

<論文>

경사진 Follower Thrust에 의한 로켓의 공력탄성진동

엄재익*, 박정선**

Aeroelastic Vibration of a Rocket under a Deflected Follower Thrust

Jae-ik Um* and Jungsun Park**

Abstract

The stable motion has been judged by mathematical modeling of the conditions that a rocket flies flexibly to take an active part in atmosphere. In this paper, the rocket conditions consist of the air speed, thrust and automatic attitude control. Aerodynamic force, a critical trust and a critical air speed are determined by comparing mathematical knowledges with eigenfrequencies of vibration equation. And then rocket object model is designed. Parameters and eigenfrequencies are used in dimensionless forms for in general applications by eliminating restrictions such as dimension, weight and select of materials.

Key Words : Stability(안정성), Eigenfrequencies(고유진동수), Automatic Attitude Control(자동자세제어), Dimensionless parameter(무차원 매개변수), Follower Force(중속동력)

I. 서론

로켓과 같은 항공우주 발사체 구조물은 보와 같은 간단한 형태의 구조적인 모델로 개략적으로 표현할 수 있다. 구조적 모델에서는 기본적으로 작용하는 몇 가지 힘들을 고려하게 되는데 이를 정역학적인 해석 방법으로 쉽게 수식화 할 수 있다[1]. 항공우주 구조물을 티모셴코 빔(Timoshenko's beam)과 같은 간단한 구조물로 형상화 하고 이것을 유한요소법이나 리츠 방법(Ritz method)으로 그 물체에 발생하는 진동을 해석하는 연구[2]가 진행되었고, 여기에 추력 벡터의 방향을 가변적으로 고려하여 상황에 따라 수시로 변화시키는 follower force로 해석하기도 했다[3]. 로켓을 보로 모델링하여 보의 길이 방향의 여러 위치에 외력(또는 추력)을 가하고 고유진동수를 구하여 로켓의 운동 안정성을 해석하도록 시도되어 왔다[4]. 또한 항공기의 부분적인 특정한 진동과 이웃하는 다른 위치에서의 상대적인 운동과의 상관관계를 수식화하는 노력[5]과 여기에 항공역학적인 조건들이 추가되어 일반적인 운동의 상태에 대해 연구하려는 노력이 이어져 오고 있다[6].

본 연구에서의 고려되는 로켓 모델은 일반적인 중장거리 탄도 미사일을 모델로 사용하였다. 일정 궤도에서 비행하고 있는 로켓은 그 궤도에서의 안정된 운동을 수행하기 위해 때때로 자동자세제어(automatic attitude control) 시스템이 작동된다. 여기서는 일정한 각도로의 벡터로 추력의 방향조절이 가능한 힌지노즐(hinged nozzle) 로켓 엔진이 사용되고 있다. 이를 이용한 자동 자세제어는 외부, 또는 내부의 여러 영향 하에서 불안정한 로켓의 자세를 힌지노즐을 이용하여 추력의 벡터방향을 조

* 모스크바항공대학교 항공우주공학부 석사과정

** 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부 교수

연락처 e-mail : jungsun@hau.ac.kr

절함으로써 바로 잡는다. 항공역학적인 힘이 고려된 경우에서 고유진동수로 안전영역에서 비행하는 로켓의 추력, 비행속도 등의 임계값을 구한다. 또한 불안정한 운동영역에서 자동자세제어 시스템이 작동되는 상황에 대해 안정영역에서 임계값을 구하는 과정과 유사한 과정을 수행하여 구한 고유진동수로부터 또다시 안정영역의 비행에 대한 해석을 수행하게 된다.

수치 계산에서 사용되는 매개변수들을 무차원화 하여 로켓 설계 시 여러 조건들의 사용에 의한 반복해석을 피하게 된다. 즉 무차원 매개변수를 사용하지 않는 경우에는, 로켓의 길이나 무게, 또는 재료의 선정에 따른 특정한 초기 조건에 따른 해석을 각각의 조건마다 수행해야 한다. 그렇지만 무차원 매개변수를 사용하는 경우에는 초기조건들과 관계없이 수치적인 해석을 통해 구한 결과들에 특정한 초기조건들을 대입하여 로켓해석을 수행 하여 로켓설계에 유용한 결과를 도출하게 된다.

II. 본 론

1.1 모델링

간략히 로켓을 두부(nose fairing section), 꼬리날개가 위치한 후미부(tail section), 그리고 나머지 몸체부분으로 구분하였다. 각 각의 부분들은 제각기 그 모양에 따라 공력하중이 작용된다. 원뿔(cone) 또는 원추형(ogive)의 로켓 두부는 강체(rigid body)로 가정 될 수 있으며 무게는 무시된다. 또 엔진이 탑재되어 있는 후미부 역시 몸체와는 상대적으로 강체로 가정 된다. 몸체는 길이방향의 축력(압축력 또는 인장력)과 횡방향의 전단력이 작용되는 보(beam)로 모델링 된다. 또, 로켓이 운동하면서 발생하게 되는 진동을 유한요소법으로 해석한다.

1.2 문제의 일반화

1.2.1 좌표 설정

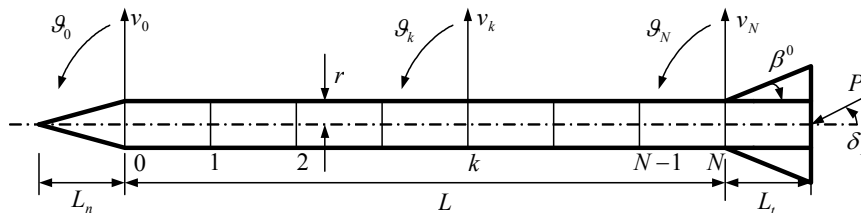


Fig. 1. Generalized coordinate of a rocket model

Fig. 1에서 보는 바와 같이 두부의 길이가 L_n 이고 몸체의 길이 L , 후미부의 길이 L_t 인 로켓을 N 개의 유한 요소로 나누었다. 로켓의 길이 방향과 직각을 이루고 있는 횡방향 변위(v)와 회전각(ϑ)을 성분으로 할 때 $k-1$ 번째와 k 번째 단면을 경계로 하는 k 번째 유한 요소에서의 국부좌표에서의 성분은 다음과 같다($k = 1, 2, \dots, N$).

$$q^{(k)} = [\bar{v}_{k-1} \vartheta_{k-1} \bar{v}_k \vartheta_k] \tag{1}$$

여기서 $\bar{v}_{k-1} = \frac{v_{k-1}}{R}$, $\bar{v}_k = \frac{v_k}{R}$ 는 각각 $k-1$ 번째와 k 번째 무차원 횡방향 변위이고, R 은 모든 유한요소

에서의 특정 단위길이(characteristic unit length)이다.

