

연구논문

레이저 키홀 용접의 열원 모델링: Part 1-비드 용접

이재영*·이원범**·유중돈***

*LG 전자, 생산기술원

**POSCO, 기술연구소

***한국과학기술원, 기계공학과

Heat Source Modeling of Laser Keyhole Welding: Part 1-Bead Welding

Jae-Young Lee*, Won-Beom Lee** and Choong-Don Yoo***

*Production Engineering Research Center, LG Electronics, Pyungtack 451-713, Korea

**POSCO Technical Research Lab., Gwangyang 545-711, Korea

***Dept. of Mech. Eng., KAIST, Daejon 305-701, Korea

Abstract

Laser keyhole welding is investigated using a three-dimensional Gaussian heat source, and the heat source parameters such as the keyhole depth, welding efficiency and power density distribution factor are determined in a systematic way. For partial penetration, the keyhole depth is same as the penetration and is predicted using the experimental data. The welding efficiency is calculated using the ray-tracing method and the power density distribution factor is determined from the bead shape. Full penetration is classified into the transition, normal and excessive modes depending on the degree of keyhole opening. Thermal analysis of the bead-on-plate welds is conducted using the Gaussian heat source, and the calculated weld geometries show reasonably good agreements with the experimental results.

* Corresponding author : mecca@lge.com

(Received August 9, 2004)

Key Words : Laser welding, Gaussian heat source, Heat source parameters, Melting mode

1. 서 론

레이저 용접은 높은 출력 밀도(power density)를 얻을 수 있기 때문에 용접 속도를 증가시켜 생산성을 향상시키고 용접부의 잔류응력과 열변형을 감소시킬 수 있다¹⁾. 레이저의 출력 밀도가 10^5W/cm^2 이상으로 증가하면 용융 금속의 증발 압력에 의해 키홀(keyhole)이 형성되고 다중반사(multiple reflection) 효과에 의해 용접 효율이 크게 증가한다^{2,3)}. 키홀 내부에서 매우 복잡한 열유동이 발생하지만, 이를 고려한 해석이 어렵기 때문에 본 연구에서는 레이저 열원 모델을 제안하고, 이를 이용하여 용접부의 형상 및 잔류응력과 열변형 등을 계산하였다.

레이저 용접의 열해석에 사용되는 열원 모델은 크게

표면 열원과 체적 열원(surface and volume heat source)으로 분류할 수 있다. 표면 열원은 변형된 키홀 표면에 흡수된 열을 분포시킨다. 이를 위하여 증발 압력에 의한 용융부 표면의 변형을 계산하고 ray-tracing 방법으로 다중 반사에 의한 레이저 빔의 경로를 추적하여 흡수율과 키홀 표면의 출력 밀도를 계산한다⁴⁻⁶⁾. 표면 열원은 실제 현상과 유사하지만, 계산 결과는 키홀의 변형된 표면 형상과 유동에 큰 영향을 받는다. 체적 열원은 모재의 표면과 깊이 방향으로 레이저 열을 분포시키며, 레이저 열이 분포된 체적의 형상을 표현하기 위해 다양한 함수를 사용하였다. 대표적인 체적 열원 모델로 3차원 가우시안(Gaussian) 열원을 들 수 있으며^{7,8)}, 계산 결과의 정확도는 체적 열원 모델과 함께 사용하는 열원 인자에 의해 결정된다.

레이저 키홀 용접의 용융 모드는 부분용입(partial penetration)과 완전용입(full penetration) 모드로 구분한다. 용융 모드에 따라 용접 비드의 형상과 용접 효율이 크게 변화하기 때문에 용융 모드를 예측하고 이에 따른 적절한 열원 인자의 값을 사용해야 정확한 해석 결과를 얻을 수 있다. 그러나 레이저 키홀 용접은 용접 재료와 레이저의 종류에 의해 영향을 받기 때문에 용융 모드와 열원 인자의 값을 해석적인 방법으로 결정하기 어렵다.

본 연구에서는 레이저 키홀 용접에 적용하기 위해 3차원 가우시안 열원을 제안하고, 용융 모드를 세분화하였다. 세분화된 용융 모드에 대한 열원 인자의 값을 결정하고 비드 용접의 열해석에 적용하였으며, 실험을 통하여 제안한 열원 모델의 타당성을 검증하였다.

