

<論文>

로켓비행체의 액체연료슬로시 모델링 및 SPM을 이용한 해석

강자영*

Modeling and SPM Analysis of Fuel Slosh
in a Rocket-Thrusting Vehicle

J.Y.Kang

Abstract

The objectives of the study are to present simple physical and mathematical models of liquid fuel in the tank of an aerospace vehicle such launch vehicle or missile and to investigate its dynamic stability for a parameter space. In this paper, liquid in the container is modeled as multi-mass system subject to parametric excitations, and a stability diagram for determination of stable-unstable regions of the motion is obtained by using an analytical method. Also, computer simulations are conducted at various parameter points to verify the analytical results, and time histories of motion are compared to explain the effect of variation of parameters of the system.

Keywords: Stability, Parametric Excitations, Slosh, Strutt Diagram, SPM(Strained Parameter Method)

I. 서 론

장거리 미사일이나 발사체와 같은 비행체의 연료탱크에 담긴 액체의 동적거동은 오랫동안 많은 항공우주분야 기술자들의 주목을 끌어들였다. 하드웨어의 개발 및 시험을 위한 적극적인 프로그램과 광범위한 실험실 연구로서 우주기술의 개발과 함께 발사체나 우주선에 담긴 추진 연료 또는 기타 액체의 운동은 설계의 세부사항 및 개념에 많은 영향을 끼쳐온 것으로 예상된다. 이러한 관점에서 Abramson[1]은 견고한 용기에 담긴 유체운동을 주제로 하여 많은 학자들의 수행한 연구의 결과를 하나로 엮어서 출판했다. Sumner[2]는 구형 용기에 담겨 운동을 하는 유체를 간단한 기계적 등가 모델로 대체하여 연구를 하였고, Baumgartem[3]은 Sumner가 이용한 기계적 모델은 어떤 특정한 유체의 높이를 제외하고는 구형탱크의 심한 경계 곡률때문에 유체진동의 비선형 특성을 나타내는데 부적합함을 지적하였다. Kana[4]는 일반 선형 진자와 결합된 비선형 구형 진자모델이 액체의 회전 슬로시의 모든 관찰된 거동을 예측하는데 이용될 수 있고, 이러한 복합 진자 모델의 파라미터들은 결과 유효 중량 및 모멘트 응답들이 정확하게 측정될 수 있도록 결정될 수 있다. 액체의 일부는 첫번째 모드 응답 주파수 이하부터 그 이상에 이르는 주파수 범위에 걸쳐 회전운동을 하는 구진자와 유사한 거동을 갖는다. 나머지 액체는 일반 진자처럼 거동한다. Hung[5]은 우주선의 액체 추진제 운동에 대한 배플

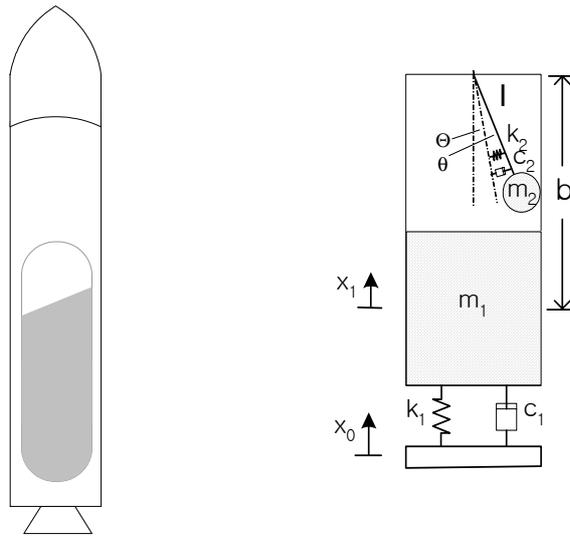
* 한국항공대학교 항공우항학과 교수
연락처 E-mail: jaykang@hau.ac.kr

(baffle)의 효과에 대해 연구를 하였으며, 슬로시 파동 자극의 진폭을 감소시키고 각운동량 및 유체모멘트 유동을 감소시키기 위해서 배플을 사용하는 수동제어방법을 제안하였다. 최근에 Kang and Cochran[6]은 Payload Assist Module, Delta Class(PAM-D) upper stage의 비행운동 불안정을 기계적/유체역학적 결합작용에 근거를 두어 분석했다. 이들은 기계적/유체역학적 결합작용을 기술하기 위해 로터-진자 모델을 이용하였으며, 관찰된 운동의 현상을 설명하기 위해 제안된 물리적 모델 및 수학적 모델의 적합성을 입증하였다. 이들은 또한 이에 대한 보완적인 연구[7]를 수행하여 회전운동을 하는 우주비행체의 내부 섭동 질량의 안정-불안정 영역을 결정하였다.

