

# 불규칙파를 위한 약비선형 약분산 파랑 방정식

## Weakly Nonlinear and Dispersive Wave Equations for Random Waves

정재상\* / 조용식\*\*  
Jung, Jae-Sang / Cho, Yong-Sik

### Abstract

In this study, a couple of ordinary differential equations which can describe random waves are derived from the Boussinesq equations. Incident random waves are generated by using the TMA (TEXEL storm, MARSEN, ARSLOE) shallow-water spectrum. The governing equations are integrated with the 4-th order Runge-Kutta method. By using newly derived wave equations, nonlinear energy interaction of propagating waves in constant depth is studied. The characteristics of random waves propagate over a sinusoidally varying topography lying on a sloping beach are also investigated numerically. Transmission and reflection of random waves are considerably affected by nonlinearity.

**keywords** : Boussinesq equations, random waves, TMA shallow-water spectrum, nonlinearity

### 요 지

본 연구에서는 Boussinesq 방정식을 이용하여, 불규칙 파랑의 직접적인 해석이 가능한 한 쌍의 상미분방정식을 유도하였다. 입사파랑은 TMA (TEXEL storm, MARSEN, ARSLOE) 천해 스펙트럼을 이용하여 재현하였으며, 지배 방정식은 4차 Runge-Kutta 법을 이용하여 적분하였다. 새로 유도된 파랑 방정식을 이용하여, 일정 수심을 진행하는 파랑의 비선형 에너지 교환효과를 계산하였다. 또한, 일정 경사면의 정현파형 지형을 통과하는 불규칙파랑의 특성에 대해 수치적으로 검토하였다. 비선형성이 불규칙파랑의 통과와 반사에 큰 영향을 주었다.

**핵심용어** : Boussinesq 방정식, 불규칙 파랑, TMA 스펙트럼, 비선형성

## 1. 서 론

천해역에서 실제로 관측되는 파랑은 매우 다양한 주기를 가지고 있다. 따라서, 실제 해안 지역에서 파랑에 의해 발생하는 다양한 문제들의 해석과 해결책 제시를 위해서는 파랑의 불규칙성의 고려가 매우 중요하다. 이와 같이 다양한 주기를 가진 파랑을 각 주기에 해당하

는 에너지로 표현하는 스펙트럼 이론이 현재 불규칙파 (random waves)의 재현 및 분석에 가장 많이 사용되고 있다(Goda, 2000). Suh 등(2001)과 정재상 등(2004)은 불규칙 파랑을 각 주기에 해당하는 규칙파로 분해한 뒤 계산 결과를 재합성하는 방법을 사용하여 유공 케이슨(perforated-wall caisson) 및 수중방파제(submerged breakwaters)를 통과하는 불규칙 파랑의 반사

\* 현대산업개발 토목설계팀 항만파트 사원  
Member, Harbor Part, Civil Engineering Team, Hyundai Development Company, Seoul 135-881, Korea  
(e-mail: fignon@hyundai-dvp.com)

\*\* 교신저자, 한양대학교 토목공학과 부교수  
Corresponding Author, Associate Professor, Dept. of Civil Engineering, Hanyang University, Seoul 133-791, Korea  
(e-mail: ysc59@hanyang.ac.kr)

를 계산하였으며, 수리모형실험 결과와 비교하였을 때 매우 만족할 만한 결과를 도출하였다. Suh 등(1997)과 Lee 등(2003)은 급변 수심을 고려한 확장형완경사방정식(extended mild-slope equation)을 이용하여, 정현파형 지형을 통과하는 불규칙 파랑을 해석하였다. 하지만, 적용 수심의 조건은 심해역(deep water) 및 중간 수심 영역(intermediate depth zone)으로 한정되었다. Liu 등(1992)은 비선형(nonlinearity)이 비교적 강한 천해역의 경우 각 주기의 파랑 성분 사이의 비선형 에너지 교환 효과를 무시할 수는 없음을 밝혔다.

Prüser 등(1986)은 시간전진법(time-marching scheme)을 이용하여 Boussinesq 방정식을 직접 해석하였으며, 긴 거리를 전파하는 불규칙파랑을 구성하는 파랑 성분 사이의 에너지 교환효과를 계산하였다. Liu 등(1992)은 파군을 구성하는 단파와 파군에 의해 생성되는 장파의 지배방정식을 따로 유도하였으며, 이들 두 방정식을 동시에 해석함으로써 장파(long waves) 및 단파(carrier waves) 사이의 에너지 교환효과를 해석하였다. 하지만, Liu 등(1992)의 방정식은 파랑의 전파에 의한 에너지 교환효과 해석은 가능하였지만, 지형변화에 따른 반사는 고려할 수 없다. Liu와 Cho(1993)는 Liu 등(1992)의 연구를 더욱 확장하여 장파 성분의 반사를 표현하는 방정식을 추가로 유도하였지만, 해저지형에 의한 단파 성분의 반사는 모두 무시하였다.

본 연구에서는 Fourier 분해법(Fourier decomposition)을 사용하여, 천해역 및 일부 중간수심 영역에서 정확한 해를 갖는 Boussinesq 방정식으로부터 파랑의 통과와 반사를 지배하는 한 쌍의 상미분 방정식을 유도하였다. 새로 유도된 방정식에서, 임의의 형상을 갖는 파랑의 자유수면변위는 Fourier 변환(Fourier transformation)을 통해 급수형태로 표현되었으며, 방정식에 포함된 비선형항에 의한 각 주기의 파랑 성분 사이의 에너지 교환효과가 고려되었다. 반사 파랑을 지배하는 방정식은 단파 및 장파를 모두 포함하며, 불규칙파랑의 직접적인 해석 또한 가능하다. 입사하는 불규칙파랑은 Bouws 등(1985)이 Hasselmann 등(1973)에 의해 제안된 JONSWAP(Joint North Sea Wave Project) 스펙트럼을 천해역으로 확장한 TMA (TEXEL storm, MARSEN, ARSLOE) 스펙트럼을 사용하여 재현하였다.

다음 장에서는 불규칙 파랑의 통과와 반사를 지배하는 방정식의 유도가 서술되었고, 3장에서는 본 모형을 Prüser 등(1986) 및 Liu 등(1992)의 모형과 비교 분석하였다. 4장에서는 일정경사면의 정현파형 지형을 통과하는 불규칙파랑의 통과 및 반사 특성과 비선형 에너지 교환효과 영향이 기술되었으며, 마지막 장에서는 결

론이 기술되었다.

