

모멘트 방법을 사용한 PCB 기판의 유전율 환산

Conversion of Permittivity of PCB Substrate Using Moment Method

정 지 현*** · 조 유 선*** · 김 세 윤**

Ji-Hyun Jung*** · Yu-Sun Jo*** · Se-Yun Kim**

요 약

광대역에서 PCB 기판의 유전율은 개방 단말 동축선 프로브로 측정된 반사계수를 모멘트 방법에 적용하여 얻을 수 있다. 본 논문에서는 유전율과 반사계수의 관계를 적분식으로 나타내었고, 적분식에 사용되는 서로 다른 두께를 갖는 PCB 기판의 반사계수를 분산 FDTD로 수치 계산하였다. 적분식을 모멘트 방법을 사용하여 해석한 결과 PCB기판의 유전율은 최대 2.015 %의 오차 범위 안에서 환산됨을 알 수 있었다.

Abstract

The permittivity profile of PCB substrate in a wide bandwidth is obtained by applying the moment method to the reflection coefficients measured by an open-ended coaxial probe. In this paper, the relation between a reflection coefficients and the corresponding permittivity is expressed into an integral form and the reflection coefficient of PCB substrates with different thickness are calculated using the dispersive FDTD method. The simulation results assure the validity of our conversion procedure within 2.015 % error.

Key words : Permittivity, PCB Substrate, Moment Method, FDTD

I. 서 론

매질의 전기적 특성을 나타내는 유전율은 개방 단말 동축선 프로브 방법을 이용하여 계산할 수 있다^[1]. 개방 단말 동축선 프로브 방법은 넓은 주파수 대역에서 유전율 계산이 가능하고, 측정 매질을 가공하지 않고 유전율을 계산할 수 있지만, 측정 하려는 시료의 두께가 일정한 두께 이상이 되어야 하므로, PCB 기판과 같이 시료의 두께가 얇은 경우에는 기존의 환산기법^{[2]~[5]}을 적용하기 어렵다.

본 논문에서 PCB 기판과 같이 박막의 무손실 유전체이며 유전체 뒷면이 완전 도체로 되어 있는 매질의 유전율을 개방 단말 동축선 프로브 방법을 사용하여 환산하였다.

PCB 기판 영역은 영상 전하로 등가화 하여 무한

공간의 그린(Green) 함수로 해석하였고, 프로브 영역은 모드(mode) 해석을 하였다. 프로브와 PCB 기판의 경계면에 경계조건을 적용하여 반사계수와 유전율과의 관계를 나타내는 적분식을 구하였다. 유전율 환산에 사용되는 PCB 기판의 반사계수를 분산 FDTD 수치 해석을 통해 계산하였고, 적분식을 모멘트 방법을 이용하여 해석하였다.

유전율 환산 결과를 FDTD 수치 해석에 사용된 유전율과 비교하여 환산 모델의 정확도를 검증하였다.

II. 개방 단말 동축선 프로브의 모드해석

본 논문에서 PCB 유전체의 유전율을 환산하는데 사용한 개방 단말 동축선 프로브는 그림 1에서처럼 끝이 개방된 동축선 단말에 반경 $r=1.2\text{ cm}$ 의 유한한

*고려대학교 전파공학과(Department of Radio Science & Engineering, Korea University)

**한국과학기술연구원 영상미디어연구센터(Imaging and Media Research Center, Korean Institute of Science and Technology)

· 논 문 번 호 : 20041105-198

· 수정완료일자 : 2004년 12월 13일

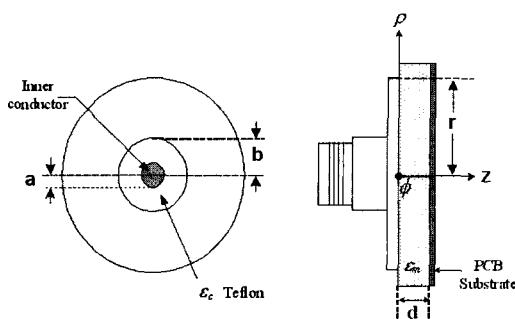
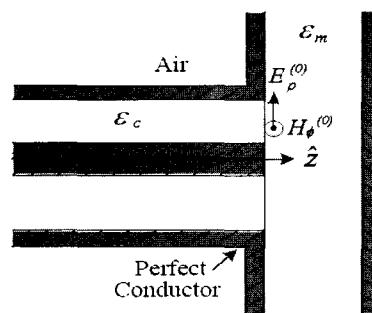


