

< 논문 >

충격내압을 받는 복합적층 중공구의 수치해

오 근* · 심 우 진†

(2004년 8월 21일 접수, 2005년 1월 7일 심사완료)

Numerical Solutions for Thick-Walled Laminated Composite Spheres under Impact Pressure

Guen Oh and Woo-Jin Sim

Key Words: Anisotropic(이방성), Elastodynamic(동탄성), Finite Element(유한요소), Laminated Sphere(적층구), Spherical Wave(구면파)

Abstract

In this paper, the thick-walled laminated, orthotropic as well as bimaterial, composite hollow spheres under impact pressure are analyzed in detail by using the semi-discrete finite element method with the Houbolt time-integration scheme which results in unconditionally stable transient numerical results. Numerical results are obtained by using the self-constructed spherically symmetric (one-dimensional) and axially symmetric (two-dimensional) finite element programs, and compared with the previous solutions by other researchers, being shown some of which are incorrect. The finite element package Nastran is also adopted for numerical comparison.

1. 서론

산업 전반에 걸쳐 내압용기와 같은 구조물이 많이 사용되고 있다. 그리고 내압용기는 가스 및 휘발성 저장용기, 항공기, 잠수함, 선박 등 그 적용범위가 매우 넓다. 따라서 내압용기는 갑작스러운 충격하중 하에서도 구조물의 안정성과 신뢰성이 요구되며, 이를 위해서는 정확한 응력 해석이 필수적이다.

본 논문에서는 내압용기 중에서도 구대칭 형상을 갖는 중공구가 충격내압을 받았을 때, 벽속에 발생하는 정확한 응력분포에 대해 관심을 갖는다. 이때 중공구는 두께가 두꺼운 경우를 고려하며, 재질은 단층의 등방성, 이방성 중공구, 그

리고 이종적층 및 복합적층 중공구를 해석 대상으로 한다.

일반적으로 중공구가 충격내압을 받을 때, 구형파는 짧은 시간에 내면과 외면 사이를 수없이 왕복하면서 정적인 하중 하에서는 예측할 수 없는 순간적인 응력 변화를 일으킨다. 그러므로 유한요소법이나 경계요소법과 같은 수치도구를 이용한 수치해석 시에 기하학적 근사나 초기의 작은 오차는 시간이 흐름에 따라 누적되어 실제해와 다른 수치결과를 가져올 수 있다.

두께가 두꺼운 등방성 중공구가 충격내압을 받는 경우에 대한 해석은 많은 역사를 갖고 있다.⁽¹⁻⁶⁾ 그리고 재질이 가로 등방성일 경우에, Bickford and Warren,⁽⁷⁾ Matsumoto and Ujibashi⁽⁸⁾는 Laplace transform, Hata⁽⁹⁾는 Ray theory, Wang⁽¹⁰⁾은 Hankel transform, Kobayashi and Ishimaru⁽¹¹⁾는 Eigenfunction expansion의 방법을 사용하여 이론적인 해석해를 구하였다. 충격내압을 받는 복합 중공구에 대한 해석은 아직까지 국내에서는 발표되지 않았으며,^(12,13) 수치해법을 통한 구와 피사체

* 회원, 금오공과대학교 대학원

† 책임저자, 회원, 금오공과대학교 기계공학부

E-mail: wjsim@knut.kumoh.ac.kr

TEL: (054)478-7371 FAX: (054)478-7319

간의 충돌문제^(14,15)나 충격 하중을 받는 복합 원통에 관한 논문들⁽¹⁶⁻¹⁸⁾이 주로 발표되고 있다. 그러나, 어떤 해법을 선택하던지 간에 진행파의 전후에 발생하는 불연속성을 잘 묘사하는 것이 가장 큰 관심사이다.

최근에 Wang et al.⁽¹⁹⁾은 충격내압을 받는 이방성 적층구에 대한 이론적인 해석해를 이방성 단층구를 해석한 이전의 해법⁽¹⁰⁾을 그대로 사용하여 구하였다. 그런데 그 해법은 Kobayashi and Ishimaru⁽¹¹⁾에 의해서 변환된 운동방정식의 경계조건이 잘못되어 올바른 해가 얻어질 수 없음이 지적되었다. 이에 본 저자들은 시간영역에서의 엄밀한 수치해석을 통해 Wang et al.⁽¹⁹⁾의 해석해도 잘못된 해임을 밝히고, 그 실제해를 밝히고자 한다.