## 2. 지배방정식의 유도

천해역을 통과하는 파랑의 특성을 지배하는 방정식으로 Boussinesq 방정식을 사용하였다. 지배방정식을 무차원화하기 위하여 식 (1)과 같은 무차원변수를 정의한다.

$$x = \frac{\omega_0}{\sqrt{gh_0}} x', \quad \omega = \frac{\omega'}{\omega_0}, \quad h = \frac{h'}{h_0} \quad (1)$$

$$t = k' \sqrt{gh_0} t', \quad \zeta = \frac{\zeta'}{a_0}, \quad u = \frac{h_0}{a_0 (gh_0)^{1/2}} u'$$

여기서,  $\omega_0$ 는 각진동수,  $a_0$ 는 파랑의 진폭,  $h_0$ 는 수심을 의미한다. 무차원 변수를 이용한  $x$ 축 방향 1차원 Boussinesq 방정식은 식 (2) 및 식 (3)과 같다(Peregrine, 1967; Cho와 Lee, 2003).

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \epsilon \zeta)u] = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$= \mu^2 \left[ \frac{1}{2} h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( h \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right]$$

$$+ O(\epsilon^2, \epsilon \mu^2, \mu^4) \quad (3)$$

식 (2)와 식 (3)에서,  $\zeta$ 는 자유수면변위,  $h$ 는 수심,  $u$ 는  $x$ 방향 유속을 의미한다. 식 (2)와 식 (3)의 유도과정에서  $O(\epsilon) \approx O(\mu^2) \ll 1$ 이 가정되었다. 또한,  $\epsilon$ 과  $\mu^2$ 은 각각 비선형과 분산의 크기를 나타내며, 식 (4)와 같이 정의된다.

$$\epsilon = \frac{a_0}{h_0} \ll 1, \quad \mu^2 = \frac{\omega_0^2 h_0}{g} \ll 1 \quad (4)$$

적용된 지형의 경사는 식 (5)와 같이  $O(\mu^2)$ 의 크기를 갖는 것으로 가정하였다.

$$O\left(\left|\frac{dh}{dx}\right|\right) \approx O(\mu^2) \quad (5)$$

자유수면변위와 유속은 다양한 주기를 갖는 규칙파

의 합으로 가정하였으며, 식 (6)과 같이 Fourier 급수로 표현할 수 있다.

$$\zeta(x,t) = \frac{1}{2} \sum_n \zeta_n(x) e^{-i\Omega_n t}, \quad u(x,t) = \frac{1}{2} \sum_n u_n(x) e^{-i\Omega_n t} \quad (6)$$

여기서,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  이며, 음수의  $n$ 은 양수의 켈레복소수를 의미한다. 식 (6)에서  $\Omega_n$ 은  $n$ 번째 파랑 성분의 무차원화된 각진동수를 나타내며,  $\Omega_n = n\Omega$  이다. 자유수면변위와 유속의  $x$  및  $t$ 에 대한 도함수는 식 (7)과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{i\Omega}{2} \sum_n n \zeta_n e^{-in\Omega t}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{2} \sum_n \frac{d\zeta_n}{dx} e^{-in\Omega t} \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{i\Omega}{2} \sum_n v_n e^{-in\Omega t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \sum_n \frac{du_n}{dx} e^{-in\Omega t}$$

식 (4)~식 (7)을 식 (2)와 식 (3)에 대입하여 정리하면, 식 (8)을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} n^2 \Omega^2 \zeta_n + \frac{dh}{dx} \frac{d\zeta_n}{dx} + \frac{\epsilon n}{2} \sum_{s \neq 0, n} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{n-s} \left( \frac{d\zeta_{n-s}}{dx} \right) \right\} \\ + \frac{1}{3} \mu^2 h^3 \frac{d^4 \zeta_n}{dx^4} - \frac{\epsilon h}{4} \sum_{s \neq 0, n} \frac{1}{(n-s)s} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d\zeta_s}{dx} \frac{d\zeta_{n-s}}{dx} \right) \\ + h \frac{d^2 \zeta_n}{dx^2} = O(\epsilon^2, \epsilon \mu^2, \mu^4) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,  $O(\epsilon)$ 보다 큰 항만을 정리하면 식 (9)와 같다.

$$\frac{d^2 \zeta_n}{dx^2} = -\frac{\Omega^2 n^2}{h} \zeta_n + O(\epsilon) \quad (9)$$

식 (9)는 선형 파랑방정식으로 해석하면 다음과 같다.

$$\zeta_n \sim \left[ \exp\left( in\Omega \int \frac{1}{\sqrt{h}} dx \right), \exp\left( -in\Omega \int \frac{1}{\sqrt{h}} dx \right) \right] \quad (10)$$

식 (9)를 식 (8)에 대입하여 정리하면 식 (11)과 같다.

$$\begin{aligned} h \frac{d^2 \zeta_n}{dx^2} + \frac{dh}{dx} \frac{d\zeta_n}{dx} + \left( \Omega^2 n^2 + \frac{1}{3} \mu^2 \Omega^4 n^4 h \right) \zeta_n \\ = \frac{\epsilon \Omega^2}{2h} \sum_{s \neq 0, n} \left( n^2 - (1 - \Omega^2) - \Omega^2 s^2 \right) \zeta_s \zeta_{n-s} \quad (11) \\ - \frac{\epsilon}{2} \sum_{s \neq 0, n} \left( \frac{n + \Omega^2 s}{n-s} \frac{d\zeta_n}{dx} \frac{d\zeta_{n-s}}{dx} \right) + O(\epsilon^2, \epsilon \mu^2, \mu^4) \end{aligned}$$

파랑 성분은 Liu와 Cho (1993)의 연구에서와 같이 오른쪽으로 진행하는 파랑과 왼쪽으로 진행하는 파랑으로 나눌 수 있으며, 식 (12)과 같이 표현된다.

$$\zeta_n = \zeta_n^+ + \zeta_n^- \quad (12)$$

여기서,  $\zeta_n^+$ 와  $\zeta_n^-$ 는 각각 오른쪽 및 왼쪽으로 진행하는 파랑을 뜻한다. 식 (12)에서 아래와 같은 한 쌍의 방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{d\zeta_n^+}{dx} = \frac{in\Omega}{\sqrt{h}} \zeta_n^+ + F_n, \quad \frac{d\zeta_n^-}{dx} = -\frac{in\Omega}{\sqrt{h}} \zeta_n^- - F_n \quad (13)$$

