \phi_j(t) \quad (43)$$

여기서 q_j 는 구해야 할 계수이고 $\phi_j(t)$ 는 이미 알고 있는 시간에 관한 기저함수(basis function)이다. 일반적으로 유한요소법에서는 식 (43)의 값을 계산할 때에 q_j 가 시변(time variant)량이고, ϕ_j 는 시불변(time invariant)량으로 취급하는 경우가 많으나 여기서는 그 반대의 경우가 된다. 약간의 수학적 조작을 거친 후에 다음의 대수방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \{M\psi_i(T)\} \\ \langle \phi_j(T) \rangle & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_j \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^* \\ z(T) \end{Bmatrix} \quad (44a)$$

$$\mathbf{B} = \int_0^T (K\psi_i \phi_j - M\dot{\psi}_i \dot{\phi}_j) dt \quad (44b)$$

$$\mathbf{a}^* = M\psi_i(0)\dot{z}(0) + \int_0^T \mathbf{f}\psi_i dt \quad (44c)$$

$$\lambda = \dot{z}(T) \quad (44d)$$

이다. $\psi_i(t); 1 \leq i \leq N$ 는 허용가능 함수(admissible function)로서 기저함수 $\phi_j(t)$ 를 선정할 때 사용한다. 집합에서 역시 선택한다. λ 는 임의의 라그랑지 승수다. 자세한 유도 과정은 참고문헌 (89)에서 찾을 수 있다. 식 (44)는 대수방정식이다. 식 (44)을 풀면 식 (44)로부터 식 (3)의 일자유도 2계 미분방정식의 해를 구할 수 있다. 여기서 식 (44)을 직접미분하면 아래의 대수방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \{M\psi_i(T)\} \\ \langle \phi_j(T) \rangle & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{b}} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{b}} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{b}} & \left\{ \frac{\partial M}{\partial \mathbf{b}} \psi_i(T) \right\} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_j \\ \lambda \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}^*}{\partial \mathbf{b}} \\ \frac{\partial u(T)}{\partial \mathbf{b}} \end{Bmatrix} \quad (45)$$

이 대수방정식을 풀면 설계민감도를 구할 수 있다. 여기서 우변의 각 요소들에 대한 편미분들은 쉽게 계산할 수 있으며, 그 결과는 참고문헌 (89)에 설명되어 있다. 시유한요소법은 대응되는 대수방정식을 한 번만 풀어서 미분방정식의 해를 얻을 수 있다는 점에서 매력적인 아이디어이다. 그러나 대수방정식으로 변환하기까지의 여러 조건들이 명확하게 연구되어 있지 않을 뿐 아니라,⁽⁹¹⁾ 아직까지는 일반적인 다자유도계에 적용한 예를 찾기 힘들기 때문에 더 많은 연구가 필요하다.

3.4 그 밖의 방법들

Gu 등은 PTI법(Precise Time Integration method)과 직접미분법을 사용하여 열전도문제 구조문제가 형성되어 있는 경우에 열전도 부분에서의 설계민감도를 구하였다.⁽⁹²⁻⁹⁶⁾ PTI법은 일계미분방정식의 해를 구하는 풀이법으로서 해의 무조건적 안정성 등이 특징이다. 이 방법은 행렬 조작 과정이 복잡하여 구조문제의 설계민감도를 구하는데까지는 적용되지 못하고 있다. Wang 등은 이산 푸리에 변환을 사용하여 동하중이 가해지는 문제의 설계민감도를 구하였다.⁽⁹⁷⁾ 이 밖에도 미분방정식의 해를 Green 함수를 이용하여 해석적으로 표현한 후, 이 해를 직접 미분하여 설계민감도를 구하는

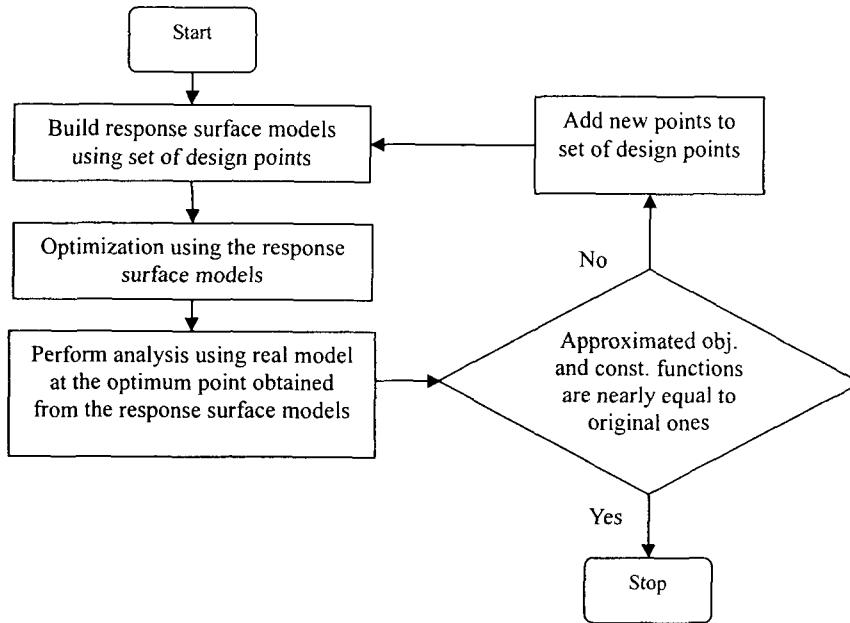


Fig. 7 An optimization scheme with Response Surface Method

Green 함수법 등을 생각할 수 있다.⁽⁸⁾

4. 근사화

4.1 반응근사화

동적반응최적화에서는 구조물의 반응을 알기 위해서 대부분 과도응답해석을 수행하여야 한다. 과도응답해석은 정적해석에 비해 그 비용이 크기 때문에 구조물의 반응을 근사화하려는 시도가 계속되어왔다. Barthelemy 등은 구조최적설계에서 가능한 근사화 기법들을 정리하면서 전역적 근사화(global approximation)와 국부적 근사화(local approximation)를 언급하였다.⁽⁹⁸⁾ 전역적 근사화의 대표적인 접근법으로 반응표면법(Response Surface Method)을 들 수 있다.⁽⁹⁹⁾ 반응표면법은 통계학적인 방법을 사용하여 예측모델을 생성한다. 대부분의 예측모델은 설계변수에 관한 명시적인 함수이다. 때문에 해석과 최적화 과정에서 쉽게 다룰 수 있는 장점이 있다. 그런데 이 접근법은 모델의 정확도와 모델 구성에 드는 비용 사이에서 그 효율성을 고민해야 한다. 동적반응을 전역적으로 근사화하려면 많은 횟수의 과도응답해석이 불가피하다. 원하는 정확도를 가지는 근사모델을 구성하기 위해 필요한 과도응답횟수가 과도하게 많아지면 반응표면법을 사용하는 이점이 없어진다.

때문에 구조물의 동적반응을 전역적으로 근사화하여 최적화를 시도하는 방법은 반응표면법이 불가피하게 필요한 영역에서만 이루어지고 있다.