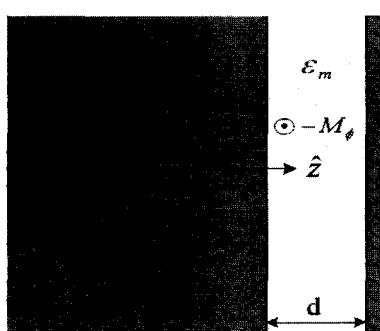
그림 1. 개방 단말 동축선 프로브의 구조
Fig. 1. Geometry of open-ended coaxial probe.

크기의 접지판이 부착된 구조로 내심의 반경 $a=0.635$ mm, 외심의 반경 $b=2.04$ mm이며, 그 사이는 상대 유전율 $\epsilon_c=2.075$ 인 테프론으로 채워져 있다.

하지만 정확한 모드 해석을 위해서, 프로브 단말의 접지판은 완전도체로 그 크기가 무한하고, 프로브 끝에 접촉되는 PCB 기판은 두께가 d 로 유한하며, 상대 유전율 ϵ_m 인 무손실 매질로 가정하였다. 또한



(a) 프로브 종단면의 전계와 자계
(a) Electric and magnetic fields at the end of probe



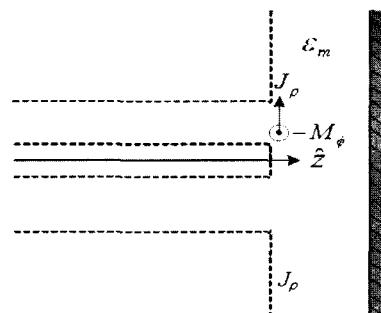
(c) 프로브 종단면의 등가 자기 전류
(c) Equivalent magnetic current at the end of probe

프로브와 측정 매질은 ϕ 방향으로 구조적인 변화가 없으므로 전계와 자계 또한 ϕ 방향에 대한 변화가 없다. 따라서 3차원의 구조를 2차원의 구조로 줄여서 해석하였다.

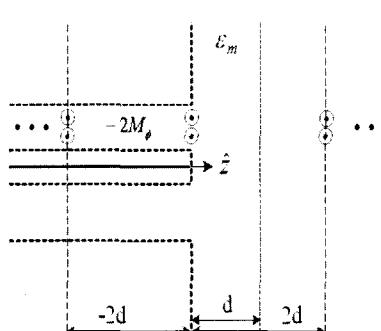
동축선의 좌측에서 인가되는 입사파는 TEM 모드라고 가정하고, 동축선 외부로 투과되는 전자파와 동축선 내부의 전자파로 나누어 살펴보았다.

먼저 동축선 외부인 PCB 기판으로 투과되는 전자파에 대해 살펴보면 다음과 같다. PCB 기판으로 투과된 전자파는 그림 2(a)와 같이 프로브 종단면인 $z=0$ 에서 접선 성분의 전계 $E_\rho^{(0)}$ 와 자계 $H_\phi^{(0)}$ 로부터 구할 수 있다.

이를 등가전원으로 표시하면 그림 2(b)와 같이 등가전기전류 J_ρ ($J_\rho \hat{\rho} = \hat{z} \times H_\phi^{(0)} \hat{\phi}$)와 등가자기전류 M_ϕ ($M_\phi \hat{\phi} = -\hat{z} \times E_\rho^{(0)} \hat{\rho}$)의 합으로 나타낼 수 있다. 그런데 프로브 측을 완전 도체로 채우면 등가 전원은 그림 2(c)에 나타난 것과 같이 동축선 끝단에 유기된 등



(b) 프로브 종단면의 등가전원
(b) Equivalent sources at the end of probe



(d) 등가 영상 전류의 분포
(d) Distribution of equivalent image currents

그림 2. 등가 영상 전하 분포
Fig. 2. Distribution of equivalent image currents.