2. 키홀 모드의 레이저 열원 모델링

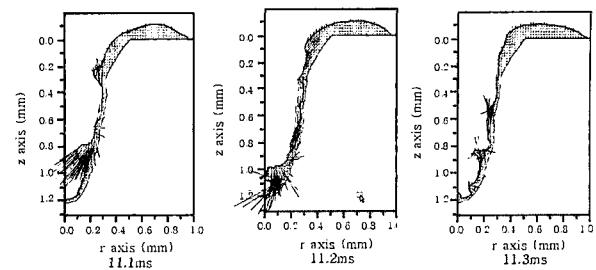
레이저 키홀 용접에서 발생하는 원추형 용접부 형상과 기존의 열원 모델을 참조하여 본 연구에서는 다음과 같은 3차원 가우시안 열원 모델을 제안하였다.

$$Q(x, y, z) = \frac{2\eta_{eq}P}{\pi r_f^2 h} e^{-2(x^2+y^2)/r_f^2} \left(1 - \frac{\alpha z}{h}\right) u(z) \quad (1)$$

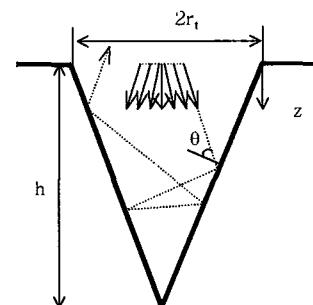
$$\begin{aligned} u(z) &= 1, \text{ if } z < h \\ &= 0, \text{ if } z > h \end{aligned}$$

이때, P 는 레이저 출력(power), r_f 는 레이저 빔의 반경, h 는 키홀 깊이(keyhole depth), η_{eq} 는 등가 용접 효율(equivalent welding efficiency), α 는 깊이 방향의 열원 밀도 인자(power density distribution factor), $u(z)$ 는 계단 함수(step function)를 나타낸다. 레이저 빔의 반경 r_f 는 렌즈의 초점 반경과 렌즈와 모재의 거리에 따라 변화하며, 계단 함수 $u(z)$ 는 열원이 키홀 깊이 이내에서 존재함을 의미한다. 열원 밀도 인자인 α 는 깊이 방향의 열원의 밀도 분포를 결정하며, α 가 증가하면 비드 상부의 열원 밀도가 증가하여 윗면 비드의 폭이 커지고 용융 깊이가 감소한다.

부분용입 모드에서 키홀의 동적 거동과 키홀 형상을 단순화 시킨 형상을 Fig. 1에 나타내었다. VOF(Volume of Fluid)방법을 이용한 선행 연구⁵⁾를 통해 키홀의 동적 거동 해석을 수행한 결과, Fig. 1(a)에서와 같이 키홀은 항상 불안정하며, 키홀 깊이는 용융부의 용입 깊이와 거의 동일함을 알 수 있다. 용입 깊이는 용접 효율에 직접적인 영향을 주기 때문에 최근 용입 깊이를 정확히 예측하기 위한 연구가 수행되었지만⁹⁻¹⁰⁾, 재료와 레이저 특성에 크게 영향을 받기 때문에 용입 깊이



(a) Dynamic simulation results



(b) Simplified keyhole shape

Fig. 1 Keyhole shape of partial penetration mode

를 정확하게 예측하기 어렵다. 그러므로 본 연구에서는 키홀 깊이 h 는 용입 깊이 h_p 와 동일하다고 가정하고, 레이저 출력이 일정한 조건에서 용입 깊이를 용접속도에 대한 2차 함수로 곡선 맞춤(curve-fitting)하여 추정하였다.

$$h = h_p = c_0 + c_1 v_w + c_2 v_w^2 \quad (2)$$

이때, h 와 h_p 는 키홀 깊이와 용입 깊이, v_w 는 용접 속도, $c_0 \sim c_2$ 는 실험을 통해서 결정하는 상수이다. 식(2)를 이용하면 부분용입에서 완전용입 모드로 변화하는 천이 속도 (transition velocity, v_{tran})를 예측할 수 있다.

Fig. 1(a)와 같이 키홀은 내부의 용융금속의 유동에 의해 불안정하여 키홀 바닥면으로 주기적으로 붕괴하게 되는데⁵⁾. 이 과정에서 키홀 깊이가 감소하면서 키홀 벽면에서의 흡수율이 감소한다. 부분용입 모드의 키홀에 대한 용접 효율을 정량적으로 결정하기 위해 Fig. 1(b)와 같이 키홀을 원뿔 형상으로 단순화 하고, ray-tracing⁵⁾ 방법으로 다중 반사에 의한 키홀의 흡수율을 계산하였다. 키홀 붕괴에 따른 흡수율의 감소를 고려한 부분용입 시의 키홀 용접 효율은 다음과 같다.

$$\eta_w = F_{ki} \eta_{ray} \quad (3)$$

이때, η_w 는 용접 효율(welding efficiency), η_{ray} 는

ray-tracing 방법으로 구한 단순화된 키홀에서의 이상적인 흡수율, F_{ki} 는 키홀의 불안정으로 인한 효율 감소를 나타내는 키홀 불안정 인자(keyhole instability factor)이다.

