



## 다층보 자유단 부위의 열응력

김형남\* · 김영호\*

\*한국전력공사 전력연구원

### Thermal Stresses near the Edge of Laminated Beam

Hyung-Nam Kim\* and Young-Ho Kim\*

\*Nuclear Power Laboratory, KEPRI, Korea Electric Power Corporation, Taejeon 305-380, Korea

#### Abstract

An analytical method for determining the thermal stress distributions in a 3-layered beam is developed, which is focused on the end effects. This method gives the stress distributions which satisfy the stress-free boundary condition at the end completely. For verification of the method, a numerical example which was introduced by other researchers is treated. The stress distributions agree with the results of other researchers. The results show that the shear and peeling stresses at the interfaces are significant near the edge and become negligible in the interior region.

\* Corresponding author : hnkim@kepri.re.kr

(Received September 3, 2004)

Key Words : Laminated Beam, Thermal Stress, End Effects, Cladding, Coating

#### 1. 서 론

기계나 전자 부품에서 필요로 하는 물리적 성질이 한 가지 재료로부터 얻어질 수 없을 때, 모재에 코팅을 하거나 클래딩을 하여 서로 다른 재료의 유리한 성질을 이용하게 된다. 그러나 이렇게 제작된 부품은 모재층과 코팅층 혹은 클래딩층의 열팽창 계수 및 탄성계수 등의 차이 때문에 온도변화에 따라 각 층의 변형을 차이가 생겨 변형이 된다. 이러한 단점을 보완하기 위하여 모재와 코팅재 사이에 열팽창계수가 두 재료의 중간 정도에 해당하는 재료를 이용하여 접착코팅층을 형성시키거나, 모재와 클래딩재 사이에 상대적으로 탄성계수가 작은 재료를 이용하여 접착층을 형성시키기도 한다.

그러나 이러한 방법으로 근본적인 문제가 해결되는 것은 아니다. 온도 변화가 있는 경우 서로 다른 열팽창 계수 및 탄성계수로 인하여 서로 늘어나거나 줄어드는 길이 차이가 생기고 경계면을 따라 분포된 힘이 작용하게 된다. 이 힘으로 인하여 끝단에 구속이 없는 자유단의 경계조건을 가진 경우에도 열응력이 발생하게 된다. 특히, 자유단에서 가까운 경계면에서 응력의 변화가 커

지고, 이는 층간 박리의 원인이 되어 부품의 신뢰도에 영향을 미치게 된다. 그러므로 경계면에서의 응력상태를 안다는 것은 부품의 신뢰성 제고를 위하여 매우 중요한 일이다.

다층 구조물에 대한 열응력 문제는 인쇄 회로 기판 (printed circuit board, PCB) 및 반도체 가공을 위한 코팅 등 전자 패키지 (electronic package) 분야와 발전소에서 사용되는 기계 요소를 각종 부식, 침식 및 마모로부터 보호하기 위한 코팅 및 클래딩과 같은 표면 처리 분야에서 널리 연구되고 있다.

최초로 다층 구조물의 서로 다른 물리적 성질에 의한 열응력을 다룬 사람은 Grimado<sup>1)</sup>이며 Chen과 Nelson<sup>2)</sup>도 비슷한 문제를 다뤘지만 이들의 연구는 자유단의 응력 조건을 만족시키지 못했다. Chen<sup>3)</sup>은 축방향 응력을 선형으로, 상대적으로 얇은 층의 축방향 응력 및 전단응력은 상수로 가정하여 변분법을 이용하여 이 문제에 접근하여 자유단에서의 응력 조건을 만족시키는 응력 분포를 구하였다. 그러나 이 방법은 상대적으로 얇지 않는 중간층을 가진 경우에는 정확하지 않는 응력분포를 줄 것이다. Williams<sup>4)</sup>는 변형률을 선형으로 가정

하여 비슷한 방법을 제시했다. 3층보의 경계면을 따라 작용하는 열응력을 구하기 위하여 Yin<sup>5,6)</sup>은 응력함수(stress function)를 이용한 변분법을 이용하였다. Yin의 방법은 모든 층의 온도 변화가 동일한 3층보의 열응력을 구하는데 효과적이다. 그러나 응력함수를 3차 식으로 가정(즉, 이와 관련된 응력분포가 일차함수가 됨)함으로서 각 층의 두께가 두꺼운 3층보의 경우 정확한 결과를 기대하기 어렵다.

본 논문에서는 응력분포를 일차함수가 아닌 다항식으로 가정하여 각 층의 두께가 두꺼운 경우 및 각 층의 온도 변화가 서로 다른 경우에도 적용할 수 있도록 관련 식을 전개함으로써 Yin<sup>5,6)</sup>의 방법을 일반화하였다. 여기에서 소개된 방법을 적용하면 열응력을 받는 3층보에 대하여 평형 방정식과 자유단에서의 응력조건을 포함한 모든 경계조건을 만족하고 상보에너지의 원리(principle of complementary energy)를 통하여 간접적으로 기하학적 적합조건식(compatibility equation)을 만족하는 응력분포를 구할 수 있다. Yin<sup>5)</sup>과 Glaser<sup>7)</sup>의 연구에서 인용된 3층보에 대하여, 같은 조건에서의 응력분포를 구하여 Yin 및 Glaser의 결과와 비교하고 끝단 부위에서의 응력 특성에 대하여 검토하였다.