동적반응최적화에서 반응표면법이 사용되는 곳은 대개 충돌관련 분야이다. 충돌과 관련된 해석은 일반적으로 비선형 반응을 다룰 뿐만 아니라, 해석에서 얻은 반응들은 각종 잡음들을 많이 포함하고 있어 미분가능한 정도로 매끄럽지가 않다. 민감도정보에 기반한 최적화기법을 적용하려면 이 반응들을 매끈하게 근사화하는 단계가 선행되어야 한다. 이 경우 반응표면법은 좋은 대안이 될 수 있다.⁽¹⁰⁰⁻¹⁰⁴⁾ 충돌관련분야의 최적화에서 시간중속조건을 처리하는 방식은 대개 제약조건법이다. 다음의 정식화는 차량이 충돌할 때 머리상해치를 최소화하면서 부품의 함몰량을 제한하는 전형적인 정식화이다.

$$\text{Find design variables} \quad (46)$$

$$\text{to minimize } \max \left\{ (t_1 - t_2) \left[\frac{1}{t_1 - t_2} \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt \right]^{2.5} \right\} \quad (47)$$

$$\text{subject to } \text{maximum intrusion} < 400\text{mm} \quad (48)$$

이 문제는 최대값의 최소화문제인데 식 (46)의 목적함수와 식 (47)의 제한조건함수를 반응표면모델

로 근사화한 후 최적화기법을 적용한다. 이 때 각 설계후보점에서 최적조건(최대값)만을 구하여 이 값들만으로 목적함수와 제한조건의 반응표면모델을 구성한다.

반응표면을 생성하기 위해 수행하는 해석의 횟수는 최대한 줄이는 것이 중요하다. 이를 위해 해석을 수행하는 설계점을 D-최적성 조건과 같은 일정한 규칙을 사용하여 선정할 수 있다. 또한 최적화 과정의 초기 단계에서는 해석횟수가 적게 요구되는 간단한 반응표면모델을 생성하고, 최적화가 진행될수록 더 많은 해석을 수행하여 더 정확한 반응표면모델을 사용하는 방법을 생각할 수 있다. Fig. 7은 반응표면법을 최적화에 이용할 경우 생각할 수 있는 전형적인 방법이다.

한편 일정한 규칙 없이 무작위로 가해지는 하중을 받는 구조물의 반응(random vibration)을 근사화할 때에도 확률론을 차용하여 반응전체를 근사화하는 시도가 있다.⁽¹⁰⁵⁾

동적반응최적화에서의 국부적인 근사화는 구조최적설계에서 사용되는 방법들을 그대로 사용할 수 있다.^(98,106-108) 대표적인 방법은 목적함수와 제한조건을 설계변수 혹은 중간변수에 관한 명시적인 함수(explicit function)로 근사화하는 방법이다.^(27,98,109,110) 그런데 적어도 동적반응최적화에서는 식 (3)을 직접 적분하여 얻은 정보로 반응의 근사화를 수행하는 방법이 아직까지는 그리 효율적이지 않은 것으로 알려져 있다.^(111,112) 반면, 식 (3)을 푸는데 있어서 모드중첩법으로 접근하는 방법에서는 모드 행렬과 그 계수들을 근사화할 수 있는 여지가 많다. 식 (3)에 직접 적용한 것은 아니지만 모드해석 문제로부터 아이겐벨류와 아이겐벡터를 근사화하는 여러 연구들이 발표되었다.^(98,113-117)

Sepulveda 등과 Jensen 등은 중간변수 개념을 구조물의 과도응답의 근사화로 확장하였다.^(111,118,119) 식 (3)의 평형방정식을 푸는데 있어서 이들은 다음과 같이 모드중첩법을 사용하였다.

$$\mathbf{z}(\mathbf{b}, t) = \Phi \mathbf{q}(\mathbf{b}, t) \quad (49)$$

식 (49)의 관계에서 중간변수를 근사화한 함수로 변위를 아래와 같이 근사화하였다.

$$\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{b}, t) = \Phi \tilde{\mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{b}, t)) \quad (50)$$

여기서 $\tilde{\mathbf{q}}$ 는 \mathbf{q} 를 근사화한 것이고 $\tilde{\mathbf{N}}$ 중간변수 \mathbf{N} 을 선형근사화 한 것으로 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbf{N}} = \sum \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{b}} \Delta \mathbf{b} \quad (51)$$

식 (51)에서 모든 중간변수는 아이겐벡터, 질량행

렬, 관성행렬 등으로 나타내었으며, 아이겐벡터의 설계민감도값은 무시하였다.

4.2 문제근사화

현대의 구조최적설계에서는 최적화문제 자체를 반복적으로 근사화하여 푸는 것이 일반적이다.^(26,73,120,121) 근사화된 문제를 푸는 대체적인 기본 전략은 설계민감도는 정확하게 구하되, 탐색방향의 결정과 선택색 과정에서 점검해야 할 반응은 근사화된 반응을 사용하는 것이다.^(27,122) 대부분의 근사화가 선형근사화이기 때문에 이동한계를 잘 정하는 것이 중요하다.

직접법에서는 Etman 등이 근사화된 최적화 문제를 반복적으로 푸는 방법 즉, 구조물의 정적반응최적화에서 사용되는 일련의 근사화 과정들을 다물체동역학계에 적용하였다.⁽⁴⁵⁾ k 번째 반복에서 근사화된 문제는 다음과 같다.

$$\text{Find } \mathbf{b} \quad (52)$$

$$\text{to minimize } \tilde{f}^k(\mathbf{b}) \quad (53)$$

$$\text{subject to } \tilde{g}_i^k(\mathbf{b}, t) = \tilde{g}_i^k(\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{b}, t), \mathbf{b}, t) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (54)$$

$$\mathbf{s}_L \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{s}_U \quad (55)$$

여기서 \sim 은 근사화된 반응을 뜻한다. \mathbf{s}_U 과 \mathbf{s}_L 은 이동한계의 상한값과 하한값이다. 근사화된 반응 $\tilde{\mathbf{r}}$ 은 중간변수 \mathbf{N} 에 의해 다음과 같이 선형 근사화된다.

$$\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{N}, t) = \mathbf{r}_0(\mathbf{N}, t) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{N}} \Delta \mathbf{N} \quad (56)$$

또 중간변수 \mathbf{N} 은 다음과 같이 설계변수의 함수이다.

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{b}) \quad (57)$$

결과적으로 근사화된 제한조건 \tilde{g}_i^k 은 설계변수와 근사화된 반응만으로 이루어지며 계산하기 용이하다.

변환법에서는 확장라그랑지 함수를 여러 형태로 근사화할 수 있다. 이들 중 하나로 Kim 등이 수행한 근사화를 소개하면 다음과 같다.⁽⁵¹⁾ 이들이 사용한 확장라그랑지 함수는 다음과 같다.

$$\Phi = f(\mathbf{b}) + \int_0^T \sum_{i=1}^m \left[\theta_i(t) \max\left(-\frac{\theta_i(t)}{r_i}, g_i\right) + \frac{1}{2} r_i \left\{ \max\left(-\frac{\theta_i(t)}{r_i}, g_i\right) \right\}^2 \right] dt \quad (58)$$

여기서 $\theta_i(t)$ 는 라그랑지 승수이고 r_i 은 벌칙계수이다. 이들은 k 번째 반복에서 선택색에 사용할

근사화된 확장라그랑지 함수를 다음과 같이 제안하였다.

$$\tilde{\Phi}(\alpha) = \tilde{f}(\alpha) + \int_0^{\pi} \sum_{i=1}^n \left[\theta_i(t) \max\left(\frac{-\theta_i(t)}{r_i}, \tilde{g}_i\right) + \frac{1}{2} r_i \left\{ \max\left(\frac{-\theta_i(t)}{r_i}, \tilde{g}_i\right) \right\}^2 \right] dt \quad (59a)$$

$$\tilde{f}(\alpha) = f(\mathbf{b}_k) + \nabla f(\mathbf{b}_k) \cdot \alpha \mathbf{S}_k \quad (59b)$$

$$\tilde{g}_i(\alpha, t) = g_i(\mathbf{b}_k, t) + \nabla g_i(\mathbf{b}_k, t) \cdot \alpha \mathbf{S}_k \quad (59c)$$