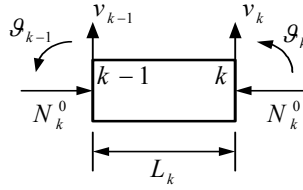


Fig. 2. Local coordinate for the k-th finite element of rocket model

유한한 길이의 유한요소 경계에서 횡방향 변위와 회전각은 각각 식(2)와 식(3)과 같이 비틀림과 압축력이 작용하는 단면이 균일한 선형보의 정역학적인 해법으로 근사화 된다[1-2].

$$\frac{\tilde{v}(\xi, t)}{R} = \bar{v}_{k-1} \varphi_0(\xi) + \vartheta_{k-1} \phi_0(\xi) + \bar{v}_k \varphi_1(\xi) + \vartheta_k \phi_1(\xi) \quad (2)$$

$$\vartheta(\xi, t) = \bar{v}_{k-1} \eta_0(\xi) + \vartheta_{k-1} \chi_0(\xi) + \bar{v}_k \eta_1(\xi) + \vartheta_k \chi_1(\xi) \quad (3)$$

여기서 $\varphi_0(\xi) = 1 - (1 - \kappa)\xi - 3\kappa \xi^2 + 2\kappa \xi^3$

$$\phi_0(\xi) = \frac{1 + \kappa}{2} l_k \xi - \frac{1 + 3\kappa}{2} l_k \xi^2 + \kappa l_k \xi^3$$

$$\eta_0(\xi) = l_k \frac{d\varphi_0}{d\xi} + (1 - \kappa) l_k$$

$$\chi_0(\xi) = l_k \frac{d\phi_0}{d\xi} + \frac{1 - \kappa}{2}$$

$$\kappa = \left(1 + \frac{12}{L_k^2} \frac{EI}{GA_{sk}}\right)^{-1}, \quad \xi = \frac{x}{L_k}, \quad l_k = \frac{L_k}{R} \text{이다.}$$

κ 는 보의 전단과 관계되는 단면계수로서 만약 보에 전단력을 무시한다면 전단 강성(shear stiffness) $GA_{sk} \rightarrow \infty$ 이 되므로 $\kappa = 1$ 이 된다. ξ 는 보에서의 무차원 좌표이며 여기서 x 는 길이가 $L_k = \frac{L}{N}$ 인 k 번째 유한요소의 길이 차원의 좌표이다. l_k 는 k 번째 유한요소의 무차원 길이이다. k 번째 요소에서의 굽힘 강성(bending stiffness) EI_k 과 전단 강성 GA_{sk} 은 모든 유한 요소에서 일정하다.

1.2.2 위치 에너지와 운동에너지 정의

k 번째 유한요소에서의 압축력 N_k^0 (로켓의 길이방향에 따른 압축력은 Fig. 3에서 나타내고 있다.) 이 작용하는 k 번째 유한요소에서 발생하는 굽힘과 비틀림에 의한 위치 에너지는 식(4)와 같다.

$$\Pi^{(k)} = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} (EI_k \vartheta'^2 + GA_{sk} (v' - \vartheta)^2 - N_k^0 v'^2) dx = \frac{1}{2} q^{(k)T} K_k q^{(k)} \quad (4)$$

여기서 $K_k = \frac{EI}{R^3} (\bar{K} - p \bar{N}_k \bar{P}_k)$, $p = \frac{PR^2}{EI}$, $\bar{N}_k^0 = \frac{1}{P} N_k^0$

$$\bar{K}_k = \frac{EI_k}{EI} \cdot \begin{pmatrix} \frac{12\kappa}{l_k^3} & \frac{6\kappa}{l_k^2} & -\frac{12\kappa}{l_k^3} & \frac{6\kappa}{l_k^2} \\ & \frac{1+3\kappa}{l_k} & -\frac{6\kappa}{l_k^2} & \frac{3-3\kappa}{l_k} \\ & & \frac{12\kappa}{l_k^3} & -\frac{6\kappa}{l_k^2} \\ & & & \frac{1+3\kappa}{l_k} \end{pmatrix}$$

$$\bar{P}_k = \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa^2/5}{l_k} & \frac{\kappa^2}{10} & \frac{-1-\kappa^2/5}{l_k} & \frac{\kappa^2}{10} \\ & l_k\left(\frac{1}{12} + \frac{\kappa^2}{20}\right) & -\frac{\kappa^2}{10} & l_k\left(-\frac{1}{12} + \frac{\kappa^2}{20}\right) \\ & & \frac{1+\kappa^2/5}{l_k} & -\frac{\kappa^2}{10} \\ & & & l_k\left(\frac{1}{12} + \frac{\kappa^2}{20}\right) \end{pmatrix}$$

K_k 는 k 번째 유한요소의 강성행렬로 보의 순수 강성행렬 \bar{K}_k 과 추력에 의한 강성행렬 \bar{P}_k , 무차원 추력 p , 무차원 압축력 \bar{N}_k^0 으로 구성되어 있다. EI 는 굽힘 강성(bending stiffness) 이다.