완전용입 모드에서 키홀의 동적 거동과 키홀 형상을 단순화 시킨 모델을 Fig. 2에 나타내었으며, 키홀 깊이는 시편의 두께와 동일하다. Fig. 2(a)의 키홀의 동적 거동을 해석한 결과⁵⁾로부터 완전용입의 초기 단계에는 부분용입과 유사하게 키홀의 불안정으로 인해 키홀 벽면이 붕괴된다. 키홀이 붕괴되면 키홀 바닥면이 막히기 때문에 부분용입과 유사한 형태로 되어 흡수율이 증가 하지만, 키홀 바닥면이 열리면 레이저 빔이 키홀을 통과하기 때문에 흡수율이 감소한다. 그러므로 흡수율은 키홀 바닥면의 열린 정도(degree of keyhole opening)에 영향을 받는다. 완전용입 키홀의 단면 형상을 Fig. 2(b)와 같이 사다리꼴로 단순화시키고, ray-tracing 방법으로 이상적인 흡수율 η_{ray} 를 계산하였다. 완전용입 조건에서 키홀 용접 효율은 키홀 바닥면의 열린 정도와 그 주기에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta_w = F_{ko} \eta_{ray} \quad (4)$$

이때, F_{ko} 는 키홀 바닥면의 열림 주기의 정도를 나타내는 키홀 열림 인자(keyhole opening factor)이다. 그러나 키홀 열림 인자는 해석적인 방법으로 결정하기 어렵기 때문에 본 연구에서는 완전용입 모드를 세분화하고 세분화된 용융 모드에 대한 용접 효율을 실험 결과

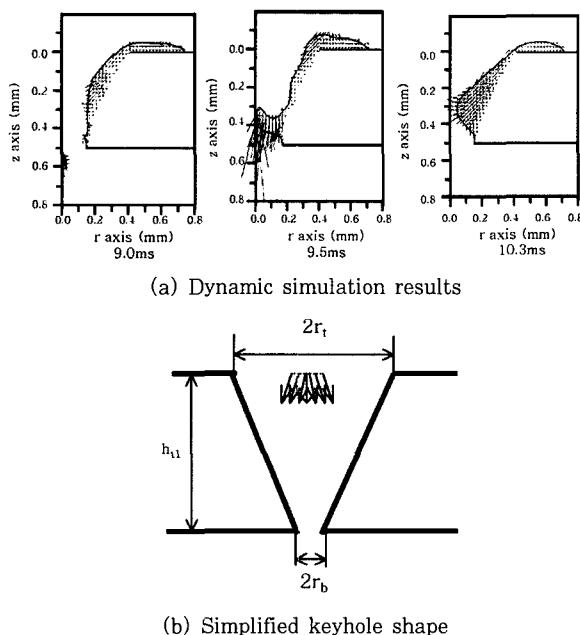


Fig. 2 Keyhole shape of full penetration mode

로부터 결정하였다.

시편에 인가된 열량은 레이저의 출력과 용접효율에 의해 결정되고, 이는 식(1)을 적분한 값과 같기 때문에 등가 용접 효율 η_{eq} 은 다음의 식으로부터 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \eta_w P &= \int_V Q(x, y, z) dV \\ &= \int_V \frac{2\eta_{eq} P}{\pi r_f^2 h} e^{-2(x^2+y^2)/r_f^2} \left(1 - \frac{\alpha z}{h}\right) u(z) dV \end{aligned} \quad (5)$$

3. 수치해석과 실험

제안된 3차원 가우시안 열원을 이용하여 비드 용접부의 온도를 계산하였으며, 계산을 위해 3차원 유한차분법(finite difference method, FDM) 코드인 EL3D¹¹⁾를 사용하였다. 수치해석 결과를 통하여 열원 모델의 인자들이 용접부 형상에 미치는 영향을 분석하고, 용융부 형상의 계산 결과를 실험 결과와 비교하여 제안한 열원 모델의 타당성을 검증하였다.