여기서 \mathbf{S}_k 는 준뉴턴방법(Quasi-Newton method)이나 공역경사도법(conjugate gradient method)을 원래의 확장라그랑지 함수인 식 (58)에 적용하여 구한 선탐색방향이다. α 는 결정해야 할 이동거리이다. 이 근사화의 기본 아이디어는 확장라그랑지 함수의 설계민감도는 원래의 확장라그랑지 함수를 이용하여 구하지만, 선탐색을 할 때에는 근사화된 확장라그랑지 함수를 사용하여 선탐색의 효율성을 높이겠다는 것이다. 식 (58) 자체를 근사화하지 않고 식 (58)을 구성하는 각각의 함수를 선형 근사화하였기 때문에 이동한계를 잘 정하는 것이 역시 중요하다.

4.3 등가정하중법

Kang 등과 Choi 등은 잘 발달된 정적반응최적화 기법을 동적반응최적화에 차용하면서 등가정하중법(equivalent static load method)을 제안하였다. 이들은 다음과 같이 외력과 관성력으로 이루어진 등가정하중(equivalent static load)이라는 개념을 도입하였다.^(43,123)

$$\mathbf{f}_{eq} = \mathbf{Kz} = \mathbf{f} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} \quad (60)$$

여기서 \mathbf{z} 와 $\ddot{\mathbf{z}}$ 은 식 (3)을 풀어서 얻는다. 등가정하중에 관한 몇 가지 특징은 참고문헌 (42)와 참고문헌 (124)에 소개되어 있다. 이 방법은 온전한 정적반응최적화가 한 번 완료되는 과정을 한 사이클(cycle)로 하여, 여러 사이클을 거치면서 동적반응최적화를 수행한다. p 번째 사이클에서 등가정하중을 이용한 정적반응최적화를 수행하기 위한 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Find } \mathbf{b}_p \quad (61)$$

$$\text{to minimize } f(\mathbf{b}_p) \quad (62)$$

$$\text{subject to } \mathbf{K}(\mathbf{b}_p)\mathbf{y}_u = \mathbf{f}_{eq}^u \quad u=1, \dots, q \quad (63)$$

$$g_{ju}(\mathbf{b}_p, \mathbf{z}_u) \leq 0 \quad u=1, \dots, q \quad (64)$$

여기서 q 는 시절점의 개수이고, 아래 첨자 u 는 u 번째 시절점을 뜻한다.

Fig. 8 은 등가정하중법의 대략적인 설계흐름을

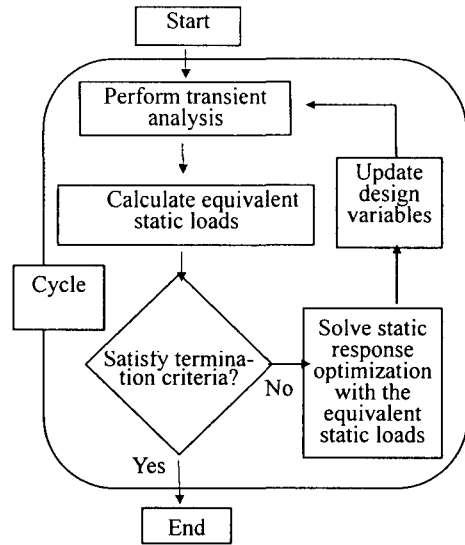


Fig. 8 A schematic diagram of the Equivalent Static Load method

보여주고 있다. 한 사이클 내에서 정적반응최적화를 수행하는 동안 과도응답해석을 통해 얻어야 할 변위를 근사화하기 위해 등가정하중을 이용한 정적해석을 수행한다. 등가정하중법에 의해 최적화과정이 수렴하면 과도응답해석의 결과와 등가정하중에 의한 정적해석의 결과가 동일하다. 모든 시절점에서의 반응을 고려해야 하므로 모든 시절점에서 구한 등가정하중들은 정적반응최적화에서 다중하중조건(multiple loading conditions)으로 처리한다. 일견 등가정하중법은 매우 많은 제한조건을 처리해야 할 것으로 보인다. 그런데 정적반응최적화에서는 다중하중조건문제가 일종의 최악조건법에 의해 처리된다. 더욱이 각각의 하중조건에서는 활성제한조건전략이 적용된다. 따라서 등가정하중법에서 실제로 다루는 제한조건의 수는 그리 많지 않다. Park 등은 등가정하중법을 사용하여 얻은 해가 식 (1)-(3)을 직접 풀어서 얻은 해와 동일하다는 것을 보였다.⁽¹²⁵⁾ Kang 등은 등가정하중법을 유연다물체동역학계의 동적반응최적화에 적용하였다.⁽⁴⁴⁾ 이들은 등가정하중법을 실제 문제에 구현하면서 정적반응최적화를 수행하는 상용 구조최적설계 코드를 변형없이 그대로 사용하였다. 산업현장에서 널리 사용되는 구조최적설계 코드를 그대로 사용할 수 있다는 것은 현실적인 측면에서 등가정하중법의 큰 장점이다. Park 등은 동하중이 가해지는 커넥팅로드의 형상을 등가정하중법으

로 최적화하여, 규모가 큰 실제문제를 효율적으로 다룰 수 있음을 보였다.⁽⁴⁶⁾

5. 동적반응최적화의 응용분야 - 유연다물체동역학계(flexible multibody dynamic systems)의 동적반응최적화

유연다물체동역학은 다물체동역학계를 이루는 링크들을 유연체(flexible body)로 보고 접근하는 분야이다. 유연다물체동역학계의 해석에 관한 부분은 참고문헌 (126)에서 찾을 수 있다. 이 내용을 간략하게 정리한 것이 참고문헌 (42)의 부록에 있다. 유연다물체동역학계에서 유연체의 운동을 표현하기 위해서는 유한요소법을 차용한다. 유한요소법으로 표현된 링크와 조인트 사이의 경계조건에 관한 문제 등이 아직 명확하게 해결되지 못하였으나, 고속으로 운동하는 다물체동역학계를 해석하는데 있어서 유연다물체동역학은 새로운 대안이 되고 있다.^(127,128) 일반적으로 다물체동역학계는 그 풀이 방법의 특성상 자유도가 커지면 풀이에 어려움이 따른다.⁽¹²⁹⁾ 때문에 전체 자유도를 줄이기 위해 유연체의 변형을 모드중첩법으로 근사화시키는 것이 일반적이다. 유연다물체동역학계에 가해지는 하중은 외력, 조인트기구에 의한 반력, 부재의 원심력 등으로서 시간에 따라 그 크기와 방향이 바뀌는 동하중이다. 따라서 유연다물체동역학계의 구조최적설계는 동적반응최적화의 영역에 속한다

Erdman 등은 이른바 KED법(Kinetoelasto-Dynamic analysis and synthesis)을 소개하였다.⁽¹³⁰⁾ 그들은 이 연구에서 링크들의 변형을 계산하기 위해 유한요소법 개념을 도입하였다. 또한, 운동하고 있는 링크들을 시간에 따라 순간적으로 고정된 구조물들의 연속으로 간주하여 각 시간에서의 구조물들을 해석하였다. 유한요소법에 사용되는 외력은 강체다물체동역학에서 얻은 가속도로부터 구하였다. 그러나 설계변수를 갱신하기 위해 설계민감도를 이용하지 않았고 일종의 시행착오법을 사용하였다.