가자기전류 M_ϕ 로 표현할 수 있다. 거리 d 에 위치한 PCB 기판의 도체판에 의해 프로브 쪽으로 반사되는 전자파는 영상법을 적용하면, 거리 $\pm 2d$, $\pm 4d \dots$, 인 곳의 무한개의 등가자기전류 M_ϕ 로 등가화 할 수 있다. 따라서 그림 2(d)와 같은 등가자기전류 분포에 대해 무한 공간의 그린(Green) 함수를 적용하여 PCB 기판 내의 전자파를 해석하였다.

다음으로 동축선 내부의 전자파에 대하여 살펴보면 다음과 같다. 동축선 내부에 인가된 전자파는 프로브와 PCB 기판의 경계면에서 일부는 반사되어 전원 측으로 되돌아가고, 일부는 PCB 유전체 속으로 투과하게 된다. 이때 경계면의 불연속에 의해 TEM 모드 이외에 고차 모드도 생성되게 된다. 따라서 동축선 내부의 전자파는 입사파와 경계면에서 생성되는 반사파인 TEM 모드와 고차 모드의 합으로 나타낼 수 있다.

동축선 종단면인 $z=0$ 에 경계조건을 적용하여 동축선 내부와 외부의 차계를 정리하면 다음과 같은 적분식을 구할 수 있다^[4].

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi\rho} - w\epsilon_0\epsilon_c \sum_{n=0}^N \frac{f_n(\rho)}{N^2\beta_n} \int_a^\rho E_\rho^{(0)}(\rho') f_n(\rho') \rho' d\rho' \\ = \frac{jw\epsilon_0\epsilon_m}{\pi} \left[\int_a^\rho \int_0^\pi E_\rho^{(0)}(\rho') \frac{e^{-jk_n r}}{r} \rho' \cos\phi' d\phi' d\rho' \right. \\ \left. + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_a^\rho \int_0^\pi E_\rho^{(0)}(\rho') \frac{e^{-jk_n r}}{r_l} \rho' \cos\phi' d\phi' d\rho' \right] \quad (1) \end{aligned}$$

여기서, $E_\rho^{(0)}$ 는 프로브와 PCB 경계면에 유기되는 전계이고, $f_n(\rho)$ 는 TM_{0n} 모드의 고유함수이며, β_n 은 TM_{0n} 모드의 감쇠상수, N_n^2 은 TM_{0n} 모드의 정규화 계수로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f_n(\rho) = [J_1(\gamma_n\rho)Y_0(\gamma_n a) - Y_1(\gamma_n\rho)J_0(\gamma_n a)] \quad (2a)$$

$$N_n^2 = \frac{2}{\pi^2\gamma_n^2} \left[\frac{J_0^2(\gamma_n a)}{J_0^2(\gamma_n b)} - 1 \right] \quad (2b)$$

$$\beta_n = -j\sqrt{\gamma_n^2 - k_c^2} \quad (2c)$$

식 (1)로부터 동축선 종단면에서의 전계 $E_\rho^{(0)}$ 를 알면 PCB 기판의 유전율 ϵ_m 를 구할 수 있음을 알 수 있다. 하지만 동축선 종단면에서 실제로 측정되는 값은 입력 어드미턴스나 반사계수이므로 식 (1)

을 입력 어드미턴스에 관한 식으로 바꾸어 보면 다음과 같다.

$$y_{im} = \frac{1 - \Gamma_m}{1 + \Gamma_m} = \frac{2}{\int_a^\rho E_\rho^{(0)}(\rho') d\rho'} - \frac{2\pi}{\left[\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_c} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]} \quad (3)$$

III. FDTD 수치계산에 의한 반사계수

실제 측정에 사용되는 PCB 기판의 유전율을 정확하게 알 수 없기 때문에, 본 논문에서는 환산과정의 정확도를 검증하기 위해 분산 FDTD 기법^[5]을 사용하여 PCB 기판의 반사계수를 수치계산 하였다.

FDTD 수치 해석 과정에서 PCB 기판의 유전율을 3.2로 두었고, 3개의 서로 다른 두께를 갖는 PCB 기판의 반사계수를 계산하였다. 그림 3은 수치 계산을 위한 개방 단말 동축선 프로브의 단면도로서 정확하고 안정된 모의계산을 위해서 cell의 크기와 시간 간격은 $\Delta\rho = \Delta z = 0.0336$ mm, $\Delta t = 5.605$ ps로 하였다. 그리고 cell 가장자리는 Mur의 1차 흡수 경계 조건을 사용하였고, $\rho = 0$ 인 지점에서의 특이성(singularity)은 외삽법을 적용하여 해석하였다.