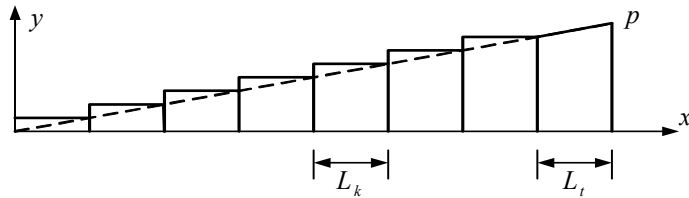


Fig. 3. Compression along the length of the rocket

한편 로켓은 변형을 하며 일정 횡방향 변위와 회전각에 의해 운동에너지가 발생하는데, k 번째 유한 요소의 운동에너지는 식(5) 와 같다.

$$T^{(k)} = \frac{1}{2} \int_0^{L_k} (m_k \dot{v}^2 + J_k \dot{\vartheta}^2) dx = \frac{1}{2} q^{(k)T} M_k q^{(k)} \quad (5)$$

여기서

$$M_k = \frac{m_k}{m} \begin{pmatrix} \frac{l_k}{3} \left(1 + \frac{\kappa}{10} + \frac{\kappa^2}{70}\right) & \frac{l_k^2}{12} \left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{10} + \frac{\kappa^2}{35}\right) & \frac{l_k}{12} \left(1 - \frac{\kappa}{5} - \frac{\kappa^2}{35}\right) & \frac{l_k^2}{12} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{10} + \frac{\kappa^2}{35}\right) \\ & \frac{l_k^3}{120} \left(1 + \frac{\kappa^2}{7}\right) & \frac{l_k^2}{12} \left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{10} - \frac{\kappa^2}{35}\right) & \frac{l_k^3}{120} \left(-1 + \frac{\kappa^2}{7}\right) \\ & & \frac{l_k}{3} \left(1 + \frac{\kappa}{10} + \frac{\kappa^2}{70}\right) & -\frac{l_k^2}{12} \left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{10} + \frac{\kappa^2}{35}\right) \\ & & & \frac{l_k^3}{120} \left(1 + \frac{\kappa^2}{7}\right) \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{J_k}{mR^2} \begin{pmatrix} \frac{6\kappa^2}{5l_k} & 3\kappa\left(-\frac{1}{6} + \frac{\kappa}{5}\right) & -\frac{6\kappa^2}{5l_k} & 3\kappa\left(-\frac{1}{6} + \frac{\kappa}{5}\right) \\ l_k\left(\frac{1}{3} - \frac{\kappa}{2} + \frac{3\kappa^2}{10}\right) & -3\kappa\left(-\frac{1}{6} + \frac{\kappa}{5}\right) & \frac{l_k}{2}\left(\frac{1}{3} - \kappa + \frac{3\kappa^2}{5}\right) & -3\kappa\left(-\frac{1}{6} + \frac{\kappa}{5}\right) \\ \frac{6\kappa^2}{5l_k} & & & -3\kappa\left(-\frac{1}{6} + \frac{\kappa}{5}\right) \\ l_k\left(\frac{1}{3} - \frac{\kappa}{2} + \frac{3\kappa^2}{10}\right) & & & \frac{l_k}{2}\left(\frac{1}{3} - \kappa + \frac{3\kappa^2}{5}\right) \end{pmatrix}$$

이고 M_k 는 k 번째 유한요소의 관성행렬이다. m_k 와 J_k 는 일정한 유한 길이인 k 번째 유한요소의 질량과 질량 관성 모멘트이고 m 은 단위길이 당 특정 질량(characteristic mass per unit length)이다.

1.2.3 공력 분포 하중의 고려

로켓에서 발생하는 공력 분포하중은

$$q(x, t) = -\rho V^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \right) S(x) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \quad (6)$$

와 같고 얇은 물체이론[2]을 기초로 정의되었다. 여기서 V 는 비행속도이고 ρ 는 공기밀도이다. 로켓의 몸체부에서의 단면적 $S(x)$ 는 식(7)과 같다.

$$S(x) = \pi r^2 \quad (7)$$

꼬리날개가 있는 후미부에서의 단면적 $S(x)$ 는 식(8)과 같다.

$$S(x) = \pi \left(a^2 - r^2 + \frac{r^4}{a^2} \right) \quad (8)$$

식(7)과 식(8)에서 r 은 로켓몸체의 반지름 $a(x)$ 는 로켓중심에서 꼬리날개 가장자리까지의 거리이다.

로켓의 겉 표면에서 발생하는 공기에 의한 영향을 무시 ($\rho S \ddot{v} \approx 0$)한 공기역학 분포하중에 대한 일의 변분(variation)은 식(9)와 같다.

$$\delta W_{a/d} = -\rho V^2 \int_{-L_n}^{L+L_i} \left(S''v' + Sv'' + S' \frac{\dot{v}}{V} + 2S \frac{\dot{v}'}{V} \right) \delta v dx \quad (9)$$

식 (9)를 부분적분 하면 식(10)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta W_{a/d} = & -\rho V^2 \left\{ \int_{-L_n}^0 (S'v') \delta v dx + \sum_{k=1}^N \int_0^{L_i} (Sv'') \delta v dx + \int_L^{L+L_i} (S'v') \delta v dx \right\} \\ & -\rho V \left\{ \int_{-L_n}^0 (2S'\dot{v}' + S'\dot{v}) \delta v dx + 2 \sum_{k=1}^N \int_0^{L_i} (S'\dot{v}) \delta v dx + \int_{L_i}^{L+L_i} (2S'\dot{v}' + S'\dot{v}) \delta v dx \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