식 (13)을 이용하면 아래와 같은 식 역시 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_n}{dx} = \frac{d\zeta_n^+}{dx} + \frac{d\zeta_n^-}{dx} = \frac{in\Omega}{\sqrt{h}} (\zeta_n^+ - \zeta_n^-) \\ \frac{d^2 \zeta_n}{dx^2} = -\frac{in\Omega}{2h\sqrt{h}} \frac{dh}{dx} (\zeta_n^+ - \zeta_n^-) \\ - \frac{n^2 \Omega^2}{h} (\zeta_n^+ + \zeta_n^-) + \frac{2in\Omega}{\sqrt{h}} F_n \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)를 식 (11)에 대입하여 전개하면, 식 (15)와 같이  $F_n$ 에 관한 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_n = -\frac{1}{4h} (\zeta_n^+ - \zeta_n^-) + \frac{i\mu^2 n^3 \Omega^3 \sqrt{h}}{6} (\zeta_n^+ + \zeta_n^-) \\ - \frac{i\epsilon \Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} (n + \Omega^2 s) (\zeta_s^+ \zeta_{n-s}^+ + \zeta_s^- \zeta_{n-s}^-) \\ - \frac{i\epsilon \Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} \frac{n-2s}{n} (n + \Omega^2 s) (\zeta_s^+ \zeta_{n-s}^- + \zeta_s^- \zeta_{n-s}^+) \\ + O(\epsilon^2, \epsilon \mu^2, \mu^4) \end{aligned} \quad (15)$$

식 (15)를 식 (13)에 대입하여 전개하면 아래와 같은 한 쌍의 상미분 방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_n^+}{dx} - \left( \frac{in\Omega}{\sqrt{h}} - \frac{1}{4h} \frac{dh}{dx} + \frac{i\mu^2 n^3 \Omega^3 \sqrt{h}}{6} \right) \zeta_n^+ &= \left( \frac{1}{4h} \frac{dh}{dx} + \frac{i\mu^2 n^3 \Omega^3 \sqrt{h}}{6} \right) \zeta_n^- \\ &- \frac{i\epsilon\Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} (n + \Omega^2 s) (\zeta_s^+ \zeta_{n-s}^+ + \zeta_s^- \zeta_{n-s}^-) \\ &- \frac{i\epsilon\Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} \frac{n-2s}{n} (n + \Omega^2 s) (\zeta_s^+ \zeta_{n-s}^- + \zeta_s^- \zeta_{n-s}^+) + O(\epsilon^2, \epsilon\mu^2, \mu^4) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_n^-}{dx} + \left( \frac{in\Omega}{\sqrt{h}} + \frac{1}{4h} \frac{dh}{dx} + \frac{i\mu^2 n^3 \Omega^3 \sqrt{h}}{6} \right) \zeta_n^- &= \left( \frac{1}{4h} \frac{dh}{dx} - \frac{i\mu^2 n^3 \Omega^3 \sqrt{h}}{6} \right) \zeta_n^+ \\ &+ \frac{i\epsilon\Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} (n + \Omega^2 s) (\zeta_s^+ \zeta_{n-s}^+ + \zeta_s^- \zeta_{n-s}^-) \\ &+ \frac{i\epsilon\Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} \frac{n-2s}{n} (n + \Omega^2 s) (\zeta_s^+ \zeta_{n-s}^- + \zeta_s^- \zeta_{n-s}^+) + O(\epsilon^2, \epsilon\mu^2, \mu^4) \end{aligned} \quad (17)$$

식 (10)에 의해 다음식이 성립한다.

$$\zeta_n^+ = A_n(x)e^{in\Omega x}, \quad \zeta_n^- = B_n(x)e^{-in\Omega x}, \quad \theta = \int \frac{1}{\sqrt{h}} dx \quad (18)$$

식 (18)을 식 (16), (17)에 대입하여 정리하면 식 (19)와 식 (20)과 같이, 입사파와 반사파를 지배하는 1차 상미분방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dA_n}{dx} - \left( \frac{1}{4h} \frac{dh}{dx} - \frac{i\mu^2 n^3 \Omega^3 \sqrt{h}}{6} \right) A_n &= \left( \frac{1}{4h} \frac{dh}{dx} + \frac{i\mu^2 n^3 \Omega^3 \sqrt{h}}{6} \right) B_n e^{-2in\Omega\theta} \\ &- \frac{i\epsilon\Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} (n + \Omega^2 s) (A_s A_{n-s} + B_s B_{n-s} e^{-2in\Omega\theta}) \\ &- \frac{i\epsilon\Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} \frac{n-2s}{n} (n + \Omega^2 s) (A_s B_{n-s} e^{-2i(n-s)\Omega\theta} + B_s A_{n-s} e^{-2is\Omega\theta}) + O(\epsilon^2, \epsilon\mu^2, \mu^4) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{dB_n}{dx} - \left( \frac{1}{4h} \frac{dh}{dx} + \frac{i\mu^2 n^3 \Omega^3 \sqrt{h}}{6} \right) B_n &= \left( \frac{1}{4h} \frac{dh}{dx} - \frac{i\mu^2 n^3 \Omega^3 \sqrt{h}}{6} \right) A_n e^{2in\Omega\theta} \\ &+ \frac{i\epsilon\Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} (n + \Omega^2 s) (A_s A_{n-s} e^{2in\Omega\theta} + B_s B_{n-s}) \\ &+ \frac{i\epsilon\Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} \frac{n-2s}{n} (n + \Omega^2 s) (A_s B_{n-s} e^{2is\Omega\theta} + B_s A_{n-s} e^{2i(n-s)\Omega\theta}) + O(\epsilon^2, \epsilon\mu^2, \mu^4) \end{aligned} \quad (20)$$

여기서,  $A_n$ 과  $B_n$ 은 각각 입사파 및 반사파의 진폭을 의미하며, 식 (6)에 대입하여 식 (21)과 같은 자유수면 변위를 구할 수 있다.

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{2} \sum_n (A_n e^{in\Omega\theta} + B_n e^{-in\Omega\theta}) e^{-in\Omega t} \quad (21)$$

### 3. 비선형 에너지 교환효과의 계산

본 모형의 에너지 교환효과의 계산 결과를 검증하기 위하여, Prüser 등(1986) 및 Liu 등(1992)의 계산결과와 비교하였다. 수심은 0.5m이며,  $x=0$ 에서 입사파의 주파수 및 진폭은 각각 표 1과 같다.