본 논문에서는 앞서의 결과들을 이용하여, 수직방향으로 섭동을 받는 비행체 내부에 탑재된 액체 슬로시 운동의 물리적 수학적 모델을 유도하고, 해석적 방법에 의한 단순화된 모델에 대한 안정-불안정 영역을 결정할 수 있는 안정도 다이어그램을 구하였다. 또한 해석적 결과를 검증하기 위해 안정도 다이어그램 내의 여러 파라미터값들을 선택하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하고, 시스템의 파라미터 값 변화가 안정도에 미치는 영향을 관찰하기 위해 시간응답곡선들을 비교 분석하였다.

II. 시스템 모델링

그림 1은 수직방향의 자극을 받는 액체엔진을 가진 대형 로켓 비행체를 단순화한 모델이다. 그림 2는 액체운동의 강성몸체부의 관성효과를 나타내는 고정체부와 액체의 슬로시질량을 나타내는 평면진자로 이루어진 2체 모델을 나타내고 있다. 고정질량 m_1 의 운동은 x_1 로 정의되고 수직방향 자극 x_0 를 받는 스프링-댐퍼 기반에 의해 지지된다.



<그림 1> 수직방향의 자극을 받는 액체 연료 탱크를 가진 로켓비행체 <그림 2> 비대칭 수직방향의 슬로싱 대한 기계적 등가모델

질량 m_1 에 ힹ지된 진자는 강성의 질량이 없는 막대와 점질량 m_2 로 구성되어 있다. 몸체 m_1 에 상대적인 운동은 각변위 Θ 와 θ 로 정의되는데, 여기에서 Θ 는 비행체가 지상에 대해 수직비행을 하다가 선회를 할 경우에 수직축에 대한 공칭 변위각을 나타내며, θ 는 공칭 변위에 대한 진자의 미세

진동을 나타낸다. k_1 과 c_1 은 스프링 상수와 구조 감쇠계수를 나타내고, k_2 와 c_2 는 점성유체의 스프링계수와 감쇠계수를 나타낸다. 이들 계수의 값은 비행체 설계자가 선택한 재료 및 유체의 물리적 특성에 의해 결정된다.

만일 일반좌표를 $\mathbf{u}(t) = (x_1, \theta)^T$ 로 정의할 경우 결과의 운동방정식은 2개의 비선형, 시변 2계 상미분 방정식의 형태를 갖는다.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{N}_f \tag{1}$$

여기에서

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \ell \sin(\Theta + \theta) \\ m_2 \ell \sin(\Theta + \theta) & m_2 \ell^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_f = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)\ddot{x}_0 + c_1\dot{x}_0 + k_1x_0 - m_2\ell(\dot{\Theta} + \dot{\theta})^2 \cos(\Theta + \theta) - m_2\ell\ddot{\Theta}\sin(\Theta + \theta) \\ m_2(\ddot{x}_0 - g)\ell \sin(\Theta + \theta) - m_2\ell^2\ddot{\Theta} \end{bmatrix}$$

x_1 및 θ 가 영일 때 시스템은 단지 공칭운동을 가지며, 식(1)은 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{N}_f = \mathbf{0} \tag{2}$$

공칭운동에 대한 평형점은 $x_0 = 0$ 및 $\Theta = \Theta_0$ 이다. 그러면 식(1)의 선형식은 다음과 같이 된다.

$$\overline{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{K}}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{3}$$

여기에서 $\mathbf{u} = (\xi(t), \vartheta(t))^T$, $\xi = x_1 / \ell$,

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)/m_2 & \sin\Theta \\ \sin\Theta & 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_1/m_2 & 0 \\ 0 & c_2/m_2\ell^2 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_1/m_2 & 0 \\ 0 & k_2/m_2\ell^2 + \cos\Theta(g - \ddot{x}_0)/\ell \end{bmatrix}.$$