열원 인자의 값을 결정하고 열원 모델을 이용한 수치해석 결과를 검증하기 위해 실험을 수행하였다. 출력 6kW인 TEM₀₁* 모드의 CO₂ 레이저를 사용하여 키홀 모드로 용접하였으며 초점의 반경은 0.28mm이다. 보호가스로 헬륨 가스 (15 liter/min)을 사용하였고 레이저 빔의 초점을 시편의 표면에 위치시켰다. 시편으로 SAPH370 강판을 사용하였으며, 강판의 물성치를 Table 1에 정리하였다. 실험에 사용한 강판의 두께는 1.6, 2.3, 3mm이며, 용접 속도를 1~10m/min 범위에서 1m/min 단위로 변화시키며 용접을 수행하였다. 용접 수행 후에 시편의 단면을 절단하여 비드의 단면 형상을 관찰하였다.

4. 결과 및 고찰

4.1 레이저 빔 모드의 영향

일반적으로 해석에 사용되는 레이저 빔 모드는 가우시안 함수 형상인 TEM₀₀ 모드이지만, 산업용 고출력 레이저의 경우에는 도넛 형상인 TEM₀₁* 모드가 많이

Table 1 Material properties of base metal

Mass density	7860 kg/m ³ (steel) 1.161 kg/m ³ (air)
Thermal conductivity	30 W/mK (steel) 2.63×10 ⁻² W/mK (air)
Specific heat	795 J/kg K
Melting temperature	1860K

사용된다. 본 연구의 해석과 실험에서 사용한 CO₂ 레이저의 모드가 서로 다르기 때문에 레이저의 빔 모드가 흡수율에 미치는 영향을 분석하는 것이 필요하다.

TEM₀₀와 TEM_{01*} 모드의 레이저 빔을 원추형 키홀에 조사하는 경우, ray-tracing 방법으로 흡수율과 키홀 벽면에서 흡수되는 열 분포를 계산하여 Fig. 3에 나타내었다. 계산에 사용된 키홀 깊이의 범위는 1~3mm이며, 키홀 반경은 레이저 빔의 초점 반경인 0.28mm이다. TEM₀₀ 모드는 TEM_{01*} 모드에 비해 키홀 중심에서 흡수율이 높지만, 흡수율의 차이가 5% 정도로 작고 키홀 벽면에 흡수되는 열 분포가 매우 유사하다. 이는 다중반사에 의해 키홀 중심에 레이저가 집중되기 때문이다. 이와 같이 키홀에 조사되는 레이저의 흡수율은 빔 모드 보다 다중반사 효과에 의해 큰 영향을 받는다. 그러므로 TEM_{01*} 모드로 키홀 용접을 하는 경우에 대해 TEM₀₀ 모드인 열원 모델을 이용하여 해석해도 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있을 것으로 판단된다.

4.2 용융 모드의 세분화

3차원 가우시안 열원 모델식에서 인자의 값은 용융 모드에 따라 변화하기 때문에 키홀 용접의 용융 모드를 결정하는 것이 매우 중요하다. Fig. 4는 두께가 2.3mm인 시편에 대해서 용접 속도에 따른 비드 폭과 용입을 나타낸 실험 결과이다. 용접 속도가 6m/min로 빠른 경우에는 부분용입이 발생하고, 다중반사에 의해 흡수율이 증가한다. 용접 속도가 감소하여 완전용입이 발생하면 키홀 바닥면이 열리면서 레이저 빔이 키홀을 통과하기 때문에 흡수율이 감소한다.

완전용입 모드에서 흡수율은 키홀 바닥이 열린 정도에 의해 큰 영향을 받기 때문에 본 연구에서는 이러한 용융 특성을 고려하기 위해 완전용입 모드를 천이 모드, 정상 모드, 과도 모드로 세분화 하고 각 모드에서