표 1. 입사파의 초기조건

주파수(Hz)	진폭(m)
0.4	0.012
0.5	0.055
1.0	0.012

따라서, 비선형 및 분산은 각각  $\epsilon = 0.11$ ,  $\mu^2 = 0.50$  으로 결정되었다. 수심조건은 분산성이 비교적 큰 중간 수심영역이다. 입사된 파랑의 주파수 및 진폭은  $x = 10m$  및  $x = 50m$  지점에서 분석되었다. 분석 결과는 그림 1과 같다. Prüser 등(1986)이 시간전진법을 사용해 Boussinesq 방정식을 직접 해석한 결과 및 Liu 등(1992)이 수치적으로 계산한 결과와 거의 일치함을 보인다. 또한, 초기 파랑성분이 비선형 에너지 교환효과에 의해 다른 주기의 성분으로 전이된 것을 뚜렷하게

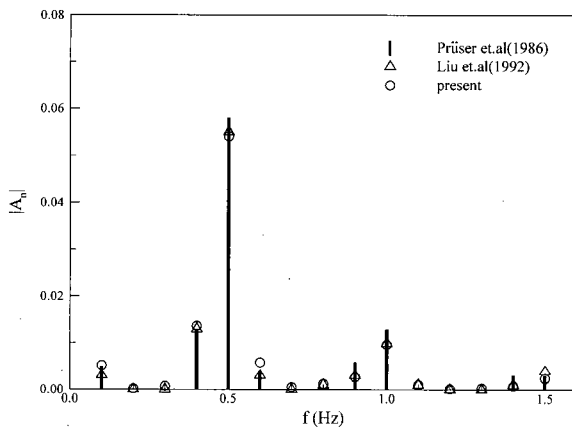
볼수 있다.

#### 4. 수치계산

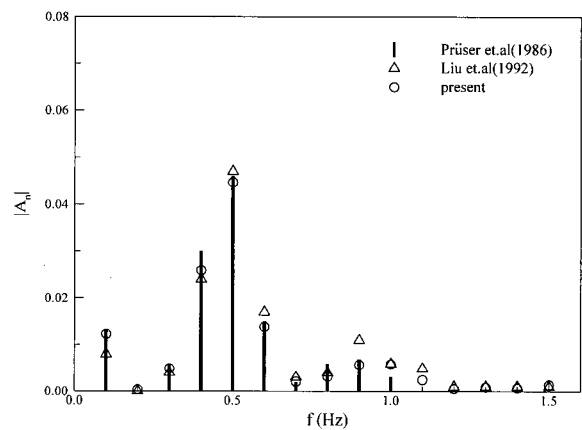
##### 4.1 지형 및 파랑조건

본 연구에서는 유도된 지배방정식을 이용하여, 그림 2와 같은 해저지형을 통과하는 불규칙 파랑의 반사를 해석하였다. 해저지형의 형태는 식 (22)와 같이 표현된다.

$$h = \begin{cases} 1 - Sx & 0 < x < L_1 \\ 1 - Sx - \rho \sin(\delta x) & L_1 < x < L_2 \\ 1 - Sx & x > L_2 \end{cases} \quad (22)$$



(a)  $x = 10m$  일때



(b)  $x = 50m$  일때

그림 1. 일정수심을 전파하는 불규칙파랑의 진폭 스펙트럼

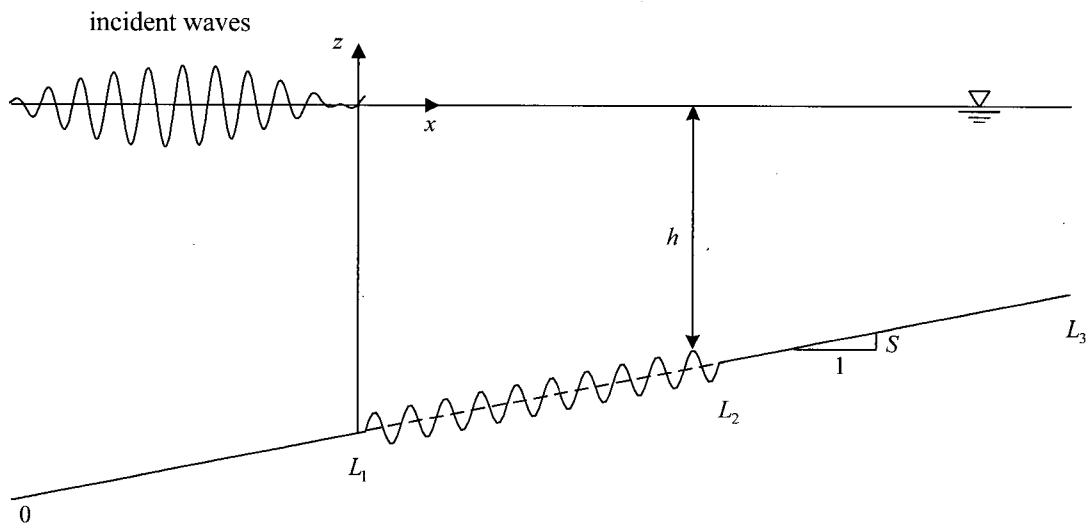


그림 2. 일정 경사면상의 정현파형 지형 개념도

식 (22)에서,  $S$ 는 해저경사,  $\rho$ 와  $\delta$ 는 각각 해저지형의 진폭과 파수를 의미한다. 식 (22)에서  $\rho$ 와  $\delta$ 의 크기는 각각  $O(\mu^2)$ 와  $O(1)$ 의 크기로 가정하였다. 식 (19)와 식 (20)은 1차 상미분방정식으로 4th-order Runge-Kutta 방법을 사용하여 적분한다.

불규칙파의 재현을 위해 TMA 스펙트럼을 사용하였으며, 에너지 밀도 스펙트럼은 식 (23)과 같다(Bouws 등, 1985).

$$S(f) = \alpha g^2 (2\pi)^{-4} f^{-5} \exp[-1.25(f/f_p)^{-4}] \times \gamma^{\exp[-(f/f_p - 1)^2/2\sigma^2]} \phi_k(f, h) \quad (23)$$

여기서,  $\gamma$ 는 극대증진계수(peak enhancement factor),  $\sigma$ 는 스펙트럼 대역계수(spectral width parameter)를 나타낸다.