구대칭 문제의 수치해석의 경우, 축대칭 해석보다는 구대칭 수치해석이 훨씬 더 정확한 결과를 가져온다. 왜냐하면 곡선 경계면에서의 기하학적인 근사와 절점력에 의한 오차를 없앨 수 있을 뿐 아니라, 1차원적인 유한요소방정식을 사용하므로 계산시간도 아주 적게 걸리기 때문이다. 따라서 정확도가 높은 시간적분법을 사용한다면 이론해에 가까운 수치해를 구할 수 있다.

본 논문에서는 이와 같은 사실을 바탕으로 엄밀한 수치해석을 시도한다. 이를 위해서 반-분리 근사법(semi-discrete approximation)⁽²⁰⁾과, 과도 동탄성 문제들의 수치해석시에 사용되는 여러 가지 시간적분법들(Newmark, Wilson, Houbolt schemes) 중에서 수치결과가 가장 안정적인 Houbolt scheme⁽²¹⁾을 이용하여 구대칭 및 축대칭 유한요소 프로그램을 작성한다. 그리고 충격내압을 받는 단층의 등방성, 이방성 중공구 문제들을 예로써 해석하여 그 결과를 기존의 해석해^(10,11)와 비교, 검토하여 수치결과의 정확성을 검증한 후에, 이 종적층 및 복합적층 중공구로 확대 해석하여 새로운 수치 결과를 제시한다. 그리고 그 수치결과의 객관적인 비교를 위해서 상용코드인 Nastran을 사용한다.

2. 구대칭 해석을 위한 유한요소정식화

2.1 지배방정식

구대칭 문제에 있어서 변위장은 r 만의 함수이므로 주응력($\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\phi$)과 주변형률($\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_\phi$)만

을 발생시킨다. 여기서 r, θ, ϕ 는 좌표계를 나타낸다.

각 요소에 대한 변위장은 다음처럼 표현된다.

$$\{u(r)^{(e)}\} = [N^{(e)}(r)]\{u^{(e)}\} \quad (1)$$

여기서, $[N^{(e)}]$ 는 형상함수이고, $\{u^{(e)}\}$ 은 요소 내의 절점변위벡터이다.

그리고 요소 내의 변형률-변위 관계식은 다음과 같다.

$$\{\epsilon(r)^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r^{(e)} \\ \epsilon_\theta^{(e)} \\ \epsilon_\phi^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{u}{r} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$= [B^{(e)}]\{u^{(e)}\} \quad (3)$$

여기서,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} \\ \frac{N_1}{r} & \frac{N_2}{r} & \frac{N_3}{r} \\ \frac{N_1}{r} & \frac{N_2}{r} & \frac{N_3}{r} \end{bmatrix} \quad (4)$$

요소 내의 응력-변형률 관계식은 다음식과 같이 표현이 된다.

$$\{\sigma^{(e)}\} = [D^{(e)}]\{\epsilon^{(e)}\} \quad (5)$$

θ, ϕ 방향으로 등방성 성질을 갖는 가로 등방성(transversely isotropic) 재료의 탄성계수 행렬은 다음과 같다.

$$[D^{(e)}] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{12} \\ & D_{22} & D_{23} \\ sym. & & D_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서,

$$D_{11}^j = \frac{E_r^j(1-\nu_{\theta r}^j)}{m}, \quad D_{12}^j = \frac{E_\theta^j \nu_{r\theta}^j}{m},$$

$$D_{22}^j = \frac{E_\theta^j}{(1+\nu_{\theta r}^j)m} \left(1 - (\nu_{r\theta}^j)^2 \frac{E_\theta^j}{E_r^j} \right),$$

$$D_{23}^j = \frac{E_\theta^j}{(1+\nu_{\theta r}^j)m} \left(\nu_{\theta r}^j + (\nu_{r\theta}^j)^2 \frac{E_\theta^j}{E_r^j} \right),$$

$$m = 1 - \nu_{\theta r}^j - 2(\nu_{r\theta}^j)^2 \frac{E_\theta^j}{E_r^j} \quad (7)$$

식 (7)에서 E_r, E_θ 는 각각 반경방향과 접선

방향으로의 탄성계수이며, v_{θ} 은 r 방향으로 응력이 작용할 때 θ 방향으로 발생하는 변형률의 비를 나타낸다.