편리를 위해 시간을 $\tau = \frac{\omega}{2}t$; $\omega = 2\pi T$ 와 같이 무차원으로 놓으면 각 미분항은

$$\frac{d \cdot}{dt} = \frac{\omega}{2} \frac{d \cdot}{d\tau}, \quad \frac{d^2 \cdot}{dt^2} = \frac{\omega^2}{4} \frac{d^2 \cdot}{d\tau^2} \text{ 가 된다. 이것을 식(3)에 대입하면 식(4)를 얻는다.}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{4}$$

$$\text{여기에서 } \tilde{\mathbf{u}} = (\xi(\tau), \vartheta(\tau))^T, \quad \tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)/m_2 & \sin\Theta \\ \sin\Theta & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 2c_1/\omega m_2 & 0 \\ 0 & 2c_2/\omega m_2 \ell^2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 4k_1/\omega^2 m_2 & 0 \\ 0 & 4k_2/\omega^2 m_2 \ell^2 + \cos\Theta(4g/\omega^2 \ell - \ddot{X}_0) \end{bmatrix}, \quad X_0 = x_0(\tau)/\ell.$$

III. 모델의 단순화 및 안정도 해석

일반적으로 식(1)과 같은 다차원의 비선형 시스템의 경우에는 컴퓨터 수치해석법을 많이 이용하는데, 결정해야 할 파라미터가 너무 많으면 곧 바로 컴퓨터 수치해석법을 이용하기가 용이하지 않다. 따라서 이러한 경우에는 시스템의 차원과 파라미터 수를 줄여 해석적 방법을 이용하는 것이 편리하다. 파라미터의 수는 보통 여러 개의 파라미터를 결합하여 한두개의 새로운 파라미터를 도입하고, 시

시스템에 적합한 안정도 해석법을 적용하여 새로운 파라미터 공간에서의 시스템의 안정-불안정의 범위를 구하면 된다.

본 연구는 로켓 비행체의 연료 슬로시 안정도에 관심이 있기 때문에 시스템을 슬로시 운동 방정식으로 단순화시켜 슬로시 안정도에 관여하는 파라미터의 안정-불안정 영역을 구하고자 한다. 이렇게 슬로시 운동이 해석이 끝나면 로켓 비행체의 설계자는 슬로시 운동의 안정을 보장하는 파라미터의 영역에서 설계 파라미터의 값을 선정하고 이것을 전체 시스템에 확장하여 전체시스템의 안정성이 보장되는 나머지 파라미터를 결정하면 될 것이다. 본 연구에서는 후자에 대한 연구는 다음의 연구 주제로 남겨놓고자 한다.

무차원 시간 τ 의 향으로 T 주기를 갖는 기반의 가속도는 다음식을 만족한다.

$$\ddot{X}_0(\tau) = \ddot{X}_0(\tau + T) \tag{5}$$

$T = \pi$ 일 때 식(5)를 Fourier 시리즈로 전개하고, 기본주기 π 의 향으로 표시된 식(5)는 다음과 같다.

$$\ddot{X}_0(\tau) = A \cos 2\tau \tag{6}$$

만일 연료탱크가강성의 지지 기반을 갖고, 액체의 점성율이 무시할 수 있으면 식(4)는 다음과 같이 고전적 Mathieu 방정식의 형태로 귀착된다[9].

$$\ddot{\vartheta} + (\delta - 2\varepsilon \cos 2\tau)\vartheta = 0 \tag{7}$$

여기에서 $\delta = 4K_2 / \omega^2 m_2 \ell^2 + 4g \cos \Theta / \omega^2 \ell$, $\varepsilon = A \cos \Theta / 2$ 이다. 비행체가 지상에 대해 수직비행을 할 때 파라미터 δ 및 ε 는 최대 값을 갖는다. 다음과 같이 SPM섭동 전개법을 이용하여 식(7)에 대한 해 및 전이곡선 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 의 식을 구하기로 한다. SPM 방법은 ε 이 작은 시스템의 안정도 전이곡선을 구하는데 적합하다[8]. Floquet 이론에 기초를 둔 이 방법은 해가 π 또는 2π 의 주기를 갖는다는 가정하에 이용할 수 있으며, 이 가정이 맞는 범위에서 시스템 파라미터의 값을 결정하면 된다. 따라서, 이 방법을 이용하여 구한 해는 전이곡선상에서는 정확하지만 전이곡선의 근방에서는 유효하지 않다. 그러나 본 논문은 시스템의 전이곡선을 구하는 것이 목표이기 때문에 이전 논문에서 활용하였던 Multiple Sales method등에 비해 사용이 간편한 SPM을 사용하는 것이 유리하다. 식(7)의 해의 주기가 π 또는 2π 이고, 구하고자 하는 해와 전이곡선식을 다음과 같이 섭동 전개의 형태로 놓자.