과 같은 적분 식으로 다시 쓸 수 있고 이를 다시 식(2), (3)과 유한요소를 고려하면 다음 식 (11)과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta W_{a/d} = & -\rho V^2 \pi R^3 \left\{ \vartheta_0 \delta \bar{v}_0 - \alpha_0 l_n \vartheta_0 \delta \vartheta_0 + \sum_{k=1}^N \delta q^{(k)T} \bar{B}_k q^{(k)} + (\bar{S}_t - 1) \vartheta_N \delta \bar{v}_N + (\bar{S}_{l_t} - \bar{J}_t) \vartheta_N \delta \vartheta_N \right\} \\ & -\rho V \pi R^4 \left\{ \dot{\bar{v}}_0 \delta \bar{v}_0 + \alpha_0 l_n \dot{\vartheta}_0 \delta \bar{v}_0 - \alpha_0 l_n \dot{\vartheta}_0 \delta \vartheta_0 + \sum_{k=1}^N \delta q^{(k)T} \bar{D}_k \delta q^{(k)} \right\} \\ & -\rho V \pi R^4 \left\{ (\bar{S}_t - 1) \dot{\bar{v}}_N \delta \bar{v}_N + (\bar{S}_{l_t} + \bar{J}_t) \dot{\vartheta}_N \delta \bar{v}_N + (\bar{S}_{l_t} - \bar{J}_t) \dot{\vartheta}_N \delta \vartheta_N + \bar{S}_{l_t}^2 \dot{\vartheta}_N \delta \vartheta_N \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $l_n = \frac{L_n}{R}$, $l_t = \frac{L_t}{R}$, $\bar{S}_t = \frac{S(L_t)}{\pi R^2}$, $\bar{J}_t = \frac{1}{\pi R^3} \int_0^{L_t} S(x) dx$ 이며 각각 무차원 두부 길이, 무차원 후미부 길이, 무차원 후미부 단면적, 무차원 후미부 면적 관성모멘트이다. 강체로 가정된 로켓의 두부가 원뿔형일 때의 길이방향에 따른 반지름은 $\frac{r}{L_n}x$ 이고 원추형일때 $r\left(\frac{2x}{L_n} - \frac{x^2}{L_n^2}\right)$ 로 α_0 의 값은 각각 $\frac{1}{3}$, $\frac{8}{15}$ 이다.

\bar{B}_k 는 식(12)와 같이 정의 된다.

$$\bar{B}_k = C_k^T B_k C_k, \quad \bar{D}_k = C_k^T D_k C_k \tag{12}$$

여기서 B_k 는 다음과 같다.

$$B_k = [b_{ij}]_{4 \times 4}, \quad b_{ij} = \frac{(i-1)(j-2)}{i+j-3} \frac{1}{l_k} \quad (i=1, \dots, 4; j=3, 4)$$

$$b_{ij} = 0 \quad (i=1, \dots, 4; j=1, 2)$$

$$D_k = [d_{ij}]_{4 \times 4}, \quad d_{ij} = \frac{2(j-1)}{i+j-2} \quad i=1, \dots, 4; j=3, 4$$

$$d_{ij} = 0 \quad (i=1, \dots, 4; j=1, 2)$$

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa - 1 & \frac{1 + \kappa}{2} l_k & 1 - \kappa & \frac{-1 + \kappa}{2} l_k \\ -3\kappa & -\frac{1 + 3\kappa}{2} l_k & 3\kappa & -\frac{1 - 3\kappa}{2} l_k \\ 2\kappa & \kappa l_k & -2\kappa & \kappa l_k \end{pmatrix}$$

1.2.4 추력에 의한 변분

로켓 길이방향에 $\vartheta_N + \delta_P$ 의 각도를 가지고 부가되는 추력 P 에 의한 비 보존 외부 일(non conservative work)의 변분을 살펴보자. 여기서 $\delta_P(t)$ 는 Fig. 4와 같이 각도 ϑ_N 만큼 회전된 추진력 벡터와 로켓 길이 방향이 이루는 각도이다. 추력에 의한 외부일의 변분은 식(13)과 같다.

$$\delta W_P = -P(\vartheta_N + \delta_P) \delta(v_N + L_t \vartheta_N) = -\frac{EI}{R} p(\vartheta_N + \delta_P) (\delta \bar{v}_N + l \cdot \delta \vartheta_N) \tag{13}$$

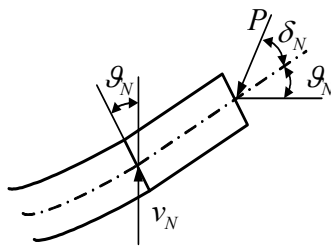


Fig. 4. Follower thrust vector in the tail section

1.2.5 무차원 진동 방정식

앞에서 변분식들로부터 구해진 이 시스템의 위치 에너지와 운동 에너지는 식(14)와 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\Pi = \sum_{k=1}^N \Pi^{(k)}, \quad T = \sum_{k=1}^N T^{(k)} + T^{(t)} \quad (14)$$

여기서 $T^{(t)}$ 는 이미 강체로 가정되어 있는 후미부의 운동에너지로 라그랑지 방법(Lagrangian method)에 의한 진동방정식을 식 (4), (5)와 공기역학적 분포하중에 의한 일의 변분식(9), 추진력에 의한 일의 변분식(13)이 고려된 형태이다.

이 시스템에서 변위와 회전각 성분은 국부 좌표로 $q^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, N$)로부터 식(15)와 같이 표현할 수 있다.

$$q = \left[\frac{v_0}{R} \vartheta_0 \quad \frac{v_1}{R} \vartheta_1 \quad \frac{v_2}{R} \vartheta_2 \quad \dots \quad \frac{v_N}{R} \vartheta_N \right]^T \quad (15)$$

진동방정식은 식(16)의 무차원 시간 τ 에 종속되며

$$\tau = t \sqrt{\frac{EI}{m r^4}} \quad (16)$$

다음의 행렬식 형태로 나타내어진다.

$$\tilde{M} \frac{d^2 q}{d\tau^2} + \alpha \sigma \tilde{D} \frac{dq}{d\tau} + (\tilde{K} + p \tilde{G} + \alpha \sigma^2 \tilde{B}) q = -p \tilde{F} \delta_T(\tau) \quad (17)$$

여기서 $\alpha = \frac{\pi R^2 \rho}{m}$, $\sigma = V \sqrt{\frac{m R^2}{EI}}$, $p = \frac{P R^2}{EI}$ 이며 각각 무차원 질량, 무차원 비행속도, 무차원 추력을 의미한다. 또 $\tilde{F} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 1]^T$ 는 $2N+2$ 차원 벡터로 마지막 두개의 요소가 1인 이유는 꼬리부분에 추력과 자동자세제어 시스템 작동에서 오는 회전각을 고려한 것이다.

k 번째 유한요소의 강성 행렬 \tilde{K}_k ($k=1, 2, \dots, N$)를 식(14)와 같이 모든 유한요소에 대해 고려하면 전체의 강성행렬 \tilde{K} 를 구할 수 있다.