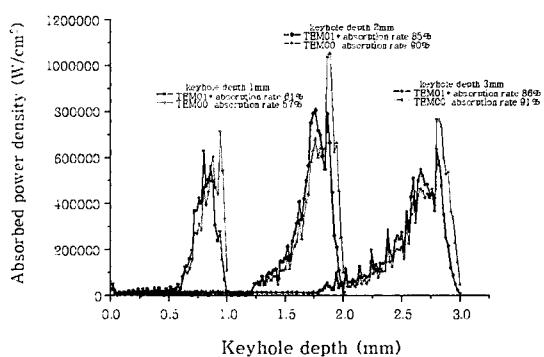
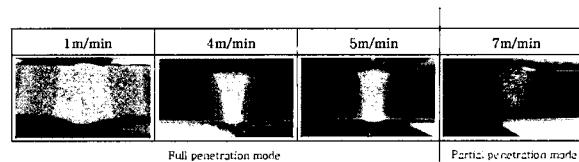
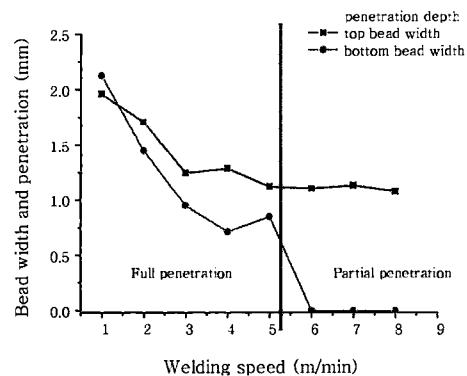


Fig. 3 Absorbed power density distributions on keyhole surface of TEM₀₀ and TEM_{01*} mode



(a) Cross-sections with travel speed



(b) Bead and penetration with travel speed

Fig. 4 Bead shape with 2.3mm thickness plate

인자의 값을 결정하였다. Fig. 4(b)의 용접 속도가 2~4m/min인 영역에서는 윗면 비드가 아랫면 비드보다 크고 완전용입이 안정적으로 발생하며, 이를 정상 모드(normal mode)로 정의하였다. 정상 모드는 완전 용입을 보장하는 영역으로 키홀 바닥면이 열린 상태를 유지하며 용접 효율이 일정하다. 용접 속도가 1m/min로 감소하면 윗면 비드 폭이 아랫면 비드 폭과 유사하거나 작아지는 용융부 형상이 발생하며, 키홀 바닥면의 열린 정도가 크기 때문에 용접 효율이 감소한다. 본 연구에서는 아랫면 비드 폭과 윗면 비드 폭의 비 (w_b/w_t)가 0.8 이상인 영역을 과도 모드(excessive mode)로 정의하였다. 용접 속도가 5m/min인 조건에서 키홀 바닥면의 열림과 닫힘이 불규칙하게 발생하고 이로 인하여 용접 효율이 정상 모드보다 증가한다. 이와 같은 현상은 부분용입 모드와 정상 모드 사이의 영역에서 발생하며, 이를 천이 모드(transition mode)로 정의하였다. 천이 모드의 경우, 정상 모드 보다 용접 속도가 빠르지만 용융량과 비드의 크기가 유사하며, 이는 정상 모드 보다 천이 모드의 용접 효율이 높기 때문이다.

천이 모드가 발생하는 구역은 좁으며, 식(2)를 이용하면 부분용입에서 완전용입 모드로 변화하는 천이 속도(transition velocity, v_{tran})를 예측할 수 있다. 두께 3mm인 강판을 이용한 Fig. 5의 실험 결과를 이용하여 부분용입에서 용접 속도와 용입 깊이의 관계는 다음과 같다.

$$h_p = 5.62 - 0.84v_w + 0.0394 v_w^2 \quad (6)$$

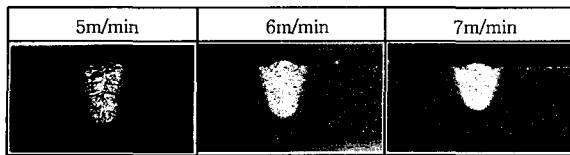


Fig. 5 Bead shape with 3mm thickness plate

본 연구에서는 천이 속도를 기준으로 ± 0.5 m/min 범위를 천이 모드가 발생하는 영역으로 정의하였으며, 강판의 두께가 변화하여도 용융 모드에 따라 용접부 형상이 변화하는 현상을 유사하였다.

4.3 열원 인자의 결정

레이저 열원 모델을 이용하여 용융부의 형상을 정확하게 계산하려면 용융 모드에 따라 변화하는 열원 인자를 결정해야 한다. 키홀 깊이에 따른 부분용입의 흡수율과 완전용입의 바닥면의 열린 정도에 따른 흡수율을 Fig. 6에 나타내었다. 부분용입에서 원추형 키홀에 ray-tracing 방법으로 이상적인 흡수율 η_{ray} 를 계산하면, Fig. 6(a)에 나타난 바와 같이 키홀 깊이가 증가할수록 다중 반사에 의한 흡수율이 크게 증가한다. 식(3)의

키홀 불안정 인자 F_{ki} 를 결정하기 위해 Fig. 1(a)와 같이 동적 해석을 통해 구한 키홀의 흡수율과 동일한 깊이에서의 원추형상 키홀의 흡수율을 비교하였다. 키홀의 불안정으로 인해 흡수율이 20% 정도 감소하기 때문에 키홀 불안정 인자의 값을 0.8로 결정하였다.