중공구 문제의 동적 해석을 위한 j 번째 층에서의 지배방정식은 일반적인 형태로 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial^2 u^j}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^j}{\partial r} - 2 \frac{D_{22}^j + D_{23}^j - D_{12}^j}{D_{11}^j} \frac{u^j}{r^2} = \frac{1}{c_j^2} \frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2} \quad (8)$$

여기서, c_j 는 j 번째 층에 대한 전파속도이다.

$$c_j = \sqrt{D_{11}^j / \rho} \quad (9)$$

2.2 유한요소방정식

과도 동적 문제를 해석하기 위한 반-분리된 (semi-discrete) 운동방정식은 다음과 같다.

$$[M^{(e)}]\{\ddot{u}^{(e)}\} + [K^{(e)}]\{u^{(e)}\} = \{F^{(e)}\} \quad (10)$$

여기서, $[M^{(e)}]$ 은 요소질량행렬, $[K^{(e)}]$ 는 요소 강성행렬이고 $\{F^{(e)}\}$ 은 요소절점력벡터로서 다음과 같다.

$$[M^{(e)}] = \int_{\Omega^{(e)}} \rho [M]^T [N] d\Omega$$

$$[K^{(e)}] = \int_{\Omega^{(e)}} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (11)$$

$$\{F^{(e)}\} = \{f_b^{(e)}\} + \{f_s^{(e)}\}$$

여기서, $\{f_b^{(e)}\}$, $\{f_s^{(e)}\}$ 는 각각 체적력, 표면력에 의한 하중행렬로서 다음과 같다.

$$\{f_b^{(e)}\} = \int_{\Omega^{(e)}} [N]^T \{\hat{x}\} d\Omega$$

$$\{f_s^{(e)}\} = \int_{S^{(e)}} [N]^T \{\hat{t}\} dS \quad (12)$$

여기서, $d\Omega$, dS 는 각각 구의 미소 체적과 경계면을 의미한다.

식 (10)을 풀기 위한 초기조건 및 경계조건은 다음과 같다.

$$u_i(r, 0) = u_0, \quad \dot{u}_i(r, 0) = \dot{u}_0$$

$$u_i(r, t) = \hat{u}_i, \quad \dot{u}_i(r, t) = \hat{t}_i \quad \text{on } S \quad (13)$$

식 (10)의 시간적분은 Houbolt scheme⁽²²⁾을 이용한다.

$${}^{t+\Delta t}\{\ddot{u}\} = \frac{1}{\Delta t^2} (2 {}^{t+\Delta t}\{u\} - 5 {}^t\{u\} + 4 {}^{t-\Delta t}\{u\} - {}^{t-2\Delta t}\{u\})$$

$${}^{t+\Delta t}\{\dot{u}\} = \frac{1}{6\Delta t} (11 {}^{t+\Delta t}\{u\} - 18 {}^t\{u\} + 9 {}^{t-\Delta t}\{u\} - 2 {}^{t-2\Delta t}\{u\}) \quad (14)$$

식 (10)과 식 (14)에서 재질이 시간에 따라 변하지 않는다고 가정하면 질량행렬과 강성행렬은 시간에 대해 불변하므로, 시간 $t + \Delta t$ 에서의 유한요소방정식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[\widehat{K}] {}^{t+\Delta t}\{u\} = {}^{t+\Delta t}\{\widehat{F}\} \quad (15)$$

여기서, 유효강성계수행렬과 유효절점력벡터는 다음과 같다.

$$[\widehat{K}] = [K] + \frac{2}{\Delta t^2} [M]$$

$${}^{t+\Delta t}\{\widehat{F}\} = {}^{t+\Delta t}\{F\} + [M] \left\{ \frac{5}{\Delta t^2} {}^t\{u\} - \frac{3}{2\Delta t} {}^{t-\Delta t}\{u\} + \frac{1}{\Delta t^2} {}^{t-2\Delta t}\{u\} \right\} \quad (16)$$

여기서, 시간 $t + \Delta t$ 에서의 변위 ${}^{t+\Delta t}\{u\}$ 를 알기 위해서는 ${}^t\{u\}$, ${}^{t-\Delta t}\{u\}$, ${}^{t-2\Delta t}\{u\}$ 에서의 정보를 저장해야 한다.