같은 방식으로 k 번째 유한요소의 질량 행렬 M_k ($k=1, 2, \dots, N$)과 로켓 두부와 후미부의 강체의 집중질량(Concentrated mass)를 조합하면 전체의 질량 행렬 \tilde{M} 을 구하게 된다.

$$\begin{aligned} \Delta m_{2N+1, 2N+1} &= \frac{m_t}{m} l_t, \\ \Delta m_{2N+1, 2N+2} &= \Delta m_{2N+2, 2N+1} = \frac{m_t}{m} l_t^2, \\ \Delta m_{2N, 2N} &= \frac{1}{3} \frac{m_t}{m} l_t^3 + \frac{J_t}{m R^2} l_t \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 m_t , J_t 는 로켓 후미부의 질량과 질량 관성 모멘트이다.

행렬 $\tilde{N}_k \tilde{P}_k$ ($k=1, 2, \dots, N$)와 추진력에 의한 조건식(19)를 고려해 식(20)을 강성행렬 \tilde{G} 를 구하게 된다.

$$\Delta g_{2N+1, 2N+2} = 1, \quad \Delta g_{2N+1, 2N+1} = \frac{1}{2} \frac{L_t}{L + L_t} l_t \quad (19)$$

공력에 의한 전체 행렬 \tilde{D} 는 k 번째 유한요소의 공력에 대한 행렬 \bar{D}_k ($k=1,2,\dots,N$)와 로켓 두부와 후미부의 조건식(20)을 고려하여 구한다.

$$\begin{aligned} \Delta d_{1,1} &= 1, \quad \Delta d_{1,2} = -\Delta d_{2,1} = \alpha_0 l_n, \\ \Delta d_{2N+1,2N+1} &= \bar{S}_t - 1, \quad \Delta d_{2N+1,2N+2} = \bar{S}_t l_t + \bar{J}_t, \\ \Delta d_{2N+2,2N+1} &= \bar{S}_t l_t - \bar{J}_t, \quad \Delta d_{2N+2,2N+2} = \bar{S}_t l_t^2 \end{aligned} \quad (20)$$

공력에 대한 전체 행렬 \tilde{B} 는 k 번째 유한요소에 대한 공력행렬 \bar{B}_k ($k=1,2,\dots,N$)와 로켓 두부와 후미부의 조건식(21)을 고려하여 구하게 된다.

$$\begin{aligned} \Delta b_{1,2} &= 1, \quad \Delta d_{2N+1,2N+1} = \bar{S}_t - 1, \\ \Delta b_{2N+1,2N+2} &= \bar{S}_t - 1, \quad \Delta b_{2N+2,2N+2} = \bar{S}_t l_t - \bar{J}_t \end{aligned} \quad (21)$$

Fig. 5에서 전체 행렬 $\tilde{M}, \tilde{K}, \tilde{G}, \tilde{D}, \tilde{B}$ 이 로켓의 두부와 후미부 항의 값을 추가하여 구성되는 형태를 보여주고 있다.