완전용입에서 레이저 빔의 흡수율 η_{ray} 은 Fig. 6(b)에 보인 바와 같이 모재의 두께보다 키홀 바닥면의 열린 반경에 의해 큰 영향을 받는다. 키홀의 불안정은 흡수율을 높이는 역할을 하지만, 키홀 바닥면의 열린 반경이 증가함에 따라 흡수율이 급격히 감소하기 때문에 식(4)의 키홀 열림 인자를 정확하게 계산하기 곤란하다. 그러므로 완전용입의 세 개의 모드에 대한 용접 효율을 실험 결과로부터 구하였으며, 정상 모드와 과도 모드의 용접효율은 각각 50%와 35%이다. 천이 모드는 정상 모드와 부분용입의 중간 영역에 존재하므로 흡수율은 두 모드의 중간값으로 결정하였다.

열원 밀도인자는 열입력의 영향을 받으며, 일반적으로 용접 속도가 증가하여 열입력이 감소하면 열원 밀도인자가 증가한다. 실험 결과를 이용하여 각 용융 모드에서 열원 밀도 인자의 값을 결정하였다. 계산에 사용된 부분용입과 완전용입 모드의 열원 인자들을 Table 2에 정리하였다.

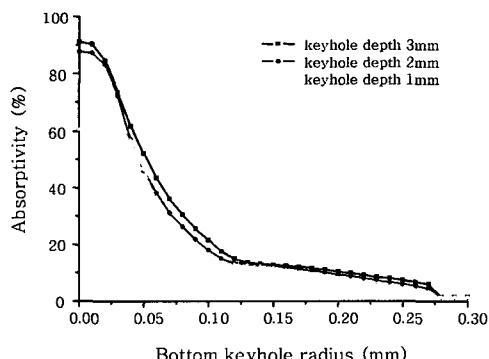
4.4 열해석 결과

열원 모델의 타당성을 검증하기 위해서 Table 1과 Table 2의 물성치와 열원 인자 값을 이용하여 열해석을 수행하였으며, 시편 두께가 2.3mm인 경우에 대한 계산 결과를 실험 결과와 비교하여 Fig. 7에 나타내었다. Fig. 7(a)에 보인 바와 같이 비드 폭을 비교적 정확하게 예측하였으며, 과도 모드의 경우에는 정상 모드의 열원 인자로 1차 해석을 수행하고 w_b/w_t 가 0.8 이상이면 과도 모드로 판단하여 과도 모드의 인자값을 이용하여 다시 계산하였다. 식(6)을 이용하여 계산한 천이 속도가 5.2m/min이므로 천이 모드는 4.7~5.7m/min의 용접속도에서 발생하며, 이는 실험으로 측정한 천이 속도의 범위인 5~6m/min와 유사하다.

Table 2 Heat source parameters

Heat source parameter	Excessive mode	Normal mode	Transition mode	Partial penetration
Keyhole depth, h	plate thickness	plate thickness	plate thickness	h_p (Eqn. 6)
Welding efficiency, η_w	35%	50%	$(\eta_{wp} + 50)/2$	η_{wp} (Eqn. 3)
Power density distribution constant, a	0.1	0.6	0.6	0.8

(a) Absorptivity with keyhole depth in partial penetration



(b) Absorptivity with bottom keyhole open radius in full penetration

Fig. 6 Calculated ideal absorptivity of simplified keyhole (TEM01* mode)

Fig. 7(b)와 (c)에 보인 바와 같이 부분용입 모드에서 용입 깊이의 계산 결과는 실험 결과와 거의 일치하였으며, 용융 모드의 변화에 따른 용융 면적의 변화를 10%의 오차 범위 내에서 계산할 수 있었다.