3. 유한요소 해석 모델

유한한 두께를 갖는 중공구가 내경에서 균일한 충격하중 $\sigma_0 = \rho H(t)$ 을 받는 경우에 중공구의 내경(A점), 중앙(B점), 외경(C점)에서 탄성파가 전파하는 과정을 구대칭 모델과 축대칭 모델을 사용해서 유한요소해석을 수행한다. 본 해석에 사용된 예제들의 기하학적인 형상은 모두 내경과 외경의 비가 $r_o/r_i = 2$ 인 중공구이며, 체적력은 무시한다. 수치결과의 표현에 있어서 다음과 같은 현재 시간 t 와 응력 σ_k 에 관한 무차원 변수를 사용한다.

$$\tau = t \sum_{j=1}^n c_{j1} / (r_o^j - r_i^j) \quad (17)$$

$$\bar{\sigma}_k = \sigma_k / \sigma_0 \quad (k=1, 2, 3) \quad (18)$$

중공구의 내경에서 충격하중에 의해 가해진 파가 중공구의 외경에 도착하는 시간을 기준시간으로 정의하고, 다음과 같이 계산한다.

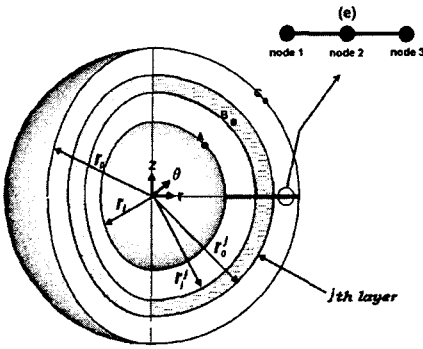


Fig. 1 Spherically symmetric finite element model and 1-D isoparametric quadratic element

$$\bar{t} = \sum_{j=1}^n (r_o^j - r_i^j) / c_j \quad (19)$$

Fig. 1은 중공구 해석을 위한 구대칭 유한요소 모델이다. 해석에 사용된 유한요소는 3절점 선요소를 사용하였으며, 반경방향으로 100개의 유한요소를 균등하게 등분하여 해석을 수행하였다.

Fig. 2는 중공구 해석을 위한 축대칭 유한요소 모델이다. 이때 해석에 사용된 유한요소 모델은 반경방향으로 22개로 등분하였는데 구의 내경 부근에서는 응력의 구배가 심하므로 조밀하게 등분하였고 외경부근에서는 듬성하게 나누어 요소분할의 효율성을 주었다. 접선방향(θ)으로는 72등분하여 전체 1584개의 축대칭 등매개 변수 2차 사변형 요소를 사용하였다.

유한요소법으로 해석을 수행함에 있어서 요소와 시간증분의 크기는 수치결과의 정확성에 큰 영향을 미친다. 시간증분 Δt 동안 파가 진행한 거리와 가장 작은 요소의 특징길이 l_e와의 상대적인 관계를 나타내는 변수 λ_j는 각 층에서 다음과 같이 정의된다.

$$\lambda_j = \frac{c_j \Delta t}{l_e} \quad (20)$$

그리고 각 층에서의 무차원화된 시간증분 β_j를 다음처럼 정의한다.

$$\beta_j = \frac{c_j \Delta t}{L} \quad (21)$$

여기서, L(= r_o - r_i)은 중공구의 전체 두께이다.

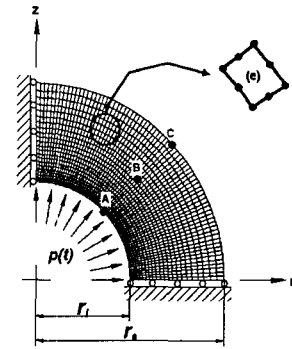


Fig. 2 Axisymmetric finite element model and 2-D isoparametric quadratic element

4. 수치해석 결과

4.1 등방성 중공구가 충격내압을 받는 경우

등방성 중공구의 해석에 사용된 재료의 물성값은 다음과 같다.⁽¹⁰⁾

탄성계수 : E = 200 GPa

푸아송비 : ν = 0.25

밀도 : ρ = 0.0096 kg/cm³

식 (9)와 식 (19)로부터 등방성 중공구의 구면파 속도는 c₁ = 5000 m/sec, 기준시간은 $\bar{t}_1 = 200 \mu\text{sec}$ 이다. 식 (20)과 식 (21)로부터 등방성 중공구의 동특성 해석을 위한 무차원 변수값은 다음과 같다.