## 2. 지배방정식

Fig. 1은 양쪽 끝이 자유단이고 폭이 1(unit)인 3층보의 형상 및 물리적 성질을 보여준다. 선팽창계수  $\alpha_k$ , 탄성계수  $E_k$ , 포와송비  $\nu_k$  및 온도변화  $\Delta T_k$ 가 각 층 내에서 일정하다고 가정했을 때 2-차원 등방성(isotropic) 탄성체의 응력-변형률 관계는 다음과 같다<sup>8)</sup>.

$$\sigma_x^k = \frac{E_k}{1-\nu_k^2}(\varepsilon_x^k + \nu_k \varepsilon_y^k) - \frac{\alpha_k E_k \Delta T_k}{1-\nu_k} \quad (1)$$

$$\sigma_y^k = \frac{E_k}{1-\nu_k^2}(\varepsilon_y^k + \nu_k \varepsilon_x^k) - \frac{\alpha_k E_k \Delta T_k}{1-\nu_k} \quad (2)$$

$$\tau_{xy}^k = \frac{E_k}{1+\nu_k} \gamma_{xy}^k \quad (3)$$

여기서, 첨자  $k$ 는  $k$ -번째 ( $k = 1, 2, 3$ ) 층을 의미한다.

$k$ -번째 층에 대한 평형 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^k}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^k}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

기하학적 적합성은  $u$ 를  $x$ -축 방향 변위,  $v$ 를  $y$ -축 방향 변위라 할 때 다음 식에 의해 표현된다.

$$y = 0 \text{에서} \quad u^1 = u^2 \quad (6)$$

$$v^1 = v^2 \quad (7)$$

$$y = t_2 \text{에서} \quad u^2 = u^3 \quad (8)$$

$$v^2 = v^3 \quad (9)$$

본 논문에서는 편의를 위하여 다음과 같은 관계식을 사용하였다.

$$\sigma_x^k = \hat{\sigma}_x^k - \frac{\alpha_k E_k \Delta T_k}{1-\nu_k} \quad (10)$$

$$\sigma_y^k = \hat{\sigma}_y^k - \frac{\alpha_k E_k \Delta T_k}{1-\nu_k} \quad (11)$$

$$\tau_{xy}^k = \hat{\tau}_{xy}^k \quad (12)$$

각 층 내에서 물리적 성질이 일정하다는 가정 하에 식(10), (11), (12)를 평형 방정식(식 (4), (5))에 대입하면 다음과 같은 새로운 평형 방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^k}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^k}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\sigma}_y^k}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

위 식에 대해서 끝단의 응력이 "0"이 되기 위한 조건은 다음과 같다.

$$x = \pm l \text{에서} \quad \hat{\sigma}_x^k = \frac{\alpha_k E_k \Delta T_k}{1-\nu_k} \quad (15)$$

$$\hat{\tau}_{xy}^k = 0 \quad (16)$$

$$y = (t_2 + t_3) \text{에서}$$

$$\hat{\sigma}_y^3 = \frac{\alpha_3 E_3 \Delta T_3}{1 - \nu_3} \quad (17)$$

$$\hat{\tau}_{xy}^3 = 0 \quad (18)$$

$y = -t_1$ 에서

$$\hat{\sigma}_y^1 = \frac{\alpha_1 E_1 \Delta T_1}{1 - \nu_1} \quad (19)$$

$$\hat{\tau}_{xy}^1 = 0 \quad (20)$$

서로 다른 층이 접하고 있는 경계면에서의 힘 평형에 의한 조건은 다음과 같다.

$y = 0$ 에서

$$\hat{\sigma}_y^1 = \hat{\sigma}_y^2 + \frac{\alpha_1 E_1 \Delta T_1}{1 - \nu_1} - \frac{\alpha_2 E_2 \Delta T_2}{1 - \nu_2} \quad (21)$$

$$\hat{\tau}_{xy}^1 = \hat{\tau}_{xy}^2 \quad (22)$$

$y = t_2$ 에서

$$\hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_y^3 + \frac{\alpha_2 E_2 \Delta T_2}{1 - \nu_2} - \frac{\alpha_3 E_3 \Delta T_3}{1 - \nu_3} \quad (23)$$

$$\hat{\tau}_{xy}^2 = \hat{\tau}_{xy}^3 \quad (24)$$

### 3. 지배방정식의 변환

길이에 비해 높이가 작은 형태의 보를 취급하는 일반적인 보 이론(classical beam theory)에서는  $x$ -축 방향 응력을  $y$ -좌표에 대하여 선형으로 가정한다(Fig. 1의 좌표계 참조). Yin<sup>5,6)</sup>의 연구는 응력함수를  $y$ -좌표에 대한 3차식으로 가정하였으므로  $x$ -축 방향 응력이  $y$ -좌표에 대하여 선형이 된다. 그러나 길이에 비해 높이가 작지 않은 형태의 보에서는  $x$ -축 방향 응력을  $y$ -좌표에 대하여 선형으로 보기 어렵다. 그러므로 본 논문에서는 길이에 비해 높이가 작지 않은 보에도 적용이 가능하도록 각 층에 생기는  $x$ -축 방향 응력을  $y$ -