식 (23)의  $\alpha$ 와  $\sigma$ 는 식 (24) 및 식 (25)와 같이 표현된다. 식 (24)의  $\alpha$ 는 유의파고를 제어하는 계수로서, 약비선형의 조건을 만족할 수 있도록 설정하였다.

$$\alpha = 1.5 \times 10^{-4} \quad (24)$$

$$\left( \begin{array}{l} \sigma = \sigma_a, f \leq f_p, \sigma_a = 0.07 \\ \sigma = \sigma_b, f \geq f_p, \sigma_b = 0.09 \end{array} \right) \quad (25)$$

식 (23)의  $\phi(f, h)$ 는 Kitaigorodskii 등(1975)에 의해 제안된 형상함수(shape function)이며, 식 (26)과 같이 표현된다.

$$\phi_k(f, h) = \left( \begin{array}{ll} 0.5\omega_h^2 & \omega_h < 1 \\ 1 - 0.5(2 - \omega_h)^2 & 1 \leq \omega_h \leq 2 \\ 1 & \omega_h > 2 \end{array} \right) \quad (26)$$

식 (26)에서는 식 (27)과 같은 조건이 사용되었다.

$$\omega_h = 2\pi f(h/g)^{1/2} \quad (27)$$

## 4.2 수치해석 및 결과분석

수치해석을 위해 적용한 지형의 조건은 아래의 표 2와 같다.

표 2. 해저지형의 조건

$\rho$ (m)	$\delta$ ( $m^{-1}$ )	$h$ (m)
1.6	0.754	10

입사 파랑의 조건은  $\gamma$ 가 20인 협폭스펙트럼(narrow-banded spectrum)과  $\gamma$ 가 2인 광폭스펙트럼(broad-banded spectrum)의 두가지 경우를 사용하였다. 극대주파수(peak frequency)  $f_p$ 는 Bragg 반사 조건인  $2k_p/\delta = 1$ 을 만족시키기 위해서, 두가지 경우 모두 0.06Hz를 사용하였다. 본 연구에서는 0~0.15Hz 사이의 에너지 스펙트럼을 50개의 규칙파로 분해하였으며, 이를 입사파랑의 초기조건으로 사용하였다. 각 규칙파의 진폭은 식 (28)을 사용하여 계산할 수 있다.

$$A_n = \sqrt{2S(f_n)\Delta f} \quad (28)$$

식 (28)에서  $\Delta f = 0.003\text{Hz}$ 이 사용되었다.

입사파의 자유수면변위는 식 (29)와 같이 표현된다.

$$\zeta(x, t) = \sum_{n=1}^{n_{\max}} A_n \cos(\omega_n t + k_n x + \xi) \quad (29)$$

식 (29)에서, 파랑의 각진동수와 파수는 선형의 분산관계식을 만족하는 것으로 가정하였으며, 식 (30)과 같은 관계식이 적용된다.

$$\omega_n = 2n\pi \times \Delta f, \quad \omega_n^2 = gk_n \tanh k_n h \quad (30)$$

식 (29)에서,  $\omega_n$ 은 입사하는 파랑의 각진동수,  $k_n$ 은 파수,  $\xi$ 는 0에서  $2\pi$ 사이의 임의의 값을 갖는 난수이다. 식 (29)를 본 연구에서 유도한 지배방정식에 적용할 때, 다음식을 이용하여 무차원화한다.

$$\Omega = \frac{2\pi \Delta f}{\omega_0}, \quad \Omega_n = \frac{\omega_n}{\omega_0} \quad (31)$$

협폭 및 광폭스펙트럼 파랑의  $x = 0$ 인 위치에서 시간의 변화에 따른 수면변위의 변화는 그림 3과 그림 4에 각각 도시되었다. 협폭스펙트럼의 경우 파랑 성분의 주파수 집중도가 높아 전반적으로 파고가 컸으며, 광폭스펙트럼의 경우는 파고가 0.5m 내외로 협폭스펙트럼에 비해 비교적 작음을 알 수 있다. 협폭스펙트럼의 유

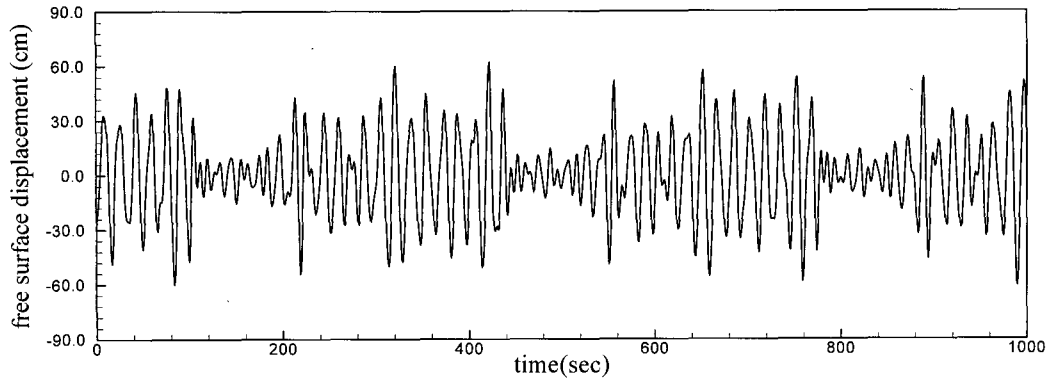


그림 3.  $x = 0$  에서 협폭 스펙트럼의 자유수면변위 ( $\gamma = 20$ )

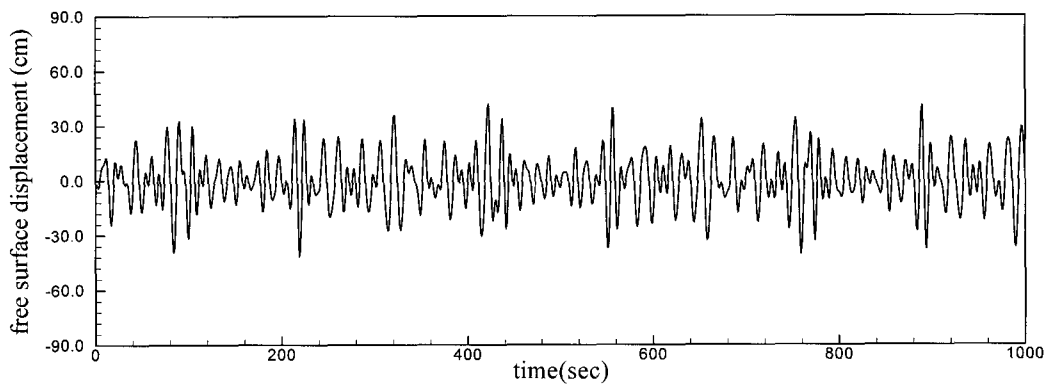


그림 4.  $x = 0$  에서 광폭 스펙트럼의 자유수면변위 ( $\gamma = 2$ )

의 파고는 0.91m이고, 광폭스펙트럼의 유의파고는 0.55m로 계산되었다.