시편 두께가 1.6mm와 3mm인 경우에 대해 열해석 결과와 실험 결과와 비교하여 Fig. 8에 나타내었다. 판재의 두께가 1.6과 3mm 인 경우의 천이 속도는 각각 7.7과 3.8m/min로서 실험 결과와 유사하고, 비드 폭과 용입 깊이를 비교적 정확하게 예측하였다. 그러므로 용융 모드를 세분화 시키고 이에 적합한 열원 인자의 값을 사용하면 용융부의 형상을 정확하게 예측할 수 있다. 천이 영역의 용접속도를 사용하면 생산성을 최대화

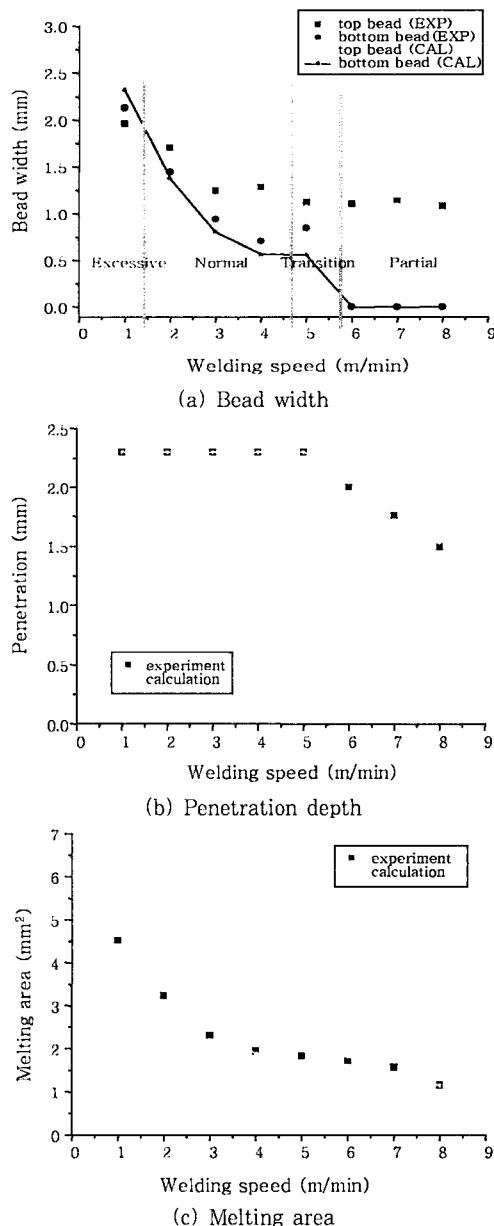


Fig. 7 Comparison between calculated and experimental results of 2.3mm thickness plate

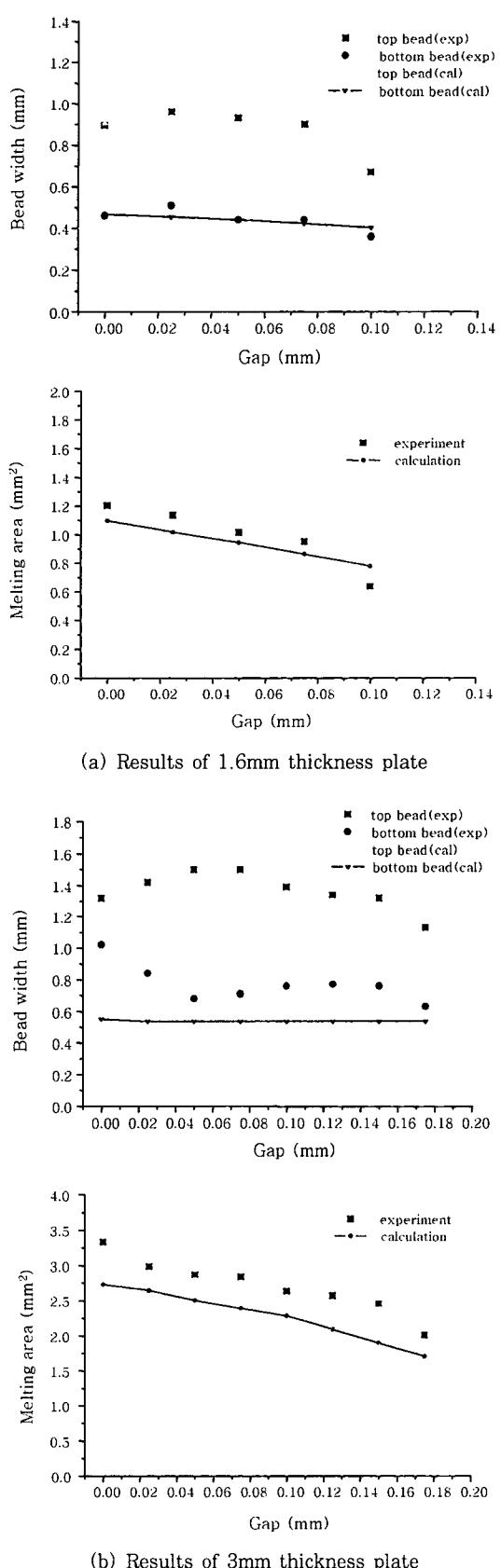


Fig. 8 Comparison between calculated and experimental results of 1.6 and 3mm thickness plate

시킬 수 있지만, 부분용입이 발생할 수 있다. 그러므로 안정적인 완전용입을 얻으면서 생산성을 향상시키려면 천이 영역의 최저 용접속도를 사용하는 것이 바람직할 것으로 생각한다.