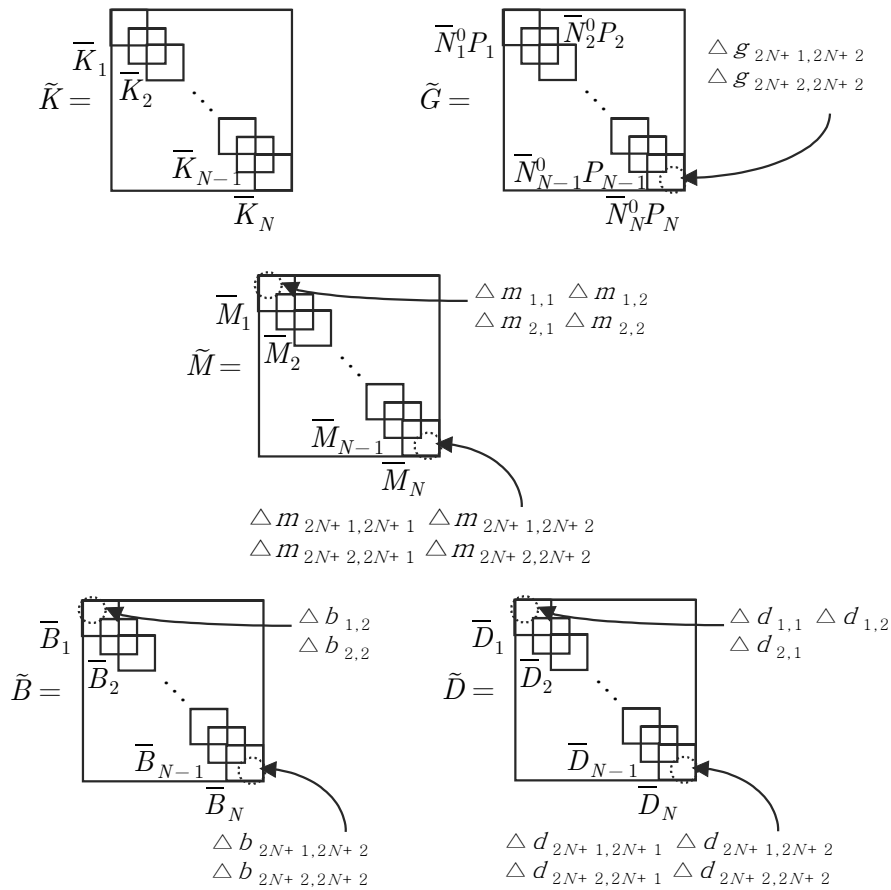


Fig. 5. Addition of nose and tail terms for global matrices

1.2.6 자동자세제어

자동적으로 방향이 제어되는 로켓의 경우에 방정식 (17)은 자동자세제어의 방향지시에 의해 몇 가지의 요소를 더 고려해야 한다. 예를 들어 현지 노즐에 의한 관성 운동을 무시 하고, 로켓 후미부의 추력벡터와 로켓 길이방향 사이의 각도와 각속도로 인한 가장 간단하게 회전하려는 관성을 고려하는 경우이다. 자동자세제어에 의한 추력 벡터와 로켓 길이방향 사이의 각도는 다음과 같다.

$$\delta_T = \delta_T^P + k_0 \dot{\theta}_0 + k_1 \ddot{\theta}_0 \quad (22)$$

여기서 δ_T^P 는 로켓에 이미 주어진 추력벡터와 로켓 길이방향 사이의 각이다. k_0 과 k_1 은 노즐의 회전과 관계되는 계수들이다.

자동자세제어 시스템이 작동되는 경우에 식 (17)는 행렬 \tilde{G} 와 행렬 $\alpha\sigma \cdot \tilde{D}$ 에 다음과 같은 자세제어에 관한 항들을 추가하게 된다.

$$\begin{aligned} \Delta g_{2N+1,2} &= k_0, \quad \Delta g_{2N+2,2} = k_0 l_t, \\ \frac{\Delta d_{2N+1,2}}{\alpha\sigma} &= k_0 P, \quad \frac{\Delta d_{2N+2,2}}{\alpha\sigma} = k_1 P l_t \end{aligned} \quad (23)$$

1.3. 예 제

1.3.1 초기 조건

본 논문 예제에 쓰이는 로켓의 특징은 원통형의 몸체로 k 번째 유한요소의 길이 L_k 로 몸체의 길이 L 이 N 개의 유한요소로 나누어져 있다. ($k=1, 2, \dots, N$, $N=16$) 몸체의 원통 모양은 기하학적으로 일정한 형태를 지니어 질량과 굽힘 강성, 전단 강성 역시 일정하다 ($m_k = m$, $EI_k = EI$, $GA_{s,k} = GA_s$). 특정 단위길이 R 은 로켓 몸체의 단면 반지름으로 한다 ($R=r$). Fig. 1과 같이 후미부는 삼각형 형태의 꼬리날개이고 후퇴각 β^0 가 30° 일때 $\bar{S}_t = 30.603$, $\bar{J}_t = 95.263$ 이다. 로켓두부가 원뿔형으로 가정 할 때 $\alpha_0 = 1/3$ 이다.

무차원 추력 p 와 무차원 비행속도 σ 가 일정하게 변할 때의 무차원 계수들과 물성치들을 다시 표로 정리하면 다음과 같다.

Table 1. Parameters and material properties

N	16	R	r	κ	1	α_0	1/3	β^0	30°
EI_k	EI	$GA_{s,k}$	GA_s	l_k	2	m_k	m	J_k/mR^2	0.25
\bar{S}_t	30.603	\bar{J}_t	95.263	l_n	4	m_n	0	J_n	0
k_0	0 or 1	k_1	0	l_t	8	m_t/m	1	J_t/mR^2	0.25

1.3.2 결과 및 해석

로켓이 가진 고유의 무 차원 고유진동수 $w_i \sqrt{\frac{mR^4}{EI}}$ 를 순서대로 나열하면 다음과 같다.

$$w_0^{(1)} = 0, w_0^{(2)} = 0, w_1 = 0.01407, w_2 = 0.03983, w_3 = 0.08116, w_4 = 0.13914, w_5 = 0.21385 \dots$$

여기서 $w_0^{(1)} = 0$, $w_0^{(2)} = 0$ 는 제로고유진동수(zero eigenfrequency)로 로켓의 강체 진동을 의미한다.

Fig. 6 ~ 10은 무차원 추력 p 와 무차원 비행속도 σ 가 일정하게 변할 때의 식 (17)에서의 무차원 고유진동수($\lambda = \alpha \pm wi$)의 상태를 실수부(α)와 허수부(w)로 나누어 도식화한 것이다.

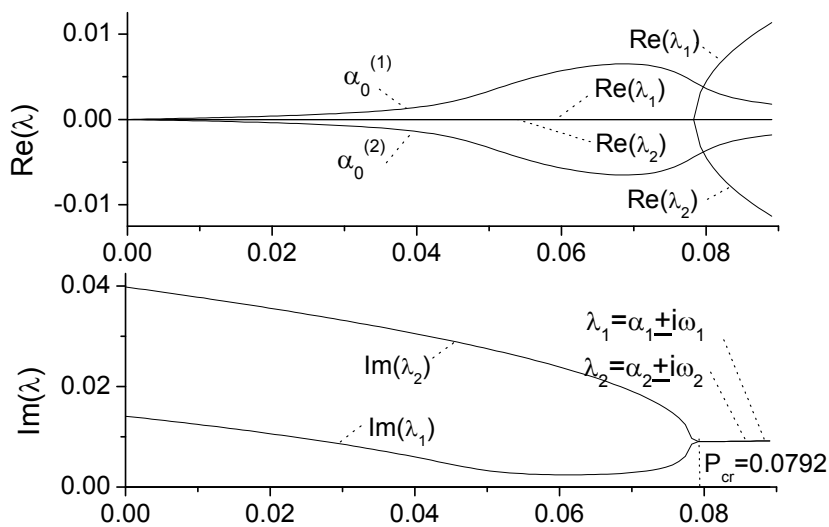


Fig. 6. Non-dimensional eigenfrequency dependence on non-dimensional thrust ($\sigma = 0, k_0 = 0$)