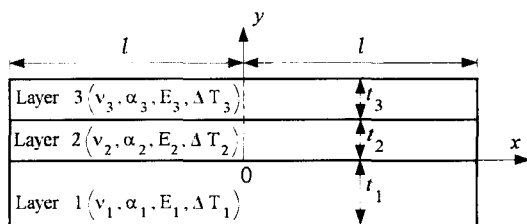


Fig. 1 Geometry and material properties of three layered beam with finite length

좌표에 대한 다항식으로 가정하였다. Fig. 1의 좌표계 참조하면  $x$ -축 방향 응력은 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{\sigma}_x^k(x, y) = \sum_{i=1}^{n_k+1} \sigma_{(i-1)}^k(x) \left(\frac{y}{t_k}\right)^{i-1} \quad (25)$$

여기서,  $n_k(k=1, 2, 3)$ 는 임의로 선택된 다항식의 최대 차수이고  $\sigma_{(i-1)}^k(x)$ 는  $(n_k+1)$ 개의 결정해야 되는 함수(첨자  $k(k=1, 2, 3)$ 는  $k$ -번째 층을 의미)이다. 두께  $t_k$ 의 값이 상대적으로 크면 다항식의 차수, 즉  $n_k$ 의 값을 크게 할수록 얻어지는 응력분포는 정확한 값에 접근하게 된다. 각 층의 자유단에서의 경계조건(식(15), (16))은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$x = \pm l$ 에서

$$\sigma_o^k = \frac{\alpha_k E_k \Delta T_k}{1 - \nu_k} \quad (26)$$

$$\sigma_m^k = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots, n_k) \quad (27)$$

식 (13), (14), (17)~(20), (25)에 의해서 각 층에서 미지의 함수  $\sigma_{(i-1)}^k(x)$ 와  $\hat{\tau}_{xy}^k(x, y)$  및  $\hat{\sigma}_y^k(x, y)$ 의 관계는 다음과 같이 쓸 수 있다.

i) 첫번째층

$$\hat{\tau}_{xy}^1(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1+1} \frac{y}{t_1} \left\{ (-1)^i - \left(\frac{y}{t_1}\right)^i \right\} \frac{d\sigma_{(i-1)}^1}{dx} \quad (28)$$

$$\hat{\sigma}_y^1(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1+1} \left\{ \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} t_1^2 + \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} t_1 y + \frac{t_1^2}{i(i+1)} \left(\frac{y}{t_1}\right)^{i+1} \right\} \frac{d^2\sigma_{(i-1)}^1}{dx^2} + \frac{\alpha_1 E_1 \Delta T_1}{1 - \nu_1} \quad (29)$$

ii) 두번째층

$$\hat{\tau}_{xy}^2(x, y) = \sum_{i=1}^{n_2+1} \frac{(-1)^i}{i} t_2 \frac{d\sigma_{(i-1)}^2}{dx} - \sum_{i=1}^{n_2+1} \frac{t_2}{i} \left(\frac{y}{t_2}\right)^i \frac{d\sigma_{(i-1)}^2}{dx} \quad (30)$$

$$\hat{\sigma}_y^2(x, y) =$$

$$\sum_{i=1}^{n_2+1} \left\{ \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} t_2^2 + \frac{(-1)^{i+1}}{i} t_2 y \right\} \frac{d^2\sigma_{(i-1)}^2}{dx^2}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_2+1} \frac{(-1)^{i+1}}{i(i+1)} \left(\frac{y}{t_2}\right)^{i+1} \frac{d^2 \sigma_{(i-1)}^2}{dx^2} + \frac{\alpha_2 E_2 \Delta T_2}{1-\nu_2} \quad (31)$$

iii) 세번째 층

$$\hat{\tau}_{xy}^3(x, y) = \sum_{i=1}^{n_3+1} \frac{t_3}{i} \left\{ \left(1 + \frac{t_2}{t_3}\right)^i - \left(\frac{y}{t_3}\right)^i \right\} \frac{d\sigma_{(i-1)}^3}{dx} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_y^3(x, y) = & \sum_{i=1}^{n_3+1} \left\{ \frac{it_3}{i+1} \left(1 + \frac{t_2}{t_3}\right)^{i+1} - \left(1 + \frac{t_2}{t_3}\right)^i \right. \\ & \left. + \frac{t_3}{i(i+1)} \left(\frac{y}{t_3}\right)^{i+1} \right\} \frac{d^3 \sigma_{(i-1)}^3}{dx^2} \\ & + \frac{\alpha_3 E_3 \Delta T_3}{1-\nu_3} \quad (33) \end{aligned}$$

식 (16), (28), (30), (32)에 의해서 부가적인 경계조건이 다음과 같이 얻어진다.

$$\left. \frac{d\sigma_m^k}{dx} \right|_{x=\pm l} = 0 \quad (m=1, 2, 3, \dots, n_k) \quad (34)$$