Imam 등은 선형계획법을 사용하여 응력과 변형에 관한 제한조건을 만족시키면서 링크의 질량을 최소화시켰다. 이 연구에서는 시간중속제한조건을 최악조건법으로 처리하였으나, 제한조건의 국부최대점이 일어나는 시간이 전체 최적화과정 동안 고정되어 있는 것으로 가정하였다.⁽¹³¹⁾ 그 후에 이들은 그 당시 유행했던 SUMT(Sequential Unconstrained Minimization Technique) 기법으로 이 문제에 다시 접근하면서, 시간중속제한조건의 처리

방안으로 최악조건법과 모든 시점점에서 제한조건을 고려하는 방안을 논의하였다.⁽¹³²⁾

Khan 등과 Thornton 등은 최적성조건(optimalty criterion)을 직접 사용하여 링크의 질량을 최소화하였다.^(36,133) 이들은 최적성 조건과 완전응력부재(fully stressed member) 개념을 도입하여 설계 변수를 갱신하는 식을 개발하였다. 또한 직접미분법을 사용하여 설계민감도를 구했으며, 시간중속제한조건은 최악조건법을 사용하여 처리하였다. 또한 최악조건법을 적용함에 있어서 제한조건 함수의 국부최대값이 생기는 시간이 변할 수 있다는 점을 명확하게 지적하였다.

Cleghorn 등은 초기 설계 추정치를 대략적으로 찾기 위해 먼저 Khan의 방법을 강체동역학계에 적용하였다. 이렇게 해서 얻은 해를 초기 추정치로 삼은 후, Khan의 방법을 다시 유연다물체 동역학계에 적용하여 최종 설계치를 구하였다.⁽¹³⁴⁾ Zhang 등은 칸의 방법을 약간 개선함과 동시에, Cleghorn의 접근법을 따라서 유연다물체동역학계의 최적화를 시도하였다.⁽¹³⁵⁾

Zhang 등은 고유진동수 제한조건을 유연다물체 동역학계에서 다루었으나, Erdman 등과 마찬가지로 운동하는 링크들을 순간적으로 고정된 구조물들이 시간에 따라 연속적으로 나타나는 것으로 가정하여 각각의 고정된 구조물을 다루었다.⁽¹³⁶⁾ Yu 등은 링크의 단면적의 변화가 다물체동역학계를 이루는 탄성체에 미치는 영향에 대해 논하였다.⁽¹³⁷⁾

Dias 등은 직접미분법을 사용하여 강체-유연다물체동역학계(rigid-flexible multibody dynamic systems)의 설계민감도를 해석적으로 구하였다. 유연다물체동역학계를 해석하기 위해 모드중첩법을 이용하였다.⁽⁶⁶⁾ Oral 등은 로봇팔의 응력과 변형을 제한조건으로 삼아 그 질량을 최소화하였다. 이들은 시간중속구조조건 처리를 위해 일종의 등가범함수법이라 할 수 있는 Kreisselmeier-Steinhauser 함수를 이용한 경우와 최악조건법을 이용한 경우를 서로 비교하여, 최악조건법이 더 좋은 결과를 보여주었음을 지적하였다.⁽³⁷⁾ Etman 등은 선형근사화를 통한 근사최적화문제의 생성, 중간변수개념의 활용, 제약조건제거 전략과 시점점별 제한조건 처리의 조합 등의 구조최적화에 사용되는 근사화 개념들을 유연다물체동역학계의 최적화에 적용하였다.⁽⁴⁵⁾

Kang 등은 유연다물체동역학계의 운동방정식에 포함되어 있는 유한요소식을 이용하여 유연다물체에 관한 등가정하중을 생성하였다. 그리고 이를 바탕으로 차량의 로어 콘트롤 암의 구조최적설계

를 시도하였다. 제약조건의 처리하기 위해 모든 시점점에서 제약조건을 고려하면서 활성제한조건 전략을 적용하였다.⁽⁴⁴⁾

6. 결론

지금까지 구조물의 동적반응최적화에 관한 연구들을 시간중속 제한조건의 처리, 설계민감도 해석, 근사화 등의 관점에서 재고찰하였다. 또한 동적반응최적화의 응용분야인 유연다물체동역학계의 구조최적설계를 다룬 문헌들을 간략하게 짚어보았다. 구조물의 거동해석이나 민감도정보를 얻기 위해 동적반응최적화는 이계미분방정식을 다루어야 한다. 이 때문에 정적반응최적화에 비해 더 많은 비용이 든다. 또한 제한조건의 수가 정적반응최적화에 비해 현저하게 많기 때문에 이 문제를 해결하는 노력도 필요하다. 뿐만 아니라, 전체 최적화과정의 효율성을 향상시키기 위해 각종 근사화기법도 모색되어야 한다.

한편, 구조물의 위상최적설계에 동적반응최적화 개념을 적용하려는 시도들을 발견할 수 있었으나 아직까지 본격적인 연구단계는 아닌 듯 하다.^(138,139) 앞으로 이 분야에 관한 연구가 더 필요하다 하겠다.

앞서 논의한 것과 같이 동적반응최적화에 관한 많은 연구들이 이루어졌음에도 불구하고 아직까지 동적반응최적화 기법이 산업현장에 활발하게 이용되지 못하고 있다. 반면 정적반응최적화기법은 대부분의 상용유한요소해석기에 포함되어 있으며, 그 활용 행태도 다양하다. 동적반응최적화기법이 산업현장에서 활발하게 적용되지 않는 이유로는 몇 가지를 들 수 있다.

먼저 동하중이 가해지는 구조물을 설계해야 하는 당위성이나 필요성을 인식하지 못하는 것이 그 중의 한 가지이다. 많은 경우, 경험에 의한 계수(factor)를 사용하여 동하중을 정하중으로 대체하는 경향이 있다. 설계는 그 대체된 정하중을 기준으로 진행된다. 이는 외부하중에 대한 정확한 정의의 필요성을 명확하게 인식하지 못하기 때문이다. 그러나 이 문제는 앞으로 설계 기술과 하중과 경계 조건의 중요성에 대한 관심이 점점 커지면서 자연스럽게 해결될 수 있을 것으로 생각된다. 실험이나 기타 자연현상으로부터 외력과 경계조건을 명확하게 규정하려는 노력이 일부 영역에서 꾸준히 진행되고 있다.⁽¹⁴⁰⁻¹⁴⁵⁾

동적반응최적화가 산업현장에서 대중적이지 않은 또다른 이유는 컴퓨터원용설계 시장의 역사와 다소 관련이 있다. 컴퓨터원용설계 시장에서 유

한요소해석이 이미 주류를 형성한 상태에서 최적화를 비롯한 설계 소프트웨어는 상대적으로 후발주자이며, 해석기 시장이 컴퓨터원용설계 시장의 대부분을 차지한다. 때문에 컴퓨터원용설계 시장에서는 최적화 소프트웨어를 유한요소해석기의 보조상품(third party) 정도로 여기는 경향이 강하다. 이는 산업 현장의 설계자로 하여금 컴퓨터원용설계를 유한요소해석기와 최적화 소프트웨어를 단순히 병용하는 것으로 오해하게끔 한다. 유한요소해석기와 최적화 소프트웨어를 단순히 병용하는 대표적인 예는 최적화 소프트웨어가 유한요소해석기를 블랙박스(black box)로 사용하여 설계를 수행하는 형태이다. 이 형태는 설계민감도를 유한차분법을 이용해서 구하고 선탐색을 하는 동안 수많은 과도응답해석을 수행해야 한다. 이는 지금까지 재고찰한 여러 기법들이 전혀 사용될 수 없는 환경이며, 따라서 산업현장의 대규모 문제를 풀기에는 적합하지 않다. 다시 말하자면, 동적반응최적화 기법들이 제대로 구현된 설계도구가 아직 시장에 본격적으로 나타나지 않았기 때문에 동적반응최적화 기법이 대중적이지 않은 점도 있다.