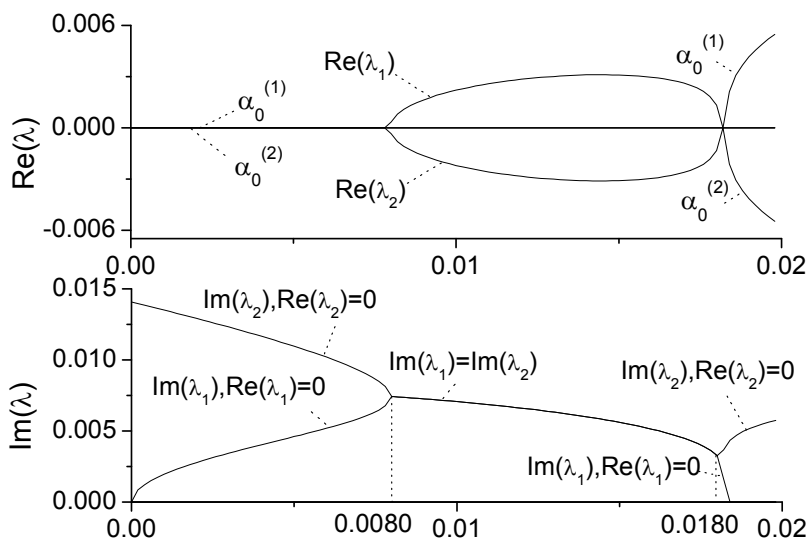


Fig. 7. Non-dimensional eigenfrequency dependence on non-dimensional thrust ($\sigma = 0, k_0 = 1$)

Fig. 6을 살펴보면 맞바람이 없는 비행($\sigma = 0$)에서 모든 추력 범위에서 불안정한 운동을 하고 있다. 실수 부 만이 존재하는 $\alpha_0^{(1)}, \alpha_0^{(2)}$ 은 강체처럼 로켓이 변형하지 않은 채 운동한다. 만약 $\alpha_0^{(1)} > 0$ 이

라면 로켓의 운동은 정적(static)으로 불안정하다. 이는 진동은 없지만 횡방향 변위와 회전각이 발산하는 불안정한 운동의 형태를 보이고 있다. 무차원 임계 추력이 0.0792이상에서는 진동의 진폭이 발산하는 동적(dynamic)으로 불안정한 운동을 한다.

Fig. 7은 Fig. 6의 상황에서 안정적인 자세제어를 위해 방향을 제어한다. 무차원 추력 값이 0.0080 이하에서 안정적인 운동영역을 보이고 있다. 0.0080이상 0.018이하의 영역에서 로켓의 고유진동수는 증근을 가지게 된다. 이는 불안정한 진동의 발산을 가져오는 운동을 의미한다. 0.018이상에서는 정적으로 불안정한 운동으로 변위와 회전각이 발산하고 있다. Fig. 6과 Fig. 7은 결론적으로 맞바람이 없는 상태에서 로켓은 불안정한 운동으로 비행하지만 이 때 작동되는 자동자세제어로 0.0080이하의 영역에서 안정적인 비행을 하게 된다.

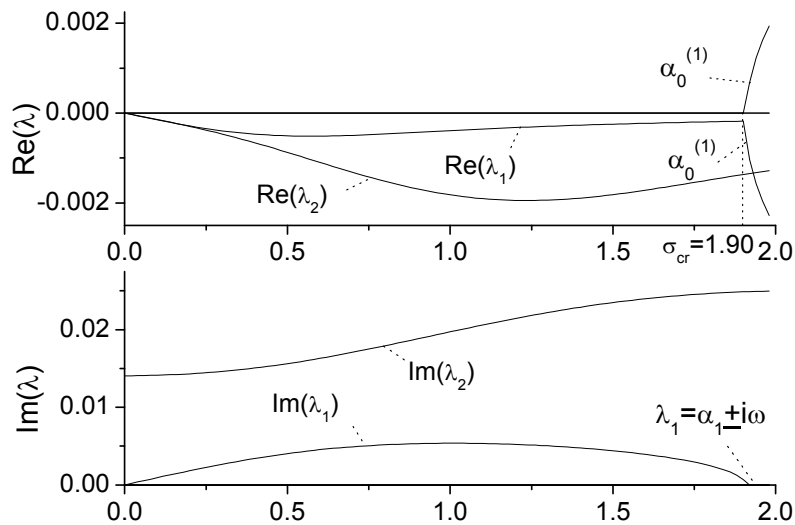


Fig. 8. Non-dimensional eigenfrequency dependence on non-dimensional air speed ($k_0 = 0$, $p = 0$)

Fig. 8은 추력이 없는 상태($p=0$)에서 맞바람 속도에만 의존한 비행 상태이다. 무차원 고유진동수의 실수부가 0보다 작다는 점은 진동하는 로켓 변위와 회전각의 진폭이 수렴한다는 것을 의미하며 이는 안정적인 운동이 진행된다는 점을 말한다. Fig. 8에서 무차원 임계 비행 속도는 1.90이고 이 값 이하의 영역에서 안정적으로 비행한다. 무 차원 임계 비행 속도 이상에서 로켓은 Fig. 6에서의 상황과 같이 실수부는 있지만 허수부는 없는 정적 불안정 운동이다.

Fig. 9는 Fig. 8에서의 추력이 없는 상태와 Fig. 7에서 로켓이 안정적으로 운동 할 수 있는 영역내의 무차원 추력 값 0.002를 준 상태를 결합한 것이다. 전체적으로 약간의 불안정한 상태를 보이고 있다 무차원 임계 비행 속도 1.9이하에서 진동이 발생하며 진폭이 발산한다. 또 무차원 임계 비행속도 이상에서는 정적으로 불안정한 상태이다.