$$\vartheta(\tau; \varepsilon) = \vartheta_0(\tau) + \varepsilon \vartheta_1(\tau) + \varepsilon^2 \vartheta_2(\tau) + \dots \tag{8}$$

$$\delta = \delta_0 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots \tag{9}$$

식(8) 및 (9)를 식(7)에 대입하고, ε 의 동차 지수의 계수들을 등치시키면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\ddot{\vartheta}_0 + \delta_0 \vartheta_0 = 0 \tag{10}$$

$$\ddot{\vartheta}_1 + \delta_0 \vartheta_1 = -\delta_1 \vartheta_0 + 2\vartheta_0 \cos 2\tau \tag{11}$$

$$\ddot{\vartheta}_2 + \delta_0 \vartheta_2 = -\delta_2 \vartheta_0 - \delta_1 \vartheta_1 + 2\vartheta_1 \cos 2\tau \tag{12}$$

주기 π 를 가진 식(10)의 해는 식(13)과 같다.

$$\vartheta_0 = a \cos 2n\tau + b \sin 2n\tau \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{13}$$

한편 $T = 2\pi$ 인 식(10)의 해는 식(14)와 같다.

$$\vartheta_0 = a \cos(2n-1)\tau + b \sin(2n-1)\tau \quad n = 1, 2, \dots \tag{14}$$

본 논문에서는 $\delta_0 = 0, 1, 4, 16$ 를 고려하기로 한다.

$\delta_0 = 0(T = \pi)$, $\vartheta_0 = a$ 일 때 식(11)은 다음과 같다.

$$\ddot{\vartheta}_1 = -a\delta_1 + 2a \cos 2\tau \tag{15}$$

ϑ_1 가 주기적이기 위해서는

$$\delta_1 = 0 \tag{16}$$

그러면 식(15)의 해는

$$\vartheta_1 = -0.5a \cos 2\tau \tag{17}$$

ϑ_0 및 ϑ_1 을 식(12)에 대입하면

$$\ddot{\vartheta}_2 = -a(\delta_2 + 0.5) - 0.5a \cos 4\tau \tag{18}$$

ϑ_2 가 주기성을 갖는 해가되기 위해서는

$$\delta_2 = -\frac{1}{2} \tag{19}$$

그러므로, 원점에서 시작된 파라미터의 전이곡선은 다음과 같다.

$$\delta = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \tag{20}$$

이 곡선과 함께 다음의 해를 얻는다.

$$\vartheta = a\left[1 - \frac{1}{2}\varepsilon \cos 2\tau + O(\varepsilon^2)\right] \tag{21}$$

비슷한 과정을 반복하면 $\delta_0 = 1$ 일 때의 전이곡선과 관련 해를 얻을 수 있다.

$$\delta = 1 \pm \varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \tag{22}$$

$$\vartheta = a\left[\cos \tau - \frac{1}{8}\varepsilon \begin{Bmatrix} \cos 3\tau \\ \sin 3\tau \end{Bmatrix} + O(\varepsilon^2)\right] \tag{23}$$

또한 $\delta_0 = 4$ 일 때의 전이곡선 및 해 또한 다음과 같다

$$\delta = \begin{Bmatrix} 4 + 5/12\varepsilon^2 \\ 4 - 1/12\varepsilon^2 \end{Bmatrix} + O(\varepsilon^3) \tag{24}$$