식 (30)~(33)을 참고하여 경계면에서의 힘 평형조건(식 (23), (24))을 경계조건(식 (26), (27), (34))을 이용하여 적분하면 중간층에서의 미지함수 ( $\sigma_o^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{n_2}^2$ ) 중 2개를 결정할 수 있다(본 논문에서는  $\sigma_o^2, \sigma_1^2$ 을 선택).

$$\begin{aligned} \sigma_o^2 = & \sum_{i=1}^{n_1+1} \frac{t_1}{t_2} (-1)^i \left( \frac{4}{i} + \frac{6}{i+1} \frac{t_1}{t_2} \right) \sigma_{(i-1)}^1 \\ & + \sum_{i=3}^{n_2+1} \frac{2(i-2)}{i(i+1)} \sigma_{(i-1)}^2 \\ & + \sum_{i=1}^{n_3+1} \left(\frac{t_2}{t_3}\right)^{i-1} \left[ \frac{6}{i+1} \left\{ \frac{1}{i} + \left(1 + \frac{t_3}{t_2}\right)^{i+1} \right\} \right. \\ & \left. - \frac{2}{i} \left\{ 1 + 2 \left(1 + \frac{t_3}{t_2}\right)^i \right\} \right] \sigma_{(i-1)}^3 \\ & + \frac{t_1}{t_2} \left(4 + 3 \frac{t_1}{t_2}\right) \frac{\alpha_1 E_1 \Delta T_1}{1-\nu_1} + \frac{\alpha_2 E_2 \Delta T_2}{1-\nu_2} \\ & + \frac{t_3}{t_2} \left(2 + 3 \frac{t_3}{t_2}\right) \frac{\alpha_3 E_3 \Delta T_3}{1-\nu_3} \quad (35) \end{aligned}$$

$$\sigma_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1+1} \frac{t_1}{t_2} (-1)^{i+1} \left( \frac{6}{i} + \frac{12}{i+1} \frac{t_1}{t_2} \right) \sigma_{(i-1)}^1$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=3}^{n_2+1} \frac{6(i-1)}{i(i+1)} \sigma_{(i-1)}^2 \\ & + \sum_{i=1}^{n_3+1} \left(\frac{t_2}{t_3}\right)^{i-1} \left[ \frac{6}{i} \left\{ 1 + \left(1 + \frac{t_3}{t_2}\right)^{i+1} \right\} \right. \\ & \left. - \frac{12}{i(i+1)} \left\{ 1 + i \left(1 + \frac{t_3}{t_2}\right)^{i+1} \right\} \right] \sigma_{(i-1)}^3 \\ & - \frac{t_1}{t_2} \left(6 + 6 \frac{t_1}{t_2}\right) \frac{\alpha_1 E_1 \Delta T_1}{1-\nu_1} \\ & + \frac{t_3}{t_2} \left(6 + 6 \frac{t_3}{t_2}\right) \frac{\alpha_3 E_3 \Delta T_3}{1-\nu_3} \quad (36) \end{aligned}$$

결국, 응력분포를 알기 위해서 구해야하는 미지함수는 ( $n_1 + n_2 + n_3 + 1$ )개 이다.

#### 4. 에너지법

앞에서 응력장(auxiliary stress field)을 구하면서 평형방정식과 경계조건을 이용했기 때문에 식 (6) ~ (9)에 관련된 함수  $u^k$ 와  $v^k$ 가 존재하기 위해서는 변형을 성분이 다음과 같은 기하학적 적합조건에 관한 식을 만족해야 한다.

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x^k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y^k}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^k}{\partial x \partial y} \quad (37)$$

기하학적 적합조건은 실제 상태의 응력을 구하기 위한 필요조건이다. 이는 경계조건과 평형조건을 만족하는 모든 응력 중에서 기하학적 적합조건을 만족하는 응력은 상보 에너지의 변분을 0으로 만든다는 상보 에너지의 원리(principle of complementary energy)를 이용하여 우회적으로 만족시킬 수 있다<sup>9)</sup>.

2차원 평면응력 문제에서 상보 에너지(complementary energy)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V^* = & \int_{-l}^l \int_t \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2E_k} \{ (\hat{\sigma}_x^k)^2 + (\hat{\sigma}_y^k)^2 \\ & - 2\nu_k \hat{\sigma}_x^k \hat{\sigma}_y^k + 2(1 + \nu_k) (\hat{\tau}_{xy}^k)^2 \} dy dx \quad (38) \end{aligned}$$

탄성계수와 포와송비(Poisson's ratio)를 안다면 식 (38)은 식 (28)~(33), (35) 및 (36)을 참조하여  $y$ 에 대해서 적분을 할 수 있다. 식 (26), (27), (34)에 의해 적분구간의 경계조건을 알려져 있으므로 변분을 취하여 이를 "0"으로 놓으면, 즉

$$\delta V^* = 0, \tag{39}$$

다음과 같은 연립 선형 미분방정식(simultaneous linear differential equations)을 얻을 수 있다.