유한유한요소법에 기초한 구조최적설계 소프트웨어를 작성할 때에는 처음부터 최적설계를 염두에 두고 지금까지 개발된 각종 기법들이 구현되어야 한다. 즉, 소프트웨어의 설계 단계에서 유한요소해석과 최적화기법이 동시에 고려되어야 하며 소스 코드(source code) 수준에서 그것들이 구현되어야 한다. 소스 코드 수준에서 유한요소법과 동적반응최적화 기법이 유기적으로 결합되어 그간의 연구 성과들과 앞으로의 연구 성과들이 적절하게 반영될 때에 구조물의 동적반응최적화는 산업현장에서 좀더 현실적인 대안이 될 것이다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Fox, R.L. and Kapoor, M.P., 1970, "Structural Optimization in the Dynamic Regime: A Computational Approach," *AIAA Journal*, Vol. 8, No. 10, pp. 1798-1804.
- (2) Willmert, K.D. and Fox, R.L., 1972, "Optimum Design of a Linear Multi-Degree-of-Freedom Shock Isolation System," *Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME*, Vol. 94, No. 4, pp. 465-471.
- (3) Afimiwala, K.A. and Mayne, R.W., 1974, "Optimal Design of an Impact Absorber," *Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME*, Vol. 96, No. 1,

- pp. 124~130.
- (4) Pierson, B.L., 1972, "A Survey of Optimal Structural Design under Dynamic Constraints," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 4, No. 4, pp. 491~499.
 - (5) Cassis, J.H. and Schmit, L.A., 1976, "Optimum Structural Design with Dynamic Constraints," *Journal of Structural Division, Proceedings of the ASCE*, Vol. 102, No. ST10, pp. 2053~2071.
 - (6) Johnson, E.H., 1976, "Disjoint Design Spaces in the Optimization of Harmonically Excited Structures," *AIAA Journal*, Vol. 14, 259~261.
 - (7) Mills-Curran, W.C. and Schmit, L.A., 1985, "Structural Optimization with Dynamic Behavior Constraints," *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 1, pp. 131~138.
 - (8) Pantelides, C.P. and Tzan, S.R., 1997, "Optimal Design of Dynamically Constrained Structures," *Computers & Structures*, Vol. 62, No. 1, pp. 141~149.
 - (9) Pantelides, C.P. and Tzan, S.R., 2000, "Modified Iterated Simulated Annealing Algorithm for Structural Synthesis," *Advances in Engineering Software*, Vol. 31, No. 6, pp. 391~400.
 - (10) Bauml, A.E., Mcphee, J.J. and Calamai, P.H., 1998, "Application of Genetic Algorithms to the Design Optimization of an Active Vehicle Suspension System," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 163, No. 1-4, pp. 87~94.
 - (11) Kocer, F.Y. and Arora, J.S., 1999, "Optimal Design of H-Frame Transmission Poles for Earthquake Loading," *Journal of Structural Engineering*, Vol. 125, No. 11, pp. 1299~1308.
 - (12) Zhu, Y., Qiu, J. and Tani, J., 2001, "Simultaneous Optimization of a Two-Link Flexible Robot Arm," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 18, No. 1, pp. 29~38.
 - (13) Bucher, I., 2002, "Parametric Optimization of Structures under Combined Base Motion Direct Forces and Static Loading," *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, Vol. 124, 132~140.
 - (14) Cardoso, J.B. and Arora, J.S., 1992, "Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Dynamic Response of Structural and Mechanical Systems," *Structural Optimization*, Vol. 4, No. 1, pp. 37~46.
 - (15) Kulkarni, M. and Noor, A.K., 1995, "Sensitivity Analysis of the Nonlinear Dynamic Viscoplastic Response of 2-D Structures with Respect to Material Parameters," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, No. 2, pp. 183~198.
 - (16) Uwe, S. and Pilkey, W.D., 1996, "Optimal Design of Structures under Impact Loading," *Shock and Vibration*, Vol. 3, No. 1, pp. 69~91.
 - (17) Sousa, L.G., Cardoso, J.B. and Valido, A.J., 1997, "Optimal Cross-Section and Configuration Design of Elastic-Plastic Structures Subject to Dynamic Cyclic Loading," *Structural Optimization*, Vol. 13, No. 2-3, pp. 112~118.
 - (18) Arora, J.S. and Dutta, A., 1997, "Explicit and Implicit Methods for Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Structures under Dynamic Loads," *Applied Mechanics Reviews, Transactions of the ASME*, Vol. 50, No. 11, part 2, pp. S11~S19.
 - (19) Choi, K.K. and Cho, S., Year. "Design Sensitivity Analysis and Optimization of Non-Linear Structural Dynamics Using Dyna3d." in *Seventh AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. St. Louis, MO, pp. 1071~1081.
 - (20) Kim, N.H. and Choi, K.K., 2001, "Design Sensitivity Analysis and Optimization of Nonlinear Transient Dynamics," *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 29, No. 3, pp. 351~371.
 - (21) Stupkiewicz, S., 2001, "Approximate Response Sensitivities for Nonlinear Problems in Explicit Dynamic Formulation," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 21, No. 4, pp. 283~291.
 - (22) Schmit, L.A., 1981, "Structural Synthesis - Its Genesis and Development," *AIAA Journal*, Vol. 19, No. 10, pp. 1249~1264.
 - (23) Vanderplaats, G.N., 1984, *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*, McGraw-Hill Book Company, NY.
 - (24) Arora, J.S., 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill Book Company, NY.
 - (25) Haftka, R.T. and Gurdal, Z., 1992, *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.
 - (26) Vanderplaats, G.N., 1999, "Structural Design Optimization Status and Direction," *Journal of Aircraft*, Vol. 36, No. 1, pp. 11~20.
 - (27) Vanderplaats, G.N., 1993, "30 Years of Modern Structural Optimization," *Advances in Engineering Software*, Vol. 16, No. 2, pp. 81~88.
 - (28) Parmee, I.C. and Hajela, P., 2002, *Optimization in Industry*, Springer-Verlag, London.
 - (29) Haug, E.J. and Arora, J.S., 1979, *Applied Optimal Design: Mechanical and Structural Systems*, Wiley-Interscience, New York.
 - (30) Kim, M.S. and Choi, D.H., 2001, "Direct Treatment of a Max-Value Cost Function in Parametric Optimization," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, No. 1, pp. 169~180.
 - (31) Rockafellar, R.T., 1973, "The Multiplier Method of Hestenes and Powell Applied to Convex Programming," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 12, No. 6, pp. 555~562.
 - (32) Arora, J.S., Chahande, A.I. and Paeng, J.K., 1991, "Multiplier Methods for Engineering Optimization," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, No. 7, pp. 1485~1525.
 - (33) Kocer, F.Y. and Arora, J.S., 2002, "Optimal Design of Latticed Towers Subjected to Earthquake Loading," *Journal of Structural Engineering*, Vol. 128, No. 2, pp. 197~204.
 - (34) Feng, T.T., Arora, J.S. and Haug, E.J., 1977, "Optimal Structural Design under Dynamic Loads," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, No. 1, pp. 39~52.
 - (35) Hsieh, C.C. and Arora, J.S., 1984, "Design Sensitivity Analysis and Optimization of Dynamic Response," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engi-*