구대칭 모델 : λ₁ = 0.11765, β₁ = 0.0011765

Fig. 3은 구대칭 유한요소법에 의한 수치결과를 무차원화된 반경 R = (r - r_i) / (r_o - r_i) = 0.0, 0.5인 곳에서 반경방향응력을 초기하중으로 무차원화시켜 Wang⁽¹⁰⁾과 Kobayashi and Ishimaru⁽¹¹⁾의 해석해와 비교 도시한 것이다. 본 해석의 수치결과와 Kobayashi and Ishimaru의 해석해는 눈으로 구분하기 힘들 정도의 미세한 오차를 보이며, 극값이 일정한 주기(T_r = 2)를 보여주고 있다. 하지만, Wang에 의한 해석해는 파가 구 두께의 중앙(B점)에 도달하는 시간(τ = 0.5)에서 이론적으로 응력이 극값을 가져야 하나 파가 중앙(B점)을 지나 τ = 0.837에서 극값이 발생하며, 극값의 주기도 일정하지 못한 결과를 보여주고 있다.

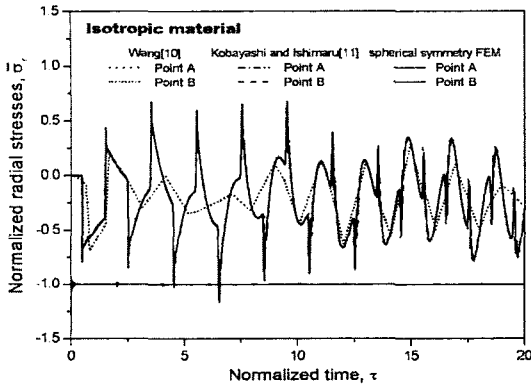


Fig. 3 Normalized radial stresses at points A, B for an isotropic hollow sphere

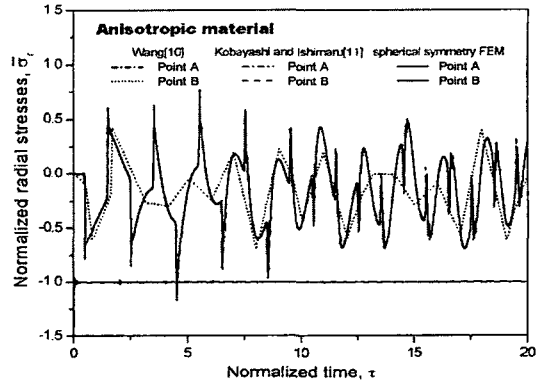


Fig. 5 Normalized radial stresses at points A, B for an anisotropic hollow sphere

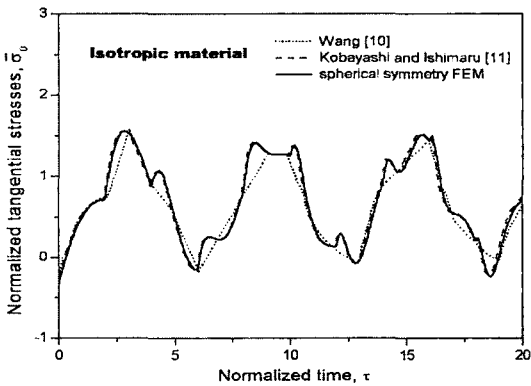


Fig. 4 Normalized tangential stresses at point A of an isotropic hollow sphere

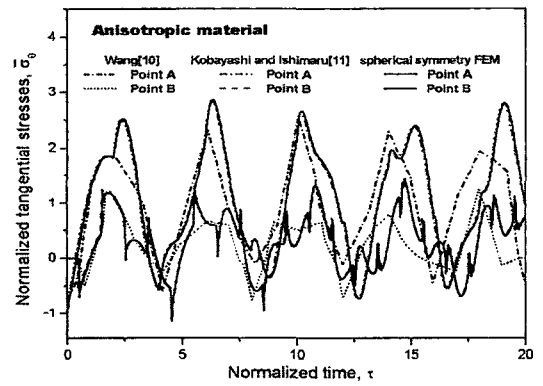


Fig. 6 Normalized tangential stresses at points A, B for an anisotropic hollow sphere