$$\left[ A_{rs} \frac{d^4}{dx^4} + B_{rs} \frac{d^2}{dx^2} + C_{rs} \right] \{\sigma\} = \{a\} \tag{40}$$

여기서, 상수  $A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}$ 는 식 (38)을  $y$ -좌표에 대하여 적분을 하고 변분을 취하는 과정에서 결정되는 상수이다(열행렬  $\{a\}$ 의 성분도 이 과정에서 결정됨). 열행렬  $\{\sigma\}$ 의 성분은 다음과 같다.

$$\{\sigma\} = [\sigma_0^1, \sigma_1^1, \dots, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \dots, \sigma_{n_3-1}^3, \sigma_{n_3}^3]^T \tag{41}$$

경계조건(식 (26), (27), (34))과 함께 식 (40)에 의해 주어진 지배방정식은 일반적인 연립 선형 미분방정식으로 Hildebrand<sup>10)</sup>에 의해 해를 구하는 방법이 제시되어 있다. 또한 식 (25)에서 어떤  $n_k$  ( $k=1, 2, 3$ )를 선택하더라도 위와 같은 방법으로 해가 구해진다. 이렇게 구해진 식 (41)의 성분을 이용하면 부응력장(auxiliary stress field)이 결정되고, 이를 식 (10)~(12)에 대입하면 열응력에 의한 3층보의 응력분포가 구해진다.

### 5. 수치예

앞에서 설명한 방법의 정확성을 보이기 위하여 Yin<sup>5)</sup>의 응력합수를 이용한 해 및 Glaser<sup>7)</sup>의 유한요소법에 의한 수치해와 본 논문의 방법에 의한 결과를 서로 비교하였다. 이들의 계산 과정에 따라 새로운 문제의 해를 구하는 것은 쉽지 않으므로 문헌에 나와 있는 결과를 비교 대상으로 삼았다. 이를 위하여 본 논문에서는 Yin<sup>5)</sup>과 Glaser<sup>7)</sup>의 연구와 동일한 보의 형상, 기계적 성질 및 온도변화를 사용하였다. 여기에서 사용된 각 층의 두께 및 기계적 성질은 Table 1과 같으며, 보의 길이  $l$ 은 15.24 mm, 온도 변화  $\Delta T_k$ 는 모든 층에

Table 1 Mechanical properties of each layer

	Thick. (mm)	Elastic coeff. (GPa)	Poisson's ratio	Thermal coeff. (/°C)
Layer 1	2.032	68.95	0.33	$23.6 \times 10^{-6}$
Layer 2	.0508	13.0	0.30	$11.7 \times 10^{-6}$
Layer 3	.508	120.66	0.28	$3.20 \times 10^{-6}$

대하여 240°C를 주었다. 고온에서 기계적 성질은 변화하지만 여기에서는 변화가 없는 것으로 가정하였다. 본 논문에서는 Fig. 2(a)와 같은 좌표계를, Yin<sup>5)</sup>과 Glaser<sup>7)</sup>는 Fig. 2(b)와 같은 좌표계를 사용했기 때문에,  $y$ -축 방향 응력의 방향은 변화가 없지만 전단응력의 방향이 서로 반대로 나타난다는 점에 주목할 필요가 있다. 이를 보정하기 위해서 Yin<sup>5)</sup>과 Glaser<sup>7)</sup>가 계산한 전단응력은 그대로 이용하고 본 논문에서 계산된 전단응력에는 “-”를 곱하여 결과를 비교하였다. 본 예제의 경우 각 층의 높이가 길이에 비해서 작기 때문에  $n_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) (식 25)를 1(즉,  $x$ -축 방향 응력이 두께에 따라 선형으로 변화)로 선택하나 3(즉,  $x$ -축 방향 응력이 3차 다항식)으로 선택하나 결과의 차이는 크지 않았다.

Fig. 3은 첫 번째 층과 두 번째 층의 경계면(interface 1)에서 첫 번째 층을 따라 작용하는  $x$ -축 방향 응력분포를 보여준다. 본 논문에서 제시한 방법으로 계산한 결과와 Yin 및 Glaser의 결과가 매우 잘 일치함을 알 수 있다. 두 번째 층과 세 번째 층 경계면(interface 2)에서 세 번째 층에 작용하는  $x$ -축 방향 응력분포가 Fig. 4에 나타나 있다. 세 가지 다른 방법에 의한 결과가 잘 일치하고 있으며 자유단 표면에서의

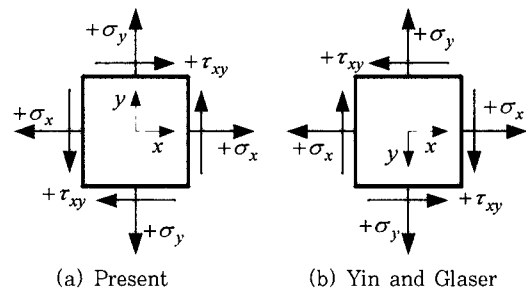


Fig. 2 Comparison between the positive directions in present coordinate system(a) and those in Yin's and Glaser's coordinate systems(b)