- neering, Vol. 43, No. 2, pp. 195~219.
- (36) Khan, M.R., Thornton, W.A. and Willmert, K.D., 1978, "Optimality Criterion Techniques Applied to Mechanical Design," *Journal of Mechanical Design - Transactions of the ASME*, Vol. 100, No. 2, pp. 319~327.
- (37) Oral, S. and Ider, S.K., 1997, "Optimum Design of High-Speed Flexible Robotic Arms with Dynamic Behavior Constraints," *Computers & Structures*, Vol. 65, No. 2, pp. 255~259.
- (38) Grandhi, R.V., Haftka, R.T. and Watson, L.T., 1986, "Design-Oriented Identification of Critical Times in Transient Response," *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 4, pp. 649~656.
- (39) Grandhi, R.V., Haftka, R.T. and Watson, L.T., 1986, "Efficient Identification of Critical Stresses in Structures Subjected to Dynamic Loads," *Computers & Structures*, Vol. 22, No. 3, pp. 373~386.
- (40) Hsieh, C.C. and Arora, J.S., 1985, "A Hybrid Formulation for Treatment of Point-Wise State Variable Constraints in Dynamic Response Optimization," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 48, No. 2, pp. 171~189.
- (41) Hsieh, C.C. and Arora, J.S., 1985, "An Efficient Method for Dynamic Response Optimization," *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 9, pp. 1484~1486.
- (42) Kang, B. S., 2003, "On Optimality of the Solution Obtained by Equivalent Static Load Method and Its Application to Flexible Multibody Dynamic Systems," Ph.D. Thesis, Hanyang University, Korea.
- (43) Kang, B.S., Choi, W.S. and Park, G.J., 2001, "Structural Optimization under Equivalent Static Loads Transformed from Dynamic Loads Based on Displacement," *Computers & Structures*, Vol. 79, No. 2, pp. 145~154.
- (44) Kang, B.S. and Park, G.J., 2003, "Optimization of Flexible Multibody Dynamic Systems Using the Equivalent Static Load Method," *AIAA Journal*, Accepted.
- (45) Etman, L.F.P. and Van Campen, D.H., 1998, "Design Optimization of Multibody Systems by Sequential Approximation," *Multibody System Dynamics*, Vol. 2, No. 4, pp. 393~415.
- (46) Park, K.J., Lee, J.N. and Park, G.J., 2003, "Structural Shape Optimization under Static Loads Transformed Form Dynamic Loads," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 27, No. 8, pp. 1363~1370.
- (47) Lim, O.K. and Arora, J.S., 1987, "Dynamic Response Optimization Using an Active Set Rqp Algorithm," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, No. 10, pp. 1827~1842.
- (48) Paeng, J.K. and Arora, J.S., 1989, "Dynamic Response Optimization of Mechanical Systemes with Multiplier Methods," *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Transactions of the ASME*, Vol. 111, No. 1, pp. 73~80.
- (49) Chahande, A.I. and Arora, J.S., 1993, "Development of a Multiplier Method for Dynamic Response Optimization Problems," *Structural Optimization*, Vol. 6, No. 2, pp. 69~78.
- (50) Chahande, A.I. and Arora, J.S., 1994, "Optimization of Large Structures Subjected to Dynamic Loads with Time Multiplier Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 3, pp. 413~430.
- (51) Kim, M.S. and Choi, D.H., 1997, "Multibody Dynamic Response Optimization with Alm and Approximation Line Search," *Multibody System Dynamics*, Vol. 1, No. 1, pp. 47~64.
- (52) Silva, M.A., Arora, J.S., Swan, C.C. and Rmlrf, B., 2002, "Optimization of Elevated Concrete Foundations for Vibrating Machines," *Journal of Structural Engineering*, Vol. 128, No. 11, pp. 1470~1479.
- (53) Park, H.S. and Kwon, J.H., 2003, "Optimal Drift Design Model for Multi-Story Buildings Subjected to Dynamic Lateral Forces," *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, Vol. 12, No. 4, pp. 317~333.
- (54) Kim, M.S. and Choi, D.H., 2000, "A New Penalty Parameter Update Rule in the Augmented Lagrange Multiplier Method for Dynamic Response Optimization," *KSME International Journal*, Vol. 14, No. 10, pp. 1122~1130.
- (55) Haftka, R.T. and Adelman, H.M., 1989, "Recent Developments in Structural Sensitivity Analysis," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 1, No. 3, pp. 137~151.
- (56) Haug, E.J., Choi, K.K., and Komkov, V., 1986, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press, Inc., Orlando.
- (57) Adelman, H.M. and Haftka, R.T., 1986, "Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems," *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 5, pp. 823~832.
- (58) Hsieh, C.C. and Arora, J.S., 1985, "Structural Design Sensitivity Analysis with General Boundary Conditions-Dynamic Problem," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, No. 2, pp. 267~283.
- (59) Anderson, K.S. and Hsu, Y.H., 2002, "Analytical Fully-Recursive Sensitivity Analysis for Multibody Dynamic Chain Systems," *Multibody System Dynamics*, Vol. 8, No. 1, pp. 1~27.
- (60) Greene, W.H. and Haftka, R.T., 1991, "Computational Aspects of Sensitivity Calculations in Linear Transient Structural Analysis," *Structural Optimization*, Vol. 3, No. 3, pp. 176~201.
- (61) Sun, T.-C., 1996, "Design Sensitivity Analysis and Optimization of Nonlinear Dynamic Response for a Motorcycle Driving on a Half-Sine Bump Road," *Structural Optimization*, Vol. 11, No. 2, pp. 113~119.
- (62) Bathe, K.-J., 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall Inc., NJ.
- (63) Cook, R.D., Malkus, D.S. and Plesha, M.E., 1989, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., NY.
- (64) Yamakawa, H., 1984, "Optimum Structural Designs for Dynamic Response," in *New Directions in Optimum Structural Design*, E. Atrek, R.H. Gallagher, K.M. Ragsdell, and O.C. Zienkiewicz, John Wiley & Sons, Ltd., pp. 249~266.