Fig. 4는 등방성 중공구의 내경(A점)에서 구대칭 유한요소법을 이용하여 접선방향응력을 초기하중으로 무차원화시킨 수치결과를 해석해들과 비교 도시한 것이다. 초기 충격하중에 의해 발생한 파가 구의 외경에서 반사되어 인장파와 압축파가 중첩되는 시간인 $\tau=2.0$ 에서 곡선이 꺾이면서 응력이 급격한 구배를 가져야 하는데 본 해석은 이러한 결과와 정확히 일치하는 반면에, Kobayashi and Ishimaru의 해석해는 시간 $\tau=1.938$ 에서 응력이 급격한 구배를 보이면서 전반적으로 본 해석과 $\Delta\tau=0.0062$ 만큼의 간격을 보이고 있다. 그리고 Wang의 해석해에서는 시간 $\tau=2.12$ 에서 응력이 급격한 구배를 보이고 있으며 정확한 해의 거동을 묘사하지 못하고 있다.

4.2 이방성 중공구가 충격내압을 받는 경우 이방성(가로 등방성) 중공구의 해석에 사용된 재료의 물성값은 다음과 같다.⁽¹⁰⁾

$$\text{탄성계수} : E_r = 200 \text{ GPa}, E_\theta = E_\phi = 2.77 E_r,$$

$$\text{푸아송비} : \nu_{r\theta} = \nu_{\theta\phi} = \nu_{r\phi} = 0.25$$

$$\text{밀도} : \rho = 0.0096 \text{ kg/cm}^3$$

식 (9)와 식 (19)로부터 이방성 중공구의 구면파 속도는 $c_2 = 6228.41 \text{ m/sec}$, 기준시간은 $\bar{t}_2 = 0.0016 \mu\text{sec}$ 이다. 식 (20)과 식 (21)로부터 이방성 중공구의 동특성 해석을 위한 무차원 변수값은 다음과 같다.

$$\text{구대칭 모델} : \lambda_2 = 0.11765, \beta_2 = 0.0011765$$

Fig. 5와 Fig. 6은 $R=0.0, 0.5$ 인 곳에서의 반경방향과 접선방향응력을 무차원화시켜서 해석해

들과 비교 도시한 것이다. 등방성 중공구와 비교하기 위해서, r 방향으로의 물성값을 같게 하고 θ , ϕ 방향으로의 물성값을 다르게 하였을 경우, 반경방향응력은 등방성 중공구와 유사한 경향을 보여주고 있는 반면에 접선방향응력은 등방성 중공구와 상이한 결과를 보여주고 있다. 이론적으로 구의 내경(A점)에서의 접선응력은 시간 $\tau = 2.0$ 에서 응력이 급격한 구배를 가져야 하는데, 본 해석은 이러한 결과와 정확하게 일치하고 있다. Kobayashi and Ishimaru의 해석해는 $\tau = 1.964$ 에서 응력의 급격한 구배가 발생하며 본 해석과 $\Delta\tau = 0.036$ 만큼의 간격을 보이고 있다. 또한 Wang의 해석해는 시간 $\tau = 2.0$ 에서 압축파에 의해 응력의 구배가 증가하지 않고 오히려 감소하는 잘못된 결과를 보이고 있다.

구 단면의 중앙(B점)에서의 본 해석에 의한 접선응력은 Kobayashi and Ishimaru의 해석해와 완전히 일치하는 결과를 보이고 있다. 반면에 Wang의 해석해는 시간 $\tau = 2.5$ 까지는 일치하다가 중첩된 압축파가 중앙단에 도달하는 시간 $\tau = 2.5$ 부터 잘못된 거동을 보이고 있다.

4.3 이중적층 중공구가 충격내압을 받는 경우 이중적층 중공구의 해석에 사용된 재료의 물성값은 Table 1과 같다. 이중적층 중공구의 동특성 해석을 위한 무차원 변수값은 다음과 같다.

축대칭 모델 : $\lambda_3^{1st} = 0.2822, \beta_3^{1st} = 0.0128$
 $\lambda_3^{2nd} = 0.338, \beta_3^{2nd} = 0.0326$
 구대칭 모델 : $\lambda_3^{1st} = 0.0939, \beta_3^{1st} = 0.00094$
 $\lambda_3^{2nd} = 0.2395, \beta_3^{2nd} = 0.0024$