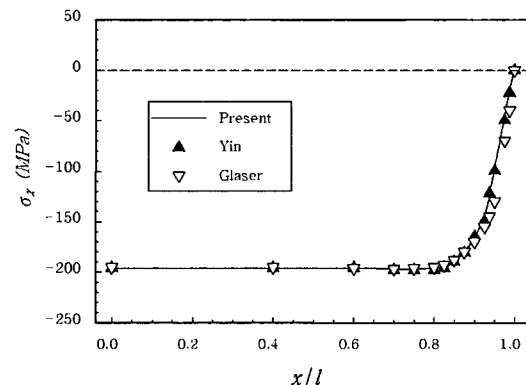


Fig. 3 Comparison of axial stress distributions along the interface 1 in the layer 1

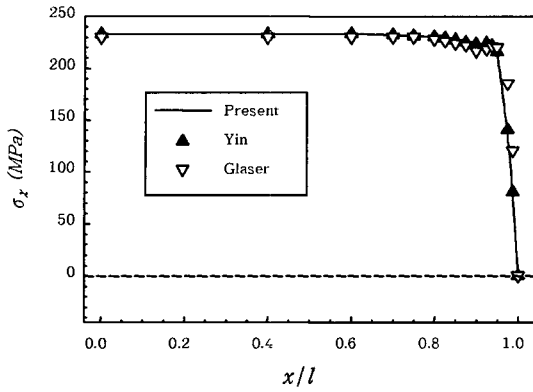


Fig. 4 Comparison of axial stress distributions along the interface 2 in the layer 3

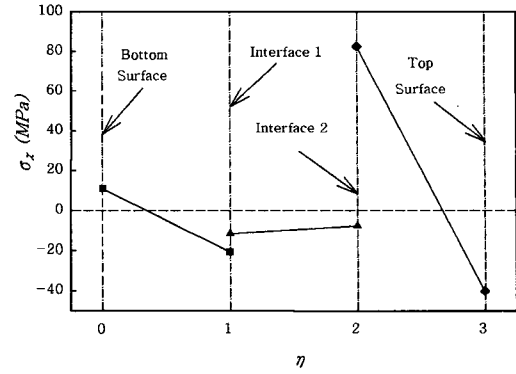


Fig. 6 Axial stress discontinuity at the interfaces through  $x = 0.015\text{mm}$

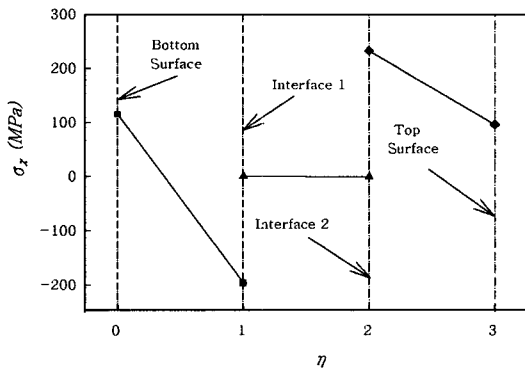


Fig. 5 Axial stress discontinuity at the interfaces through  $x = 0.0\text{mm}$

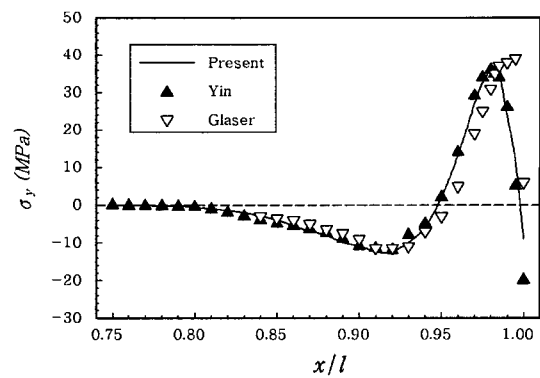


Fig. 7 Comparison of average normal stress distributions in the Layer 2

경계조건(자유단에서 가해지는 외력(surface traction)이 없으면 표면에 응력이 발생하지 않음)을 만족하고 있음을 알 수 있다. 각 층의 두께 차이가 커서 같은 스케일의 좌표값을 사용하여 응력분포를 표현하는데 무리가 따른다. 그러므로 여기에서는 새로운 변수  $\eta$  ( $\eta = y/t_k + 1 + \delta_{3k}(1 - t_2/t_k)$ ,  $\delta_{3k}$ 는  $k=3$ 인 경우에만 1의 값을 갖고 그 외에는 0인 크로네커 델타(Kronecker delta)임)를 도입하였다. Fig. 5는  $x = 0$ 인 축을 따라 작용하는 축방향 응력  $\sigma_x(0, y)$ 를, Fig. 6은  $x = 0.015$ 인 축을 따라 작용하는  $x$ -축 방향 응력  $\sigma_x(0.015, y)$ 를 보여준다.  $x$ -축 방향 응력은 같은 층 내에서는 연속이나 각 층의 경계면에서는 불연속임을 알 수 있다.