파랑의 분산성은 극대주파수를 기준으로 했을 때,  $\mu^2 = 0.1522$  이다. 파랑의 비선형성은 각각의 스펙트럼의 유의파고를 기준으로 했을 때,  $\gamma$  가 20인 경우,  $\epsilon = 0.0456$ ,  $\gamma$  가 2인 경우,  $\epsilon = 0.0277$  으로 계산되었다. 즉, 해저지형 및 파랑 조건이 Boussinesq 방정식의 기본 조건인 약비선형과 약분산을 동시에 만족함을

알 수 있다.

정현파형 지형을 통과하는 불규칙 파랑의 Bragg 반사는 그림 5~그림 8에 각각 도시하였다. 그림 5와 그림 6은 비선형을 고려하지 않고 계산한 결과이며, 그림 7과 그림 8은 비선형을 고려한 경우이다. Bragg 반사 조건을 만족하는 극대주파수 근처에서 통과파의 스펙트럼은 크게 감소하였으며, 반사파의 스펙트럼은 증가하였다. 비선형을 고려한 경우, 파랑이 전파하면서 각 파

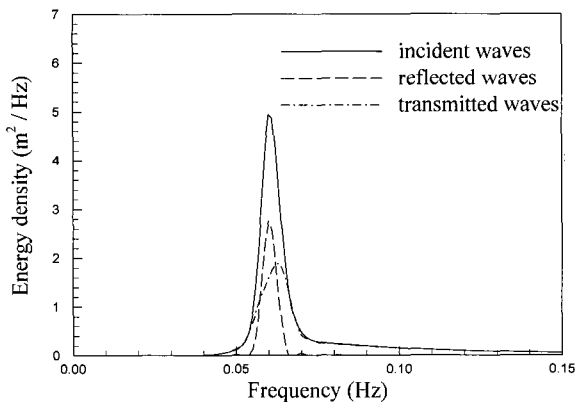


그림 5. 입사, 반사 및 통과파랑 스펙트럼 ( $\gamma = 20$ )

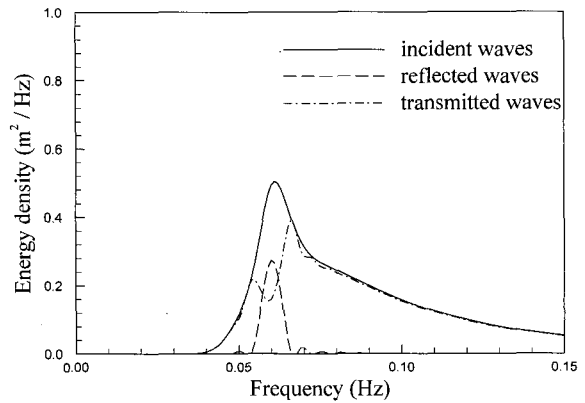


그림 6. 입사, 반사 및 통과파랑 스펙트럼 ( $\gamma = 2$ )

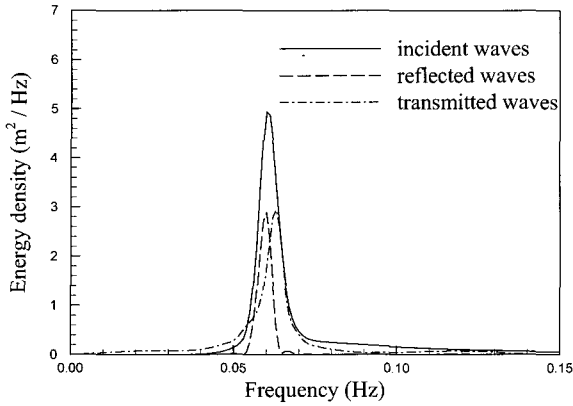


그림 7. 비선형을 포함한 입사, 반사 및 통과파랑 스펙트럼 ( $\gamma = 20$ )

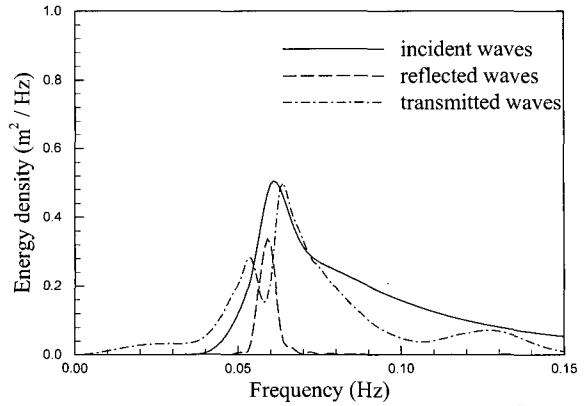


그림 8. 비선형을 포함한 입사, 반사 및 통과파랑 스펙트럼 ( $\gamma = 2$ )

랑 성분간의 에너지 교환현상을 명확히 볼 수 있다. 즉, 비선형을 고려하였을 때 자연현상에 보다 가까운 결과를 보였다.

그림 9는 극대증진계수,  $\gamma$ 의 변화에 따른 반사율의 변화를 도시한 것이다. 해저사런(rippled sand bar)의 숫자는 8인 경우와 10인 경우를 고려하였다. 파랑의 반사율은 입사하는 파랑성분의 총에너지와 반사하는 파랑성분의 총에너지의 비로 정의하였으며, 식 (32)과 같이 표현된다.

$$R_E = \frac{\sum_n |B_n|^2}{\sum_n |A_n|^2} \quad (32)$$

여기서,  $A_n$  과  $B_n$ 은 각각 입사하는 파랑의 진폭과 반사된 파랑의 진폭을 나타낸다. 그림 9에서 보는 바와 같이 극대증진계수  $\gamma$ 가 증가할수록 파랑의 반사율은 더욱 커짐을 볼 수 있다. 이와 같은 결과는 협폭스펙트

럼의 경우, Bragg 반사 조건을 만족하는 파랑으로 에너지 집중도가 크기 때문인 것으로 판단된다.