시간영역에서 입사전압 $v_{im}(t)$ 과 반사전압 $v_{ref}(t)$ 을 구한 뒤에, FFT(fast fourier transform)을 취하여 두 값의 비를 취하면, 주파수 영역에서 반사계수의 크기

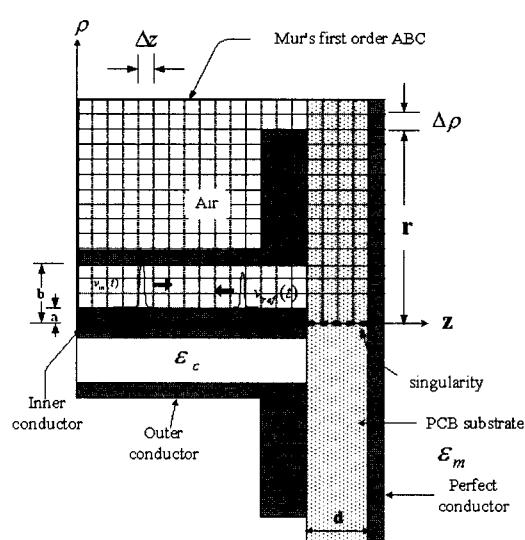


그림 3. PCB 기판의 FDTD 계산 영역

Fig. 3. FDTD calculation region of PCB substrate.

$|\Gamma_m|$ 와 위상 ϕ_{Γ_m} 을 구할 수 있다.

IV. 모멘트 방법을 이용한 유전율 환산

앞에서 구한 식 (1)의 적분식과 분산 FDTD 수치 해석으로부터 구한 반사계수를 바탕으로 모멘트 방법을 이용하여 PCB 기판의 유전율을 환산할 수 있다. 먼저 식 (1)을 모멘트 방법으로 풀기 위하여 다음과 같은 형태로 변형할 수 있다.

$$\int_a^b E_\rho^{(0)}(\rho') \kappa(\rho, \rho') d\rho' = \frac{1}{jw\rho} \quad (4)$$

여기서, $k(\rho, \rho')$ 는 무한개의 고차 모드와, PCB 도체판에 의해 반사된 전자파를 영상 전원으로 등가화한 항들의 합으로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \kappa(\rho, \rho') &= \rho' \epsilon_0 \epsilon_m \int_a^b \frac{\cos \phi' e^{-jk_m r}}{r} d\phi' + \sum_{\substack{l=-L \\ (l \neq 0)}}^L \frac{\cos \phi' e^{-jk_m r}}{r_l} d\phi' \\ &- j\pi \rho' \epsilon_0 \epsilon_c \sum_{n=0}^N \frac{f_n(\rho) f_n(\rho')}{N_n^2 \beta_n} \end{aligned} \quad (5)$$

특히 식 (5)에서 우변의 첫 번째 적분식의 경우 계산 과정에서 특이현상이 나타나므로 이를 고려하여 계산해야 하며^[4], 무한개의 등가전원은 수렴하는 값을 구하여 사용하였다. 식 (4)의 적분식을 행렬식으로 만들기 위하여 동축선 내심길이인 a 와 외심까지의 길이인 b 사이에서 N 개의 ρ ($a \leq \rho \leq b$)를 선정하였고, 모멘트 방법을 이용하여 동축선 단면의 전계 $E_\rho^{(0)}$ 를 다음과 같이 급수형태로 표현하였다.

$$E_\rho^{(0)}(\rho') = \sum_{n=1}^N a_n p_n(\bar{\rho}) \quad (6)$$

여기서, a_n 은 수치계산을 통해서 구해야 하는 계수이고, $p_n(\bar{\rho})$ 는 펠스기저함수로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P_n(\bar{\rho}) = \begin{cases} 1, & \text{for } \frac{n-1}{N} < \frac{\bar{\rho}-a}{b-a} < \frac{n}{N} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

모멘트 방법을 이용하여 PCB 기판의 유전율을 구하는 방법은 다음과 같다. PCB 기판의 유전율 초기 값을 $\epsilon_m^{(1)}$ 로 가정한다. $\epsilon_m^{(1)}$ 을 식 (4)에 대입하여 전