레이저 시스템과 모재에 따라 키홀 용접부의 형상이 크게 영향을 받기 때문에 해석적인 방법만으로 열원 인자를 결정하는 것은 매우 어렵다. 그러므로 해석과 실험을 통해 얻은 적절한 열원 인자의 값을 사용해야 용접부의 형상과 온도 분포를 정확하게 예측할 수 있다. 본 연구에서 제안한 열원 모델과 열원 인자의 값을 결정하는 방법을 사용하면 실험을 최소화하고 정확한 용융부 형상을 구할 수 있을 것으로 판단한다.

5. 결 론

열원 모델링을 통한 레이저 키홀 용접에 대한 본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 레이저 키홀 용접에 적용하기 위한 3차원 가우시안 열원 모델을 제안하고, 완전용입 모드를 천이 모드, 정상 모드, 과도 모드로 세분화하였다. 각 모드에서 열원 인자인 키홀 깊이와 용접 효율 및 열원 밀도 인자를 결정하였다.

(2) 부분용입 상태의 키홀은 주기적으로 붕괴하여 불안정하며, 용접 효율을 감소시키기 때문에 키홀의 불안정을 고려하여 용접 효율을 예측하였다. 완전용입의 경우, 키홀 바닥의 열럼 정도에 따라 용접 효율이 변화하지만, 이를 해석적인 방법으로 결정하기 어렵기 때문에 실험 결과를 이용하여 세부 용융 모드에서의 용접 효율을 결정하였다.

(3) 레이저 키홀 용접에서 TEM_{00} 와 TEM_{01}^* 의 빔 모드가 흡수율에 미치는 영향은 작으며, 이는 키홀의 흡수율이 빔 모드 보다 다중 반사에 의해 큰 영향을 받기 때문이다.

(4) 3차원 가우시안 열원 모델과 용융 모드에 대한 열원 인자의 값을 이용하여 비드 폭과 용입 깊이를 비교적 정확하게 예측하였으며, 이를 통하여 제안한 열원 모델과 열원 인자를 결정하는 방법의 타당성을 검증하였다.

후 기

본 연구는 POSCO 기술연구소의 지원을 받아 수행하였으며 이에 감사 드립니다.

참 고 문 헌

1. American Welding Society : Welding handbook - Welding process, American Welding Society, 1991
2. W.W. Duley : Laser welding, Wiley Interscience, 1999
3. A. Kaplan : A model of deep penetration laser welding based on calculation of the keyhole profile, Journal of physics D Applied Physics, **27** (1994), 1805-1814
4. H. Ki, P. S. Mohanty and J. Mazumder : Modeling of high-density laser-material interaction using fast level set method, Journal of physics D Applied Physics, **34** (2001), 364-372
5. J. Y. Lee, S. H. Ko, D. Farson and C. D. Yoo : Mechanism of keyhole formation and stability in stationary laser welding, Journal of Physics D Applied Physics, **35** (2002), 1570 - 1576
6. W. Sudnik, D. Radaj and W. Erofeew : Computerized simulation of laser beam welding, modeling and verification, Journal of physics D Applied Physics, **29** (1996), 2811-2817
7. S. A. Tsirkas, P. Papanikos and T. Kermanidis : Numerical simulation of laser welding process in butt-joint specimens, Journal of Materials Processing Technology, **134** (2003), 59-69
8. W. S. Chang and S. J. Na : A study on the prediction of the laser weld shape with varying heat source equations and thermal distortion of a small structure in micro-joining, Journal of Materials Processing Technology, **120** (2002), 208-214
9. J. Dowden and P. Kapadia : A mathematical investigation of the penetration depth in keyhole welding with continuous CO₂ lasers, Journal of physics D Applied Physics, **28** (1995), 2252-2261
10. K. N. Lankalapalli, J. F. Tu and M. Gartner : A model for estimating penetration depth of laser welding process, Journal of physics D Applied Physics, **29** (1996), 1831-1841
11. S. V. Patankar : Numerical heat transfer and fluid flow, Taylor & Francis, 1980