- (65) Wang, S. and Choi, K.K., 1992, "Continuum Design Sensitivity of Transient Response Using Ritz and Mde Acceleration Method," *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 4, pp. 1099~1109.
- (66) Dias, J.M.P. and Pereira, M.S., 1997, "Sensitivity Analysis of Rigid-Flexible Multibody Systems," *Multibody System Dynamics*, Vol. 1, No. 3, pp. 303~322.
- (67) Fox, R.L. and Kapoor, M.P., 1968, "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors," *AIAA Journal*, Vol. 6, 2426~2429.
- (68) Nelson, R.B., 1976, "Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives," *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 9, pp. 1201~1205.
- (69) Choi, K.K., Haug, E.J. and Seong, H.G., 1983, "An Iterative Method for Finite Dimensional Structural Optimization Problems with Repeated Eigenvalues," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, No. 1, pp. 93~112.
- (70) Ojalvo, I.U., 1988, "Efficient Computation of Modal Sensitivities for Systems with Repeated Frequencies," *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 3, pp. 361~366.
- (71) Wang, B.P., 1991, "Improved Approximate Methods for Computing Eigenvector Derivatives in Structural Dynamics," *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 6, pp. 1018~1020.
- (72) Lee, T.H., 1999, "An Adjoint Variable Method for Structural Design Sensitivity Analysis of a Distinct Eigenvalue Problem," *KSME International Journal*, Vol. 13, No. 6, pp. 470~479.
- (73) Moore, G.J., 1994, *Msc/Nastran Design Sensitivity and Optimization*, The MacNeal-Schwendler Corporation, CA.
- (74) Kang, B.S., Kim, J.S. and Park, G.J., 2004, "An Investigation of Dynamic Characteristics of Structures in Optimization," in *KSME Annual Spring Meeting*, pp. 1011~1016.
- (75) Dutta, A. and Ramakrishnan, C.V., 1998, "Accurate Computation of Design Sensitivities for Structures under Transient Dynamic Loads with Constraints on Stress," *Computers & Structures*, Vol. 66, No. 4, pp. 463~472.
- (76) Dutta, A. and Ramakrishnan, C.V., 1998, "Accurate Computation of Design Sensitivities for Structures under Transient Dynamic Loads Using Time Marching Scheme," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 41, No. 6, pp. 977~999.
- (77) Dutta, A. and Ramakrishnan, C.V., 2000, "Accurate Computation of Design Derivatives for Plates and Shells under Transient Dynamic Loads," *Engineering Computation*, Vol. 17, No. 1, pp. 7~27.
- (78) Paul, A.C., Dutta, A. and Ramakrishnan, C.V., 1996, "Accurate Computation of Design Sensitivities for Dynamically Loaded Structures with Displacement Constraints," *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 8, pp. 1670~1677.
- (79) Arora, J.S. and Haug, E.J., 1979, "Methods of Design Sensitivity Analysis in Structural Optimization," *AIAA Journal*, Vol. 17, No. 9, pp. 970~974.
- (80) Arora, J.S. and Cardoso, J.E.B., 1989, "A Design Sensitivity Analysis Principle and Its Implementation into Adina," *Computers & Structures*, Vol. 32, No. 3/4, pp. 691~705.
- (81) Tsay, J.J. and Arora, J.S., 1990, "Nonlinear Structural Design Sensitivity Analysis for Path Dependent Problems .Part 1: General Theory," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 81, No. 2, pp. 183~208.
- (82) Tortorelli, D.A., Lu, S.C.Y. and Haber, R.B., 1990, "Design Sensitivity Analysis for Elastodynamic Systems," *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 18, No. 1, pp. 77~106.
- (83) Tortorelli, D.A., Lu, S.C.Y. and Haber, R.B., 1991, "Adjoint Sensitivity Analysis for Nonlinear Dynamic Thermoelastic Systems," *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 2, pp. 253~263.
- (84) Arora, J.S. and Cardoso, J.B., 1992, "Variational Principle for Shape Design Sensitivity Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 2, pp. 538~547.
- (85) Hsieh, C.C. and Arora, J.S., 1986, "Algorithms for Point-Wise State Variable Constraints in Structural Optimization," *Computers & Structures*, Vol. 22, No. 3, pp. 225~238.
- (86) Argyris, J.H. and Scharpf, D.W., 1969, "Finite Element in Time and Space," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 10, No. 4, pp. 456~464.
- (87) Fung, T.C., Fan, S.C. and Sheng, G., 1998, "Mixed Time Finite Elements for Vibration Response Analysis," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 213, No. 3, pp. 409~428.
- (88) Suk, J. and Kim, Y., 1998, "Slew Maneuver of Flexible Space Structures Using Time Finite Element Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 10, pp. 1938~1940.
- (89) Kapania, R.K. and Park, S., 1996, "Nonlinear Transient Response and Its Sensitivity Using Finite Elements in Time," *Computational Mechanics*, Vol. 17, No. 5, pp. 306~317.
- (90) Park, S., Kapania, R.K. and Kim, S.J., 1999, "Nonlinear Transient Response and Second-Order Sensitivity Using Time Finite Element Method," *AIAA Journal*, Vol. 37, No. 5, pp. 613~622.
- (91) Park, S. and Kapania, R.K., 1998, "Comparison of Various Orthogonal Polynomials in Hp-Version Time Finite Element Method," *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 4, pp. 651~655.
- (92) Gu, Y.X., Chen, B.S., Zhang, H.W. and Grandhi, R.V., 2002, "A Sensitivity Analysis Method for Linear and Nonlinear Transient Heat Conduction with Precise Time Integration," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 24, No. 1, pp. 23~37.
- (93) Chen, B.S., Gu, Y.X., Zhang, H.W. and Zhao, G.Z., 2003, "Structural Design Optimization on Thermally Induced Vibration," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 58, No. 8, pp. 1187~1212.
- (94) Zhong, W.X. and Williams, F.W., 1994, "A Precise Time Step Integration Method," *Mechanical Engineering Science, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 216, Pt 3, pp. 1~10.