계 $E_\rho^{(0)}$ 를 구한 뒤에, 식 (4)로부터 구한 전계를 식 (3)에 대입하여 입력 어드미턴스 $Y_{in}^{(1)}$ 를 계산할 수 있다. 계산된 입력 어드미턴스 $Y_{in}^{(1)}$ 와 FDTD 수치계산으로부터 구한 입력 어드미턴스 Y_m 값의 차를 식 (8)로부터 구한 뒤에 주어진 오차 범위와 비교한다.

$$F(\epsilon_m) = Y_{in}^{(n)} - Y_m \quad (8)$$

식 (8)의 $F(\epsilon_m)$ 가 주어진 오차 범위보다 크게 되면 PCB 기판의 유전율은 다음 값인 $\epsilon_m^{(2)}$ 로 간주하여 위의 계산을 반복하게 된다. 위의 반복 계산은 Muller의 방법^[6]을 사용하며, $F(\epsilon_m)$ 값이 주어진 오차 범위보다 작은 값을 가질 때까지 반복한다. 오차 범위가 주어진 값보다 작은 경우에 $Y_{in}^{(n)}$ 계산에 사용된 유전율 $\epsilon_m^{(n)}$ 이 PCB 기판의 유전율이 된다.

V. 복소 유전율 환산 결과

본 논문에서 분산 FDTD를 사용한 PCB 기판의 반사계수 수치계산에 사용된 PCB 기판의 두께는 0.1344 mm, 1.68 mm, 3.696 mm이다.

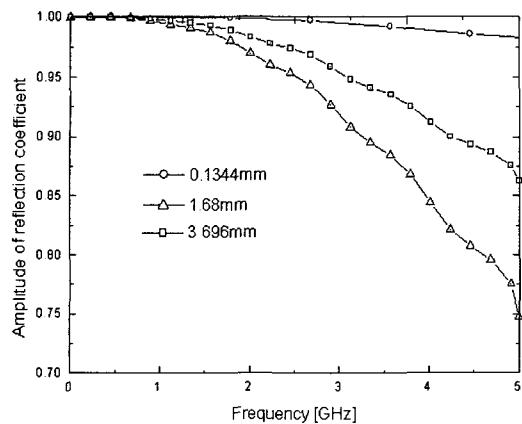
반사계수는 주파수 범위 0~5 GHz에서 계산하였고, 계산된 반사계수의 크기 및 위상은 각각 그림 4(a) 및 (b)와 같다. 주파수가 증가할수록 반사계수의 크기가 줄어들며, 이는 기판으로의 복사가 증가함을 나타낸다.

그림 4에서 수치 계산된 반사계수를 바탕으로 모멘트 방법을 이용하여 유전율을 환산하였고, 환산된

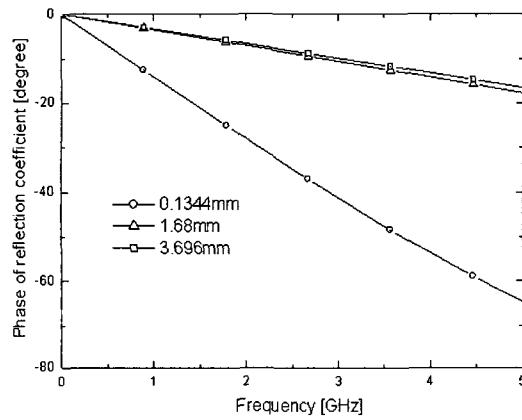
표 1. 유전율 환산 결과

Table 1. Conversion result of permittivity.

두께 [mm]	유전율	주파수 [GHz]			
		1.784	2.676	3.568	4.460
0.1344	ϵ_m	3.1626	3.1556	3.1489	3.1355
	Error [%]	1.165	1.039	1.596	2.015
1.68	ϵ_m	3.1674	3.1674	3.165	3.156
	Error [%]	1.017	1.018	1.092	1.362
3.696	ϵ_m	3.1633	3.1678	3.1674	3.1624
	Error [%]	1.144	1.003	1.016	1.174



(a) 크기
(a) Amplitude



(b) 위상
(b) Phase

그림 4. FDTD로 계산된 서로 다른 두께를 갖는 PCB 기판의 반사계수

Fig. 4. Calculated reflection coefficients of PCB substrates with different thickness using FDTD.

결과를 그림 5와 표 1에 나타내었다.