Fig. 7과 Fig. 8은 이중적층 중공구의 $R = 0.0, 0.5, 1.0$ 인 곳에서의 구대칭 유한요소해석과 축

Table 1 Material properties of the bimaterial laminated hollow sphere

Property	Unit	1st layer	2nd layer
Young's modulus	GPa	70	200
Poisson's ratio	-	0.33	0.25
Density	kg/cm ³	0.027	0.0096
Wave speed	m/sec	1960	5000
Reference time	μ sec	255.112	1000

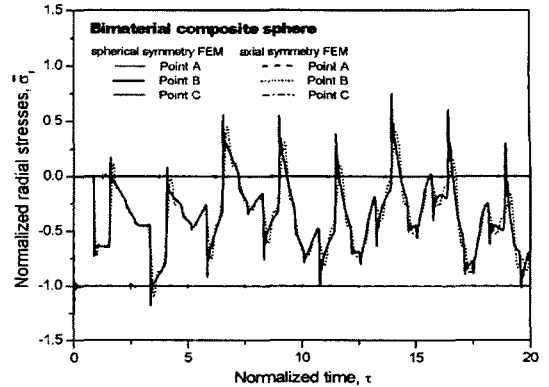


Fig. 7 Normalized radial stresses at points A, B and C for a bimaterial composite hollow sphere

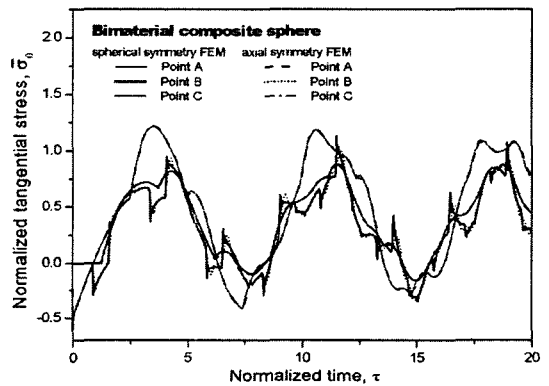


Fig. 8 Normalized tangential stresses at points A, B and C for a bimaterial composite hollow sphere

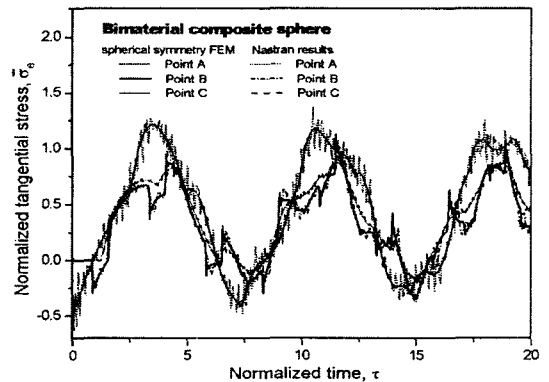


Fig. 9 Comparison of numerical results by this method and Nastran

대칭 유한요소해석에 의한 반경방향응력과 접선 방향응력을 초기하중으로 무차원화시켜 비교 도시한 것이다.

Fig. 7에서 초기 충격파가 구의 계면(B점)에 도달하는 시간은 단층으로된 재질(등방성과 이방성 중공구)에서는 $\tau=0.5$ 이나, 이중적층 중공구에서는 물성값의 차이로 인하여 $\tau=0.89$ 이다. 그리고 전반적으로 파형이 일정한 주기 ($T_\tau=2.47$)를 지니며 진행하고 있다. 첫번째 주기 ($0.89 \leq \tau \leq 3.36$)를 살펴보면 두군데 ($\tau=2.27, 2.68$)에서 순간적으로 응력이 급강함을 알 수 있다. 이것은 중공구의 계면에서 반사된 파의 영향에 의한 것으로써 시간의 흐름에 따라 그 영향이 더 커짐을 알 수 있다.

Fig. 8에서 단층의 등방성 중공구(Fig. 4)보다 물성값이 작은 층을 내경에 접착시킴으로써 접선 방향응력은 단층의 등방성 중공구와 비교하여 응력의 극값은 작아지고 파의 주기는 더 커짐을 알 수 있다.

Fig. 7과 Fig. 8에서 구대칭 유한요소해석과 축대칭 유한요소해석에 의한 결과들은 극값에서 약간의 오차를 보이고 있으나 전반적으로 두 결과는 잘 일치하고 있다. 또한 축대칭 해석을 통해 얻은 수치결과는 시간증분을 크게 하였을 경우에 약간의 수치적인 진동을 보이면서 시간이 장시간 경과 후에도 안정적인 수치해의 양상을 보이는 반면에, 시간증분을 작게 하였을 경우에는 초기 시간에서는 매우 안정적인 수치결과를 보이다가 장시간 경과 후에 발산하는 경향을 보였다. 이러한 수치적인 오차의 진폭을 줄이기 위한 방안으로 적절한 시간증분을 선정하는 것이 중요하다.