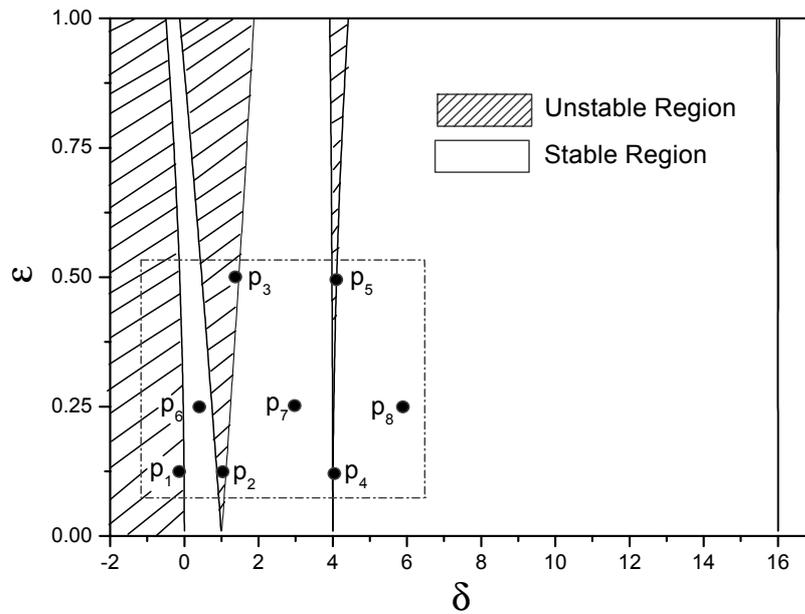
$$\vartheta = \begin{pmatrix} a \cos 2\tau + \frac{1}{4}\varepsilon a(1 - \frac{1}{3}\cos 4\tau) + O(\varepsilon^2) \\ b \sin 2\tau - \frac{1}{12}\varepsilon b \sin 4\tau + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix} \tag{25}$$

$\delta_0 = 16$ 일 때의 전이곡선 및 해는 다음과 같다.

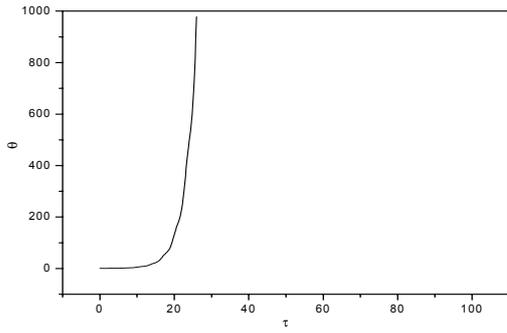
$$\delta = 16 \pm \frac{1}{30}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \tag{26}$$

$$\vartheta = \begin{pmatrix} a \cos 4\tau - \frac{1}{4}\varepsilon a(3 \cos 2\tau - \frac{1}{5}\cos 6\tau) + O(\varepsilon^2) \\ b \sin 4\tau - \frac{1}{4}\varepsilon a(3 \sin 2\tau - \frac{1}{5}\sin 6\tau) + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix} \tag{27}$$

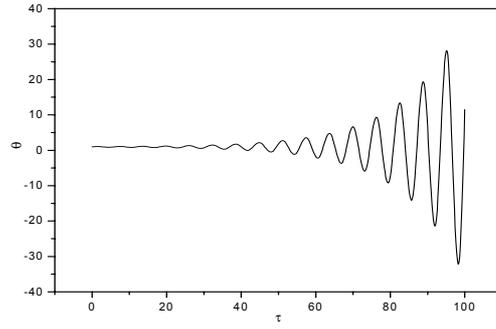
위에서 구한 전이곡선을 이용하여 안정도 다이어그램을 작도하면 식(7)에 대한 Strutt 다이어그램을 얻는다(그림 3참조). 그림 3에서 실선들은 $\varepsilon-\delta$ 평면을 안정-불안정의 영역으로 분리하는 전이값의 자취를 나타낸다. 빗금친 부분은 불안정영역을 나타내고, 그 나머지 부분은 안정영역을 나타낸다. 그러나, 실제 시스템은 설계 파라미터의 특정값을 이용하기 때문에 1개 이상의 공진이 시스템에 발생할 수는 없다. 해석결과를 검증하기 위해 그림 3에서 파라미터의 여러 점의 값을 이용하여 수치 시뮬레이션을 수행하였다. 그림3의 파라미터 평면에 있는 여러 점에 해당하는 파라미터 조합에 대한 θ 의 시간 응답곡선들이 그림 4~11에 주어져 있다. 그림 4~8은 2가지 형태의 발산 해를 보여주고 있다. 첫번째 형태는 해가 시간이 경과함에 따라 진동 없이 지수적으로 증가하는 형태이다(그림 4). 반면에 두번째 형태는 해가 진동을 하면서 진폭이 점점 증가하는 형태이다(그림 5~8). 예를 들어 P1처럼 $\delta=0$ 인 밴드에 있는 점들은 첫번째 형태의 발산해의 특성을 가지며, P2, P3, P4, P5 와 같이 $\delta=1$ 및 $\delta=4$ 밴드에 속한 점들은 두번째 형태의 발산해의 특성을 갖는다. 그림 7은 P4에 해당하는 시간 응답곡선인데 진폭의 변화가 거의 일정함을 볼 수 있다. 또한 예상할 수 있듯이, ε 의 값이 증가할 때 불안정 시간 응답 곡선은 급격하게 증가하는 것을 관찰 할 수 있다. 그림 9~11은 점 P6~P8에 해당하는 수렴 해들을 보여주고 있다. 이들은 모두 주기성을 갖는 운동을 하는데, ε 가 일정하고 δ 가 증가할 때 주기가 빨라짐을 관찰할 수 있다.