- cal Engineers. Part C, Vol. 208, No. 6, pp. 427~430.
- (95) Lin, J.H., Chen, W.P. and Williams, F.W., 1995, "A High Precision Direct Integration Scheme for Structures Subjected to Transient Dynamic Loading," *Computers & Structures*, Vol. 56, No. 1, pp. 113~120.
- (96) Gu, Y.X., Chen, B.S., Zhang, H.W. and Guan, Z.Q., 2001, "Precise Time-Integration Method with Dimensional Expanding for Structural Dynamic Equations," *AIAA Journal*, Vol. 39, No. 12, pp. 2394~2399.
- (97) Wang, B.P. and Lu, C.M., Year. "A New Method for Transient Response Sensitivity Analysis in Structural Dynamics." in *1st Pacific International Conference*. Tainan, Taiwan, pp. 1298~1305.
- (98) Barthelemy, J.F.M. and Haftka, R.T., 1993, "Approximation Concepts for Optimum Structural Design - a Review," *Structural Optimization*, Vol. 5, No. 3, pp. 129~144.
- (99) Myers, R.H. and Montgomery, D.C., 1995, *Response Surface Methodology*, John Wiley & Sons, Inc., NY.
- (100) Kurtaran, H. and Eskandarian, A., 2001, "Design Optimization of Multi-Body Systems under Impact Loading by Response Surface Methodology," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part K - Journal of Multi-body Dynamics*, Vol. 215, No. 4, pp. 173~185.
- (101) Kurtaran, H., Eskandarian, A., Marzougui, D. and Bedewi, N.E., 2002, "Crashworthiness Design Optimization Using Successive Response Surface Approximations," *Computational Mechanics*, Vol. 29, No. 4-5, pp. 409~421.
- (102) Marklund, P.O. and Nilsson, L., 2001, "Optimization of a Car Body Component Subjected to Side Impact," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 21, No. 5, pp. 383~392.
- (103) Stander, N. and Craig, K.J., 2002, "On the Robustness of a Simple Domain Reduction Scheme for Simulation-Based Optimization," *Engineering Computation*, Vol. 19, No. 4, pp. 431~450.
- (104) Craig, K.J., Stander, N. and Balasubramanyam, S., 2003, "Worst-Case Design in Head Impact Carshworthiness Optimization," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 57, No. 6, pp. 795~817.
- (105) Oblak, M.M., Lesnika, A.S. and Butinar, B.J., 2002, "Optimum Design of Stochastically Excited Non-Linear Dynamic Systems without Geometric Constraints," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, No. 11, pp. 2429~2443.
- (106) Kegl, M.S. and Oblak, M.M., 1997, "Optimization of Mechanical Systems: On Non-Linear First-Order Approximation with an Additive Convex Term," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, No. 1, pp. 13~20.
- (107) Jensen, H.A., 2001, "Structural Optimal Design of Systems with Imprecise Properties: A Possibilistic Approach," *Advances in Engineering Software*, Vol. 32, No. 12, pp. 937~948.
- (108) Salajegheh, E. and Salajegheh, J., 2002, "Optimum Design of Structures with Discrete Variables Using Higher Order Approximation," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, No. 13/14, pp. 1395~1419.
- (109) Vanderplaats, G.N. and Thomas, H.L., 1993, "An Improved Approximation for Stress Constraints in Plate Structures," *Structural Optimization*, Vol. 6, No. 1, pp. 1~6.
- (110) Vanderplaats, G.N. and Salajegheh, E., 1989, "New Approximation Method for Stress Constraints in Structural Synthesis," *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 3, pp. 352~358.
- (111) Sepulveda, A.E. and Thomas, H.L., 1996, "Improved Transient Response Approximation for General Damped Systems," *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 6, pp. 1261~1269.
- (112) Iwan, W.D. and Jensen, H.A., 1993, "On the Dynamic Response of Continuous Systems Including Model Uncertainty," *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, Vol. 60, No. 2, pp. 484~490.
- (113) Canfield, R.A., 1990, "High Quality Approximations of Eigenvalues in Structural Optimizations of Trusses," *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 6, pp. 1116~1122.
- (114) Atkas, A. and Moses, F., 1998, "Reduced Basis Eigenvalue Solutions for Damaged Structures," *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 26, No. 1, pp. 63~79.
- (115) Chen, S.H., Yang, X.W. and Lian, H.D., 2000, "Comparison of Several Eigenvalue Reanalysis Methods for Modified Structures," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 20, No. 4, pp. 253~259.
- (116) Kirsch, U., 2003, "Approximate Vibration Reanalysis of Structures," *AIAA Journal*, Vol. 41, No. 3, pp. 504~511.
- (117) Kirsch, U., 2003, "Design-Oriented Analysis of Structures-Unified Approach," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 129, No. 3, pp. 264~272.
- (118) Sepulveda, A.E. and Thomas, H.L., 1995, "New Approximation for Steady-State Response of General Damped Systems," *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 6, pp. 1127~1133.
- (119) Jensen, H.A. and Sepulveda, A.E., 1998, "Design Sensitivity Metric for Structural Dynamic Response," *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 9, pp. 1686~693.
- (120) VR&D, 2004, "GENESIS Design Manual", VR&D, CO.
- (121) VR&D, 2004, "VisualDOC 4.0 Theoretical Manual", VR&D, CO.
- (122) Leiva, J.P., Watson, B.C., Kosaka, I. and Vanderplaats, G.N., Year. "Dynamic Finite Element Analysis and Optimization in Genesis." in *9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. Atlanta, Georgia
- (123) Choi, W.S. and Park, G.J., 2002, "Structural Optimization Using Equivalent Static Loads at All Time Intervals," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, No. 19/20, pp. 2077~2094.
- (124) Park, G.J. and Kang, B.S., 2003, "Validation of a Structural Optimization Algorithm Transforming Dy-

- dynamic Loads into Equivalent Static Loads," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 118, No. 1, pp. 191~200.
- (125) Park, G.J., 2006, *Analytical Methods for Design Practice*, Springer-Verlag, Germany (to be published)
- (126) Shabana, A.A., 1998, *Dynamics of Multibody Systems*, Cambridge University, Cambridge.
- (127) Lowen, G.G. and Chassapis, C., 1986, "The Elastic Behavior of Linkage: An Update," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 21, No. 1, pp. 33~42.
- (128) Thomson, B.S. and Sung, C.K., 1986, "A Survey of Finite Element Techniques for Mechanism Design," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 21, No. 4, pp. 351~359.
- (129) Haug, E.J., 1989, *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems*. Allyn and Bacon, MA.
- (130) Erdman, A.G., Sandor, G.N. and Oakberg, R.G., 1972, "A General Method for Kineto-Elastodynamic Analysis and Synthesis of Mechanisms," *Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME*, Vol. 94, No. 4, pp. 1193~1205.
- (131) Imam, I. and Sandor, G.N., 1973, "A General Method of Kineto-Elastodynamic Design of High Speed Mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 8, No. 4, pp. 497~516.
- (132) Imam, I. and Sandor, G.N., 1975, "High-Speed Mechanism Design - a General Analytical Approach," *Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME*, Vol. 97, No. 4, pp. 609~628.
- (133) Thornton, W.A., Willmert, K.D. and Khan, M.R., 1979, "Mechanism Optimization Via Optimality Criterion Techniques," *Journal of Mechanical Design - Transactions of the ASME*, Vol. 101, No. 3, pp. 392~397.
- (134) Cleghorn, W.L., Fenton, R.G. and Tabarrok, B., 1981, "Optimum Design of High Speed Flexible Mechanisms," *Mechanisms and Machine Theory*, Vol. 16, No. 4, pp. 399~406.
- (135) Zhang, C. and Grandin, H.T., 1983, "Optimum Design of Flexible Mechanisms," *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Transactions of the ASME*, Vol. 105, No. 2, pp. 267~272.
- (136) Zhang, X., Shen, Y., Liu, H. and Cao, W., 1995, "Optimal Design of Flexible Mechanisms with Frequency Constraints," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 30, No. 1, pp. 131~139.
- (137) Yu, Y.Q. and Smith, M.R., 1996, "The Effect of Cross-Sectional Parameters on the Dynamics of Elastic Mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 31, No. 7, pp. 947~958.
- (138) Min, S., Kikuchi, N., Park, Y.C., Kim, S. and Chang, S., 1999, "Optimal Topology Design of Structures under Dynamic Loads," *Structural Optimization*, Vol. 17, No. 2/3, pp. 208~218.
- (139) Tcherniak, D., 2002, "Topology Optimization of Resonating Structures Using Simp Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54, No. 11, pp. 1605~1622.
- (140) Dobson, B.J. and Rider, E., 1990, "A Review of the Indirect Calculation of Excitation Forces from Measured Structural Response Data," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part C - Mechanical Engineering Science*, Vol. 204, No. 2, pp. 69~75.
- (141) D'cruz, J., Crisp, J.D.C. and Ryall, T.G., 1992, "On the Identification of Harmonic Force on a Viscoelastic Plate from Response Data," *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, Vol. 59, No. 4, pp. 722~729.
- (142) Moller, P.W., 1999, "Load Identification through Structural Modification," *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, Vol. 66, No. 1, pp. 236~241.
- (143) Wang, B.T., 2002, "Prediction of Impact and Harmonic Forces Acting on Arbitrary Structures: Theoretical Formulation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 16, No. 6, pp. 935~953.
- (144) Zhu, X.Q. and Law, S.S., 2003, "Time Domain Identification of Moving Loads on Bridge Deck," *Journal Of Vibration and Acoustics - Transactions of the ASME*, Vol. 125, No. 2, pp. 187~198.
- (145) Sehlstedt, N., 2003, "A Well-Conditioned Technique for Solving the Inverse Problem of Boundary Traction Estimation for a Constrained Vibrating Structure," *Computational Mechanics*, Vol. 30, No. 3, pp. 247~258.