$x$ -축 방향 응력은 각 층의 표면에 발생하는 균열 및 좌굴과 관련된 응력이다. 또한 각 층 재료의 강도보다 층간 결속력이 작은 경우, 경계면에서의  $y$ -축 방향 응력은 층의 분리와 직접 관련된 응력이다. Fig. 7은 두 번째 층에서의 평균  $y$ -축 방향 응력분포를 보여준다. 본 논문에서 계산한  $y$ -축 방향 응력은 Yin의 결과는

매우 잘 일치하지만 Glaser의 결과와는 자유단 가까운 부분에서 차이를 보인다. Fig. 8은 두 번째 층에 작용하는 평균 전단응력 분포도이다. 두 번째 층에서의 전단응력은 대부분의 영역에서 "0"이고 자유단 근처에서 최대값을 가진다. 계산에 사용된 다항식의 수(식 (25)의  $n_k$ )를 크게 할수록 최대값의 위치가 자유단에 접근하고  $n_k$ 를 무한대로 취하면, 자유단에서 전단응력은 최대값과 "0"인 두 값을 가질 것이다. 이러한 현상은 경

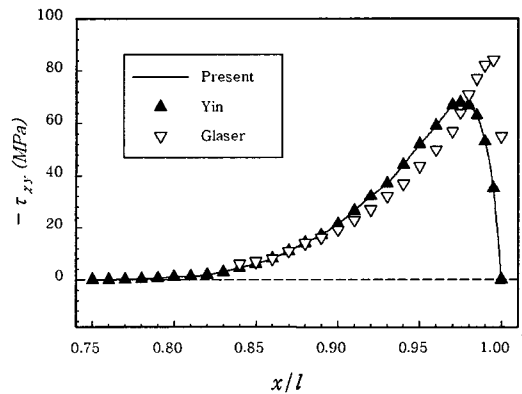


Fig. 8 Comparison of average shear stress distributions in the Layer 2

계면의 자유단에서 특이점(singular point)이 있어 이곳에서는 유일해가 존재하지 않고 응력의 크기는 특이점에서의 접근 방향에 따라 결정된다. 즉, 보의 바깥쪽(즉,  $x$ 의 좌표가  $\pm(l+|\epsilon|)$ )에서 자유단으로 접근하게 되면 자유단 표면에 가해지는 외력이 없기 때문에 자유단 표면에서의 전단응력이 "0"이 되고 보의 안쪽(즉,  $x$ 의 좌표가  $\pm(l-|\epsilon|)$ )에서 자유단으로 접근하면 전단응력이 "0"이 아닌 값을 갖는다. Nissley<sup>11)</sup>를 비롯한 많은 연구자들은 이러한 응력 특이성(stress singularity) 때문에 일반적인 유한요소법으로 자유단 부분의 응력을 정확히 해석할 수 없음을 지적하고 있다. Glaser<sup>7)</sup>는 비교적 간단한 형상을 가진 2차원 Beam을 6,440개의 2차원 사변형 유한요소(plane stress quadrilateral elements)로 나누어 응력분포를 계산했다(13,206 자유도(degree of freedom)). Glaser<sup>7)</sup>의 유한요소해석에 더 많은 유한요소를 사용한다면 전단응력의 최대값이 생기는 위치가 자유단에 접근하고  $x = \pm l$ 에서의 전단응력 값이 "0"에 가까워질 것이나 자유표면 경계조건(stress-free)을 만족시키는 결과를 얻기는 어렵다. 식 (4)와 (5)의 평형방정식에서 보는 바와 같이 각 응력은 서로 커플이 되어 있어 한 응력값이 다른 응력값에 영향을 주게 된다. 그러므로 경계조건(자유단에서는 응력이 발생하지 않음)을 만족하지 못한 전단응력분포로 인하여 Glaser에 의한 경계면과 수직인 응력분포  $\sigma_y$ 는 정확한 값이 될 수 없다. Yin의 전단응력 계산결과와 본 논문에 의한 계산 결과는 매우 비슷한 양상을 보이고 있으며 자유표면 경계조건을 만족하고 있음을 Fig. 3, 4, 8은 보여주고 있다.

경계면에서의 동일 응력 조건(matching condition)은 Fig. 9와 Fig. 10에서 확인할 수 있다. 경계면과 수직인 응력과 전단응력은 각 층에서 서로 다른 함수로 정의되므로 그래프의 형상은 다르지만 경계면에서는 동

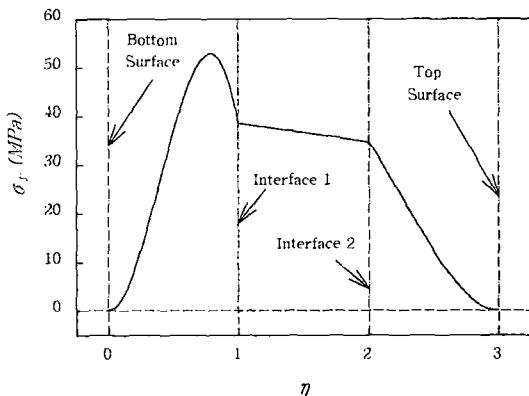


Fig. 9 Normal stress distribution in  $y$ -direction through  $x = 0.015\text{mm}$