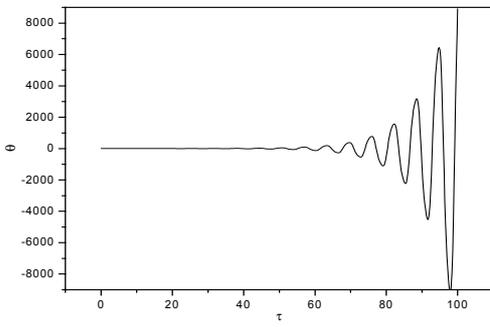
<그림 3> Ince-Strutt 안정도 다이어그램



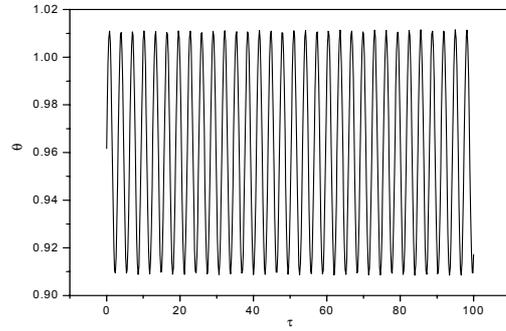
<그림 4> P1 에서의 ϑ 의 시간 응답곡선



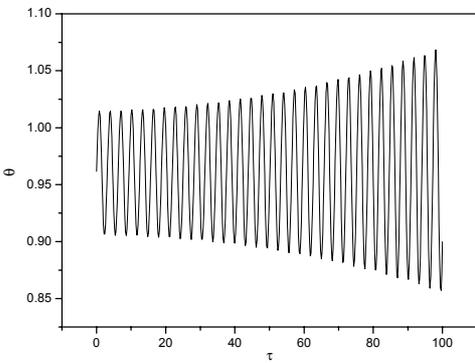
<그림 5> P2 에서의 ϑ 의 시간 응답곡선



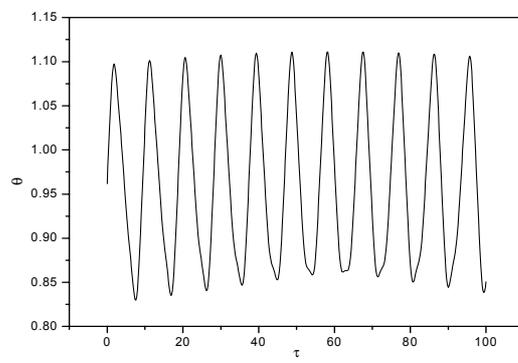
<그림 6> P3 에서의 ϑ 의 시간 응답곡선



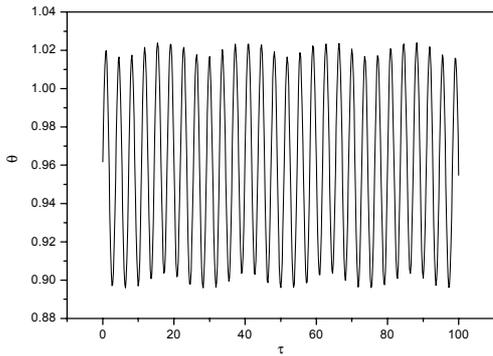
<그림 7> P4 에서의 ϑ 의 시간 응답곡선



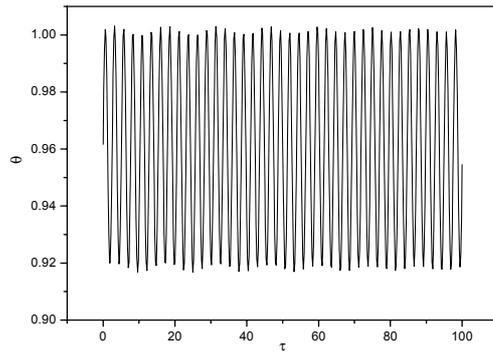
<그림 8> P5 에서의 ϑ 의 시간 응답곡선



<그림 9> P6 에서의 ϑ 의 시간 응답곡선



<그림 10> P7 에서의 θ 의 시간 응답곡선



<그림 11> P8 에서의 θ 의 시간 응답곡선

IV. 결론 및 향후 과제

계수자극을 받는 항공우주 비행체의 연료 탱크에 탑재된 액체를 2개의 질량 시스템으로 모델링 하였다. 이 질량시스템은 액체연료의 고정부분의 관성효과를 나타내는 고정물체와 액체의 슬로싱 질량을 나타내는 평면진자로 구성되었다. 그리고 시스템의 공칭운동으로부터 진동운동을 분리함으로써 운동방정식을 2개의 비선형 2계 미분방정식으로 모델링 하였다. 액체 슬로시 운동의 거동을 심층 분석하기 위해 연료탱크의 기반이 강건하다고 가정함으로써 시스템이 액체의 슬로시운동 특성만을 나타낼 수 있는 하나의 운동방정식으로 감소시켰다. 섭동이론을 이용하여 단순화된 시스템의 안정도 다이아그램을 구하고, 해석적 방법으로 구한 결과를 검증하기 위해 안정도 다이어그램에 있는 여러 파라미터 점들에 대한 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다. 파라미터 공간내의 각 점들에 대한 시뮬레이션 결과는 안정도의 특성이 예측한 바와 일치하였고, 따라서 해석적으로 구한 안정도 다이어그램이 적정하다는 결론을 얻었다. $\delta=0$ 인 점에서 시작된 불안정 대역에 있는 점들에서의 슬로시 운동의 시간 응답곡선은 비주기성 운동을 하며, 시간경과와 더불어 지수적으로 발산하는 것으로 관찰되었다. 반면에 다른 불안정 대역에 있는 점들에서의 시간응답 곡선은 시간이 경과함에 따라 진폭이 지수적으로 증가하는 주기성 운동을 갖는다.

본 논문에서는 시스템의 전체 운동에 대한 방정식이 유도되었지만 액체 연료의 슬로시 운동을 심층 분석하기 위해서 감소된 시스템 모델에 대해서만 안정성분석 연구가 이루어졌다. 따라서, 향후 연구에서는 모든 시스템 운동방정식을 이용하는 안정도 분석을 수행하고자 한다. 특히, 액체 연료가 점성을 가질 경우 이 것이 안정에 미치는 영향을 심층 연구하고자 한다.

V. 후 기

이 논문은 2004년도 한국항공대학교 교비지원 연구비에 의하여 지원된 연구의 결과임.

참 고 문 헌