대체로 두께가 줄어들수록 오차가 약간 증가하는 경향을 보이며, 주파수가 증가할수록 오차는 조금 커짐을 알 수 있다.

이때 오차는 연속적인 값을 갖는 프로브 종단면의 접선성분 전계인 $E_p^{(0)}$ 를 모멘트 방법을 적용하여 구할 때 유한개의 펄스 기저함수의 합으로 나타내고, 이를 행렬 역변환하면서 발생한 것으로 보인다. 또한 반사계수를 FDTD 기법을 써서 구하는 과정에서도 아주 작지만 수치 계산상의 오차가 생겨서 발생한 결과로 보인다.

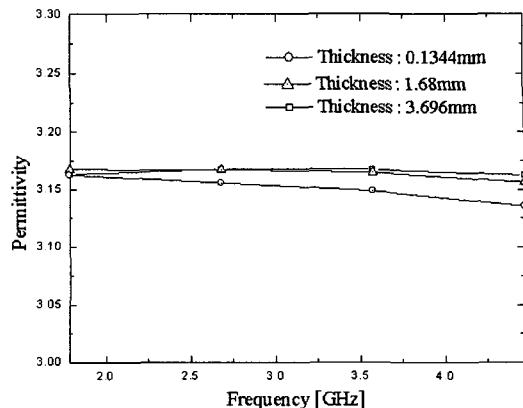


그림 5. 환산된 유전율 분포 결과

Fig. 5. Results of converted permittivity profiles.

VI. 결 론

본 논문에서는 PCB 기판과 같이 유전체 두께가 얕으며 무손실 매질인 경우에 유전율을 환산하는 방법으로 영상전원을 이용한 모멘트 방법을 제안하였다. 서로 다른 두께를 갖는 유전율 3.2인 PCB 기판의 반사계수를 분산 FDTD로 수치 계산하였고, 수치 계산된 반사계수와 모멘트 방법을 이용하여 유전율을 환산한 결과 최대 2.015 %의 오차를 갖는 유전율 값으로 환산됨을 알 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] A. M. Nicolson, G. F. Loss, "Measurement of the intrinsic properties of materials by time-domain techniques", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-19, no. 11, pp. 377-382, 1970.
- [2] 신현, 개방단말 동축선 프로브를 이용한 매질의 특성, 고려대학교 석사학위 논문, 1999년.
- [3] D. K. Misra, "On the measurement of the complex permittivity of materials by an open-ended coaxial probe", *IEEE Microwave and Guided Wave Lett.*, vol. 5, no. 5, pp. 161-163, May 1995.
- [4] C. L. Pournarppoulis, A study on the coaxial aperture electromagnetic sensor and its application in material characterization, *Ph.D Thesis*, Univ. of Wisconsin-Milwaukee, 1996.
- [5] H. Shin, S. Y Hyun, S. W. Kim, and S. Y. Kim,

"An efficient model of an open-ended coaxial-line probe for measuring the complex permittivity",
Proc. SPIE, vol. 4129, pp. 332-339, 2000.

- [6] W. K. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge Univ. Press, 1988.

정지현



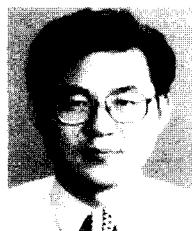
2004년 2월: 단국대학교 전자공학과 (공학사)
2004년 2월 ~ 현재: 고려대학교 전파공학과 석사과정
[주 관심분야] 복소유전율 측정기법, 수치해석

조유선



1999년 2월: 제주대학교 통신공학과 (공학사)
2002년 8월: 고려대학교 전파공학과 (공학석사)
2004년 3월 ~ 현재: 고려대학교 전파공학과 박사과정
[주 관심분야] 복소유전율 측정기법, 수치해석, 전자파 Imaging

김세운



1978년 2월: 서울대학교 전기공학과 (공학사)
1980년 2월: KAIST 전기 및 전자공학과 (공학석사)
1984년 8월: KAIST 전기 및 전자공학과 (공학박사)
1986년 11월: KAIST 전기 및 전자공학과 (Post-doctor)
1986년 12월 ~ 현재: KIST 영상미디어 연구센터 책임연구원
[주 관심분야] 파동의 회절 및 복사, 전자파 Imaging, 안테나 설계, EMI/EMC