그림 10에서는 해저경사의 변화에 따른 파랑의 반사율을 도시하였다. 해저경사가 Bragg 반사에 미치는 영향은 이중인 등(1999)이 크노이드파에 대해서 검토하였고, 정재상과 조용식(2003)이 파군에 의해 생성된 장파에 대해서 검토하였다. 본 연구의 결과는 이중인 등(1999)의 결과와 마찬가지로 해저경사가 큰 경우 파랑의 반사율은 감소하였다. 이와 같은 현상의 원인은 파랑의 천수(shoaling)에 있는 것으로 판단된다. 입사된 파랑이 경사진 지형을 통과할 때, 천수효과에 의해 진폭은 증가하고 파장은 감소한다. 이 때, 파장의 감소에 의해 Bragg 반사조건에서 벗어나게 된다. 즉, 정현파형 지형의 뒷부분에서  $2k_p/\delta = 1$ 의 조건을 만족하지 않게 된다. 해저경사의 변화에 따른 무차원화된 자유수면변위는 그림 11에 각각 도시하였으며, 파랑의 천수현상을 명확히 볼 수 있다.

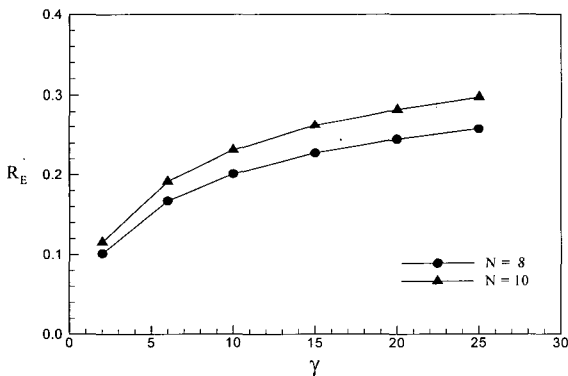


그림 9. 극대증진계수(peak enhancement factor)의 변화에 따른 반사율

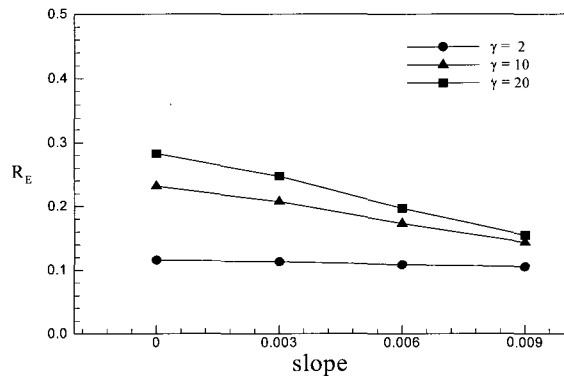
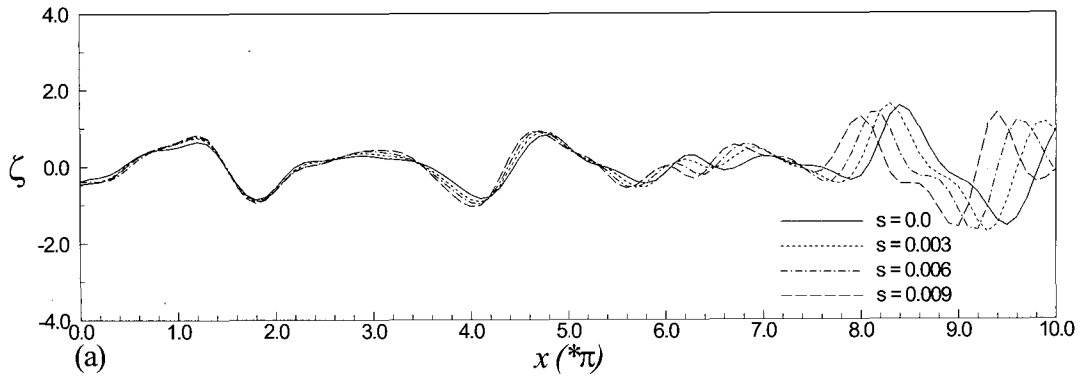
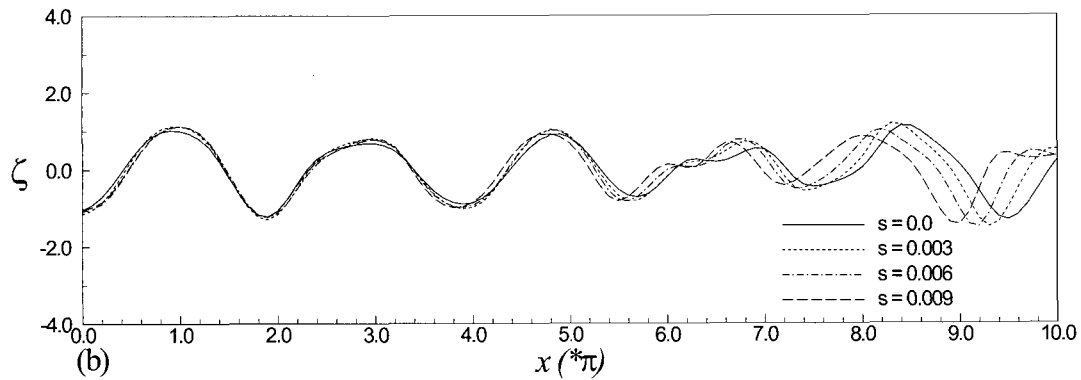


그림 10. 해저지형의 경사에 따른 반사율의 변화





(a)  $\gamma = 2$  일때



(b)  $\gamma = 20$  일때

그림 11. 경사지형에서 불규칙파랑의 무차원 자유수면 변위  
( $L_2 - L_1 = 10\pi$ ,  $\rho = 0.16$ )