- [1] Abramson, N. H. (ed), "The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers with Applications to Space Vehicle Technology," NASA SP-106, 1966.
- [2] Sumner, I.E., Stofan, A.J., and Sharmo, A.J., "Experimental Sloshing Characteristics and a Mechanical Analogy of Liquid Sloshing in a Scale-Model Container Liquid Oxygen Tanks," NASA TM X-999, August 1964.
- [3] Sayer, B.A. and Baumgarten, J.R., "Pendulum Analogy for Nonlinear Fluid Oscillations in Spherical Containers," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, Dec. 1981, pp. 769-772.
- [4] Kana, D.D., "A Model for Nonlinear Rotary SLOSH in Propellant Tanks," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 24, No.2, March 1987, pp.169-177.
- [5] Hung, R. J. Effect of the Baffle on the Spacecraft Fluid Propellant Viscous Stress and Moment Fluctuations, *Transactions of the JSASS*, Vol. 36, No. 110, 1993, pp. 187-207.
- [6] Kang, J. Y. and Cochran, J. E., Jr., "Resonant Motion of a Spin-Stabilized Thrusting Spacecraft," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No.3, 2004, pp.356-364.
- [7] Kang, J. Y. and Cochran, J. E., Jr., "Stability Analysis of Slosh Motion with Periodicity in a Spinning Spacecraft," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No.3, 2005, pp.562-567.
- [8] Nayfeh, A.H. and Mook, D.T., *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, New York, 1979, pp. 56-59.
- [9] Guckenheimer, J. and Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.*, Springer-Verlag, 1987, pp.29-32.