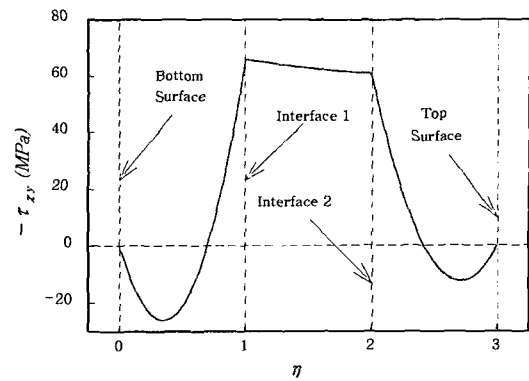


Fig. 10 Shear stress distribution through  $x = 0.015\text{mm}$

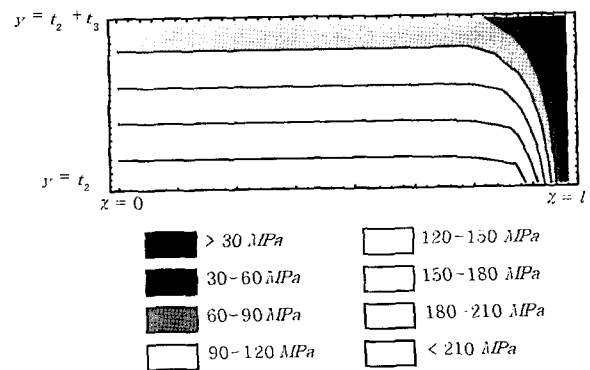


Fig. 11 Principal stress distribution in the layer 3

일한 응력값을 갖게 된다. 또한, 보의 위와 아래쪽 표면에서 수직응력  $\sigma_y$ 와 전단응력  $\tau_{xy}$ 가 "0"임을 확인할 수 있다. Fig. 11은 세 번째 층에 작용하는 주응력(principal stress) 분포도이다. 자유단 부분에서 주응력이 작아지고 경계면에 가까워질수록 큰 응력이 작용함을 알 수 있다.

## 6. 결 론

본 논문에서는 각 층이 서로 다른 재료로 이루어지고 각 층의 온도변화도 서로 다른 3층보에 대하여 모든 경계조건(특히, 자유단)을 만족시키는 응력분포를 구하는 방법을 제시하였다. 특히 경계면과 평행한 수직응력을 다항식으로 가정하여 응력함수를 따로 구할 필요가 없을 뿐 아니라 각 층의 두께가 두꺼운 3층보의 열응력을 계산할 수 있도록 관련 식을 정비하고 계산 과정을 소개하였다.

온도 변화에 따라 3층보에 발생하는 응력 분포의 특성은 다음과 같다.

1. 각 층이 서로 만나는 경계면에서 경계면과 평행한 방향의 수직 응력은 불연속이다.

2. 경계면과 직각 방향의 수직 응력은 자유단 근처에서 현저한 변화를 보이고, 자유단에서 멀어지면 무시할 정도로 작아진다. 경계면과 직각 방향의 수직 응력은 각 층을 서로 분리하는 방향으로 작용하므로, 각 층간 결속력이 작으면 자유단 부분에서 층의 분리가 일어날 가능성이 가장 크다.

3. 전단응력의 분포도 자유단 근처에서 급격한 변화를 보이고, 자유단에서 멀어지면 무시할 정도로 작아진다.

### 참 고 문 헌

1. P.B. Grimado : Interlaminar Thermoelastic Stresses in Layered Beams, *Journal of Thermal Stresses*, 1(1974), 75-86
2. W.T. Chen and C.W. Nelson : Thermal Stress in Bonded Joints, *IBM Journal of Research and Development*, 23-2 (1979), 179-188
3. D. Chen, S. Cheng and T.D. Gerhardt: Thermal Stresses in Laminated Beams, *Journal of Thermal Stresses*, 5(1982), 67-84
4. H.E. Williams : Asymptotic Analysis of the Thermal Stresses in a Two-Layer Composite with an Adhesive Layer, *Journal of Thermal Stresses*, 8 (1985), 183-203
5. W.-L. Yin : Thermal Stresses and Free-Edge Effects in Laminated Beams: A Variational Approach Using Stress Functions, *ASME Journal of Electronic Packaging*, 113 (1991), 68-75
6. W.-L. Yin, : Refined Variational Solutions of the Interfacial Thermal Stresses in a Laminated Beam, *ASME Journal of Electronic Packaging*, 114 (1992), 193-198
7. J.C. Glaser : Thermal Stresses in Compliantly- Jointed Materials, ASME Winter Annual Meeting(1989), Paper No. 89-WA/EEP-14
8. B.A. Boley, J.H. Weiner : Theory of Thermal Stresses, Wiley, 1967, 258-262
9. I.S. Sokolnikoff : Mathematical Theory of Elasticity (2nd Edition), McGraw-Hill Book Company, Inc., (1956), 387-394
10. F.B. Hildebrand : Advanced Calculus for Application (2nd Edition), Prentice-Hall, Inc., (1976), 18-23
11. D.M. Nissley: Thermal Barrier Coating Life Modeling in Aircraft Gas Turbine Engines, *Journal of Thermal Spray Technology*, 6 (1997), 91-98