Fig. 10은 Fig. 9에서의 불안정한 비행 상태에서 자세가 제어되고 있을 때를 나타내고 있다. 무차원 임계 비행 속도 1.9이하에서 안정적인 상태를 보여주고 있고, 1.9이상에서 정적으로 불안정한 비행 상태가 나타난다. 그림 8에서의 불안정한 비행은 자세가 제어되면서 무차원 임계 비행 속도 이하의 영역에서 안정적인 비행으로 복구됨을 나타내고 있다.

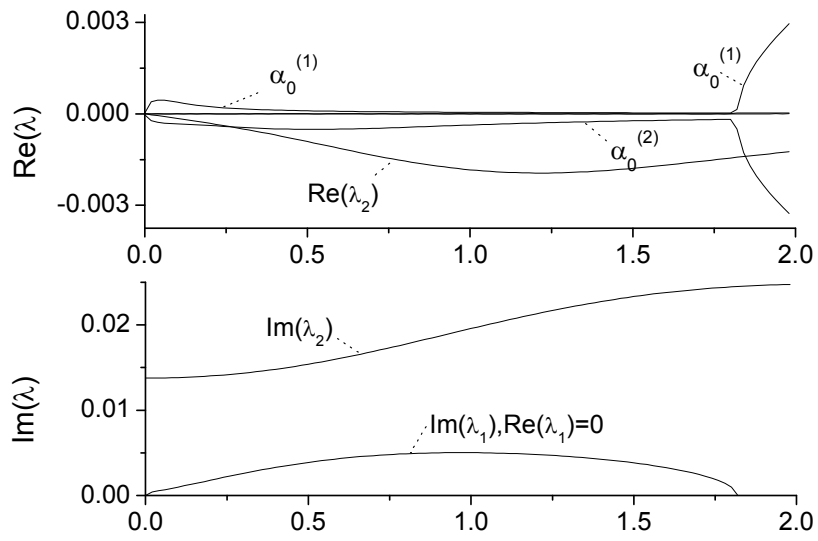


Fig. 9. Non-dimensional eigenfrequency dependence on non-dimensional air speed ($p = 0.002$, $k_0 = 0$)

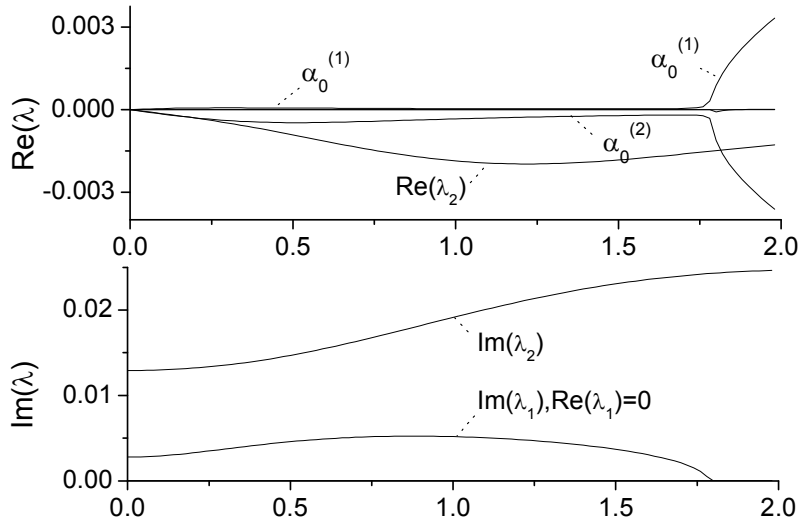


Fig 10. Non-dimensional eigenfrequency dependence on non-dimensional air speed ($p = 0.002$, $k_0 = 1$)

III. 결 론

로켓들의 일반적인 비행 조건들로 안정적인 영역들을 추정해 보았다. 로켓이 안정 비행을 하기 위해 사전에 주지하고 있어야 하는 임계 추력과 임계 비행속도들을 계산적으로 예측할 수 있었고, 또 상황에 따라 동적으로 또는 정적으로 불안정한 영역에서도 추력 벡터가 방향을 제어하는 것으로 다시 안정상태로 복구하는 것도 예측하였다. 이 밖에도 추력이 없을 때($p=0$)의 무차원 임계 비행속도 $\sigma_{cr}=1.90$ 와, 운동 흐름이 없을 때($\sigma=0$)의 무차원 임계추력 $p_{cr}=0.0792$ 을 토대로 무차원 비행속도와 무차원 추력에 다양한 로켓들의 조건을 대입하여 실제적인 값들을 얻어 낼 수 있다. 이 데이터 값들을 얻어내는 과정을 통해서 본 논문의 해석방법이 로켓 비행의 모습을 예측함으로써 실질적인 설계에 필요한 정보를 제공할 수 있다.

후 기

본 연구는 스마트무인기 기술개발사업 및 국방과학연구소 그리고 서울대학교 비행체특화연구센터의 연구비 지원에 의한 연구결과입니다. 이에 감사드립니다.

참고문헌

- [1] Bisplingoff R. L., Ashley H. and Halfman R. L., *Aeroelasticity*, Inostannoy literatury, 1958.
- [2] Shklyarchuk F. N., *Aircraft vibration and aeroelasticity*, Moscow Aviation Institute, 1980.
- [3] Narinsky A. A., *Aircraft stability under elastic system*, Moscow Aviation Institute, 1985.
- [4] Park Y. P., "Dynamic stability of a free Timoshenko beam under a controlled follower force", *Journal of sound and vibration*, 1987, 113(3), pp.407-415.
- [5] Shklyarchuk F. N., *Aircraft structural dynamic*, Moscow Aviation Institute, 1983.
- [6] Shklyarchuk F. N., *Aeroelasticity*, Moscow Aviation Institute, 1980.
- [7] Shklyarchuk F. N., Grishanina T. V., *Flutter of aircraft*, Moscow Aviation Institute, 2001.
- [8] Moaveni S., *Finite element analysis*, Prentice-Hall, 2001.