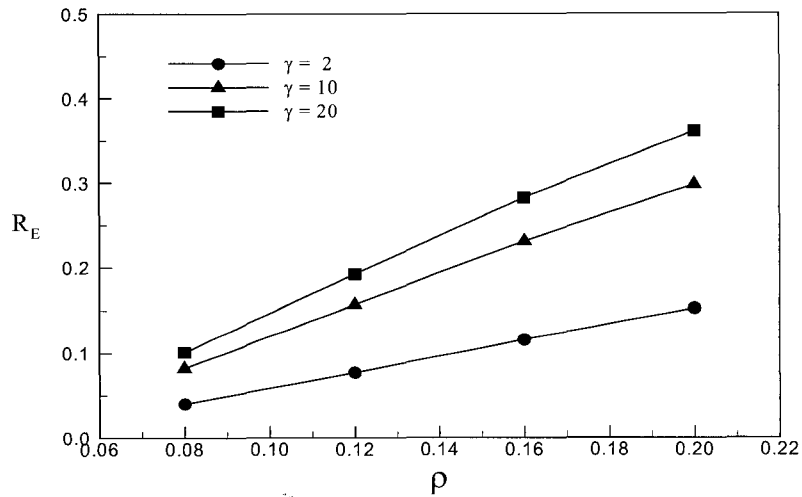


그림 12. 해저지형의 진폭 변화에 따른 불규칙 파랑의 반사율

그림 12는 해저지형의 상대진폭의 변화에 따른 파랑의 반사율을 도시한 그림이다. 해저지형의 상대진폭이 증가할수록 파랑의 반사율은 거의 선형적으로 증가하였다. 극대증진계수,  $\gamma = 20$  이고, 해저지형의 상대진폭이 0.2, 해저사런의 수가 10인 경우 36.2%에 달하는 파랑

의 에너지가 외해로 반사됨을 알 수 있다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 Boussinesq 방정식을 이용하여 약비

선형, 약분산의 특성을 갖는 파랑의 통과 및 반사를 지배하는 한 쌍의 상미분방정식을 유도하였다. 유도과정에서 입사하는 파랑은 Fourier 변환을 이용하여 표현하였으며, 따라서 주기에 상관없이 불규칙파의 통과 및 반사의 해석이 가능하다.

유도된 방정식을 이용하여 파랑이 긴 거리를 진행함에 따라 발생하는 비선형 에너지 교환현상을 해석하였으며, 정현파형 지형을 통과하는 불규칙 파랑의 전파를 해석하였다. 극대증진계수,  $\gamma=2$ 인 광폭스펙트럼의 경우와,  $\gamma=20$ 인 협폭스펙트럼의 경우를 계산하여 비교하였으며, 비선형이 불규칙 파랑의 통과와 반사에 미치는 영향을 비교 검토하였다. 천해역의 경우, 불규칙 파랑 역시 비선형의 포함 여부가 계산결과에 큰 영향을 주었다. 해저경사와 극대증진계수, 그리고 해저지형의 진폭이 불규칙 파랑의 반사에 미치는 영향 역시 검토하였다. 해저경사가 증가할 경우, 파랑의 천수에 의해 Bragg 반사조건에서 반사율은 감소하였다. 극대증진계수가 증가할 경우, 파랑의 극대주파수로의 집중도가 커져서 반사율은 증가하였으며, 해저지형의 진폭이 증가할 경우 역시 파랑의 반사율은 증가하였다.

### 감사의 글

본 연구는 산학연 공동기술개발 컨소시엄 과제로 중소기업청, 서울특별시 및 (주) 대영엔지니어링으로부터 재정적 보조를 받았기에 이에 사의를 표합니다.

### 참고 문헌

이종인, 조용식, 이정규 (1999). "경사지형에서의 Bragg 반사." **한국수자원학회논문집**, 한국수자원학회, 제32권, 제4호, pp. 447-455.

정재상, 조용식 (2003). "경사지형에서 파군에 의해 생성된 장파의 Bragg 반사." **한국수자원학회논문집**, 한국수자원학회, 제36권, 제3호, pp. 413-422.

정재상, 조대회, 황종길, 조용식 (2004). "사각형형상 불투과성 수중방파제를 통과하는 불규칙파의 반사." **한국수자원학회논문집**, 한국수자원학회, 제37권, 제9호, pp. 729-736.

Bouws, E., Gunther, H., Rosenthal, W. and Vincent, C.L. (1985). "Similarity of the wind wave spectrum in finite depth water: 1. Spectral form." *Journal of Geophysical Research*, Vol. 90, pp. 976-986.

Cho, Y.-S. and Lee, J.-I. (2003). "Resonant reflection of cnoidal waves on a sloping beach." *Journal of*

*Coastal Research*, Vol. 19, No. 4, 1011-1017.

Goda, Y. (2000). *Random seas and design of maritime structures*. World Scientific Publishing Co.

Hasselmann, K., Barnett, T.P., Bouws, E., Carlson, H., Carwright, D.E., Enke, K., Ewing, J.A., Gienapp, H., Hasselmann, D.E., Kruseman, P., Meerburg, A., Müller, P., Olbers, D.J., Richter, K., Sell, W. and Walden, H. (1973). "Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP)." *Ergänzungsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift*, Vol. 12, A8, pp. 1-95.

Kitaigorodskii, S.A., Krasitskii, V.P. and Zaslavskii, M.M. (1975). "On Phillips theory of equilibrium range in the spectra of wind-generated gravity waves." *Journal of Physical Oceanography*, Vol. 5, pp. 410-420.

Lee, C., Kim, G. and Suh, K.D. (2003). "Extended mild-slope equation for random waves." *Coastal Engineering*, Vol. 48, pp. 227-287.

Liu, P.L.-F. and Cho, Y.-S. (1993). "Bragg reflection of infragravity waves by sandbars." *Journal of Geophysical Research*, Vol. 98, pp. 22733-22741.

Liu, P.L.-F., Yoon, S.B. and Cho, Y.-S. (1992). "Shoaling of wave groups in shallow water." in *Nonlinear Dispersive Wave Systems*, edited by L. Debnath, pp. 41-56, World Scientific Publishing Co.

Peregrine, D.H. (1967). "Long waves on a beach." *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 25, pp. 321-330.

Prüser, H.-H., Shaper, H. and Zielke, W. (1986). "Irregular wave transformation in a Boussinesq wave model." *The Proceedings of The 20th International Conference on Coastal Engineering*, Taiwan.

Suh, K.D., Lee, C. and Park, W.S. (1997). "Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography." *Coastal Engineering*, Vol. 32, pp. 91-117.

Suh, K.D., Choi, J.C., Kim, B.H., Park, W.S. and Lee, K.S. (2001). "Reflection of irregular waves from perforated-wall caisson breakwaters." *Coastal Engineering*, Vol. 44, pp. 141-151.

(논문번호:05-17/접수:2005.1.26/심사완료:2005.05.12)