Fig. 9는 구대칭 유한요소방법과 Nastran에 의한 수치결과를 비교 도시한 것이다. Newmark scheme을 채택하고 있는 Nastran의 수치결과는 매우 심하게 진동하면서 구대칭 해석결과를 평균적으로 따라감을 알 수 있다. 이때 Nastran에 의한 해석에서는 3168개의 삼각형 2차 요소를 사용하였고, 시간증분을 일정하게($\Delta t=3.37 \mu \text{sec}$)하여 축대칭 수치해석을 수행하였다.

4.4 복합적층 중공구가 충격내압을 받는 경우

2중, 3중으로 적층된 중공구($\text{inter[Aluminum/T300 fiber]}$, $\text{inter[Aluminum/Glass fiber/T300 fiber]}$)(여기

서, inter 는 구의 안쪽을 의미함)가 내경에서 계단 함수적인 충격하중을 받을 때 구의 탄성과 전파를 구대칭 유한요소 모델을 이용하여 해석을 수행하였다. 수치계산을 위해 사용된 복합적층 중공구의 각 층에 대한 물성값은 Table 2와 같다. 그리고 이 두 예제는 Wang⁽¹⁹⁾에 의해 잘못 해석되어졌으므로 본 논문에서 올바른 수치결과를 제시하고자 한다.

첫째로, Fig. 10 ~ Fig. 13은 $\text{inter[Aluminum/T300 fiber]}$ 2개 층으로 적층된 두꺼운 중공구의 반경 $R=0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ 인 곳에서 반경방향응력과 접선방향응력을 초기하중으로 무차원화시켜 도시한 것이다. 2중 복합적층 중공구의 동특성 해석을 위한 무차원 변수값은 다음과 같다.

알루미늄층: $\lambda_4^A = 0.14335$, $\beta_4^A = 0.0014355$

T300 탄소섬유층: $\lambda_4^T = 0.18996$, $\beta_4^T = 0.0018996$

Fig. 10은 2중으로 적층된 복합 중공구의 $R=0.0, 0.5, 1.0$ 에서 반경방향응력을 도시한 것이다. 복합적층 중공구의 내경(A점)과 외경(C점)에서는 하중경계조건과 자유경계조건을 만족하고 있음을 볼 수 있다. 또한 파가 구의 계면(B점)에 도달하는 시간은 단층으로 구성된 등방성과 이방성 중공구에서는 $\tau=0.5$ 이나, 복합적층된 중공구에서는 $\tau=0.57$ 이다. 즉, 재료의 강성이 낮은 알루미늄층보다 재료의 강성이 높은 T300 탄소섬유층에서 파가 상대적으로 빠르게 진행하고 있음을 알 수 있다. 또한 첫 번째 주기($0.57 \leq \tau \leq 2.57$)

Table 2 Material properties of an orthotropic composite hollow sphere

Property	Unit	Aluminum	Glass	T300	
Young's modulus	E_r	70	26.67	96	
	E_θ		80	180	
	E_ϕ		0.25	180	
Poisson's ratio	ν_r	0.33	0.25	0.21	
	ν_θ				
	ν_ϕ				
Density	ρ	kg/cm^3	0.027	0.024	0.018
Wave speed	c	m/sec	1959.924	1490.712	2597.187

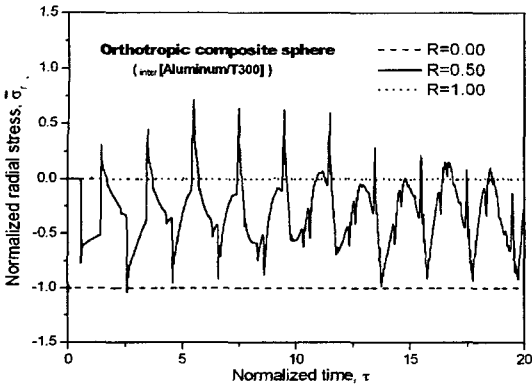


Fig. 10 Normalized radial stresses at points A, B and C for a composite sphere $inter[Aluminum/T300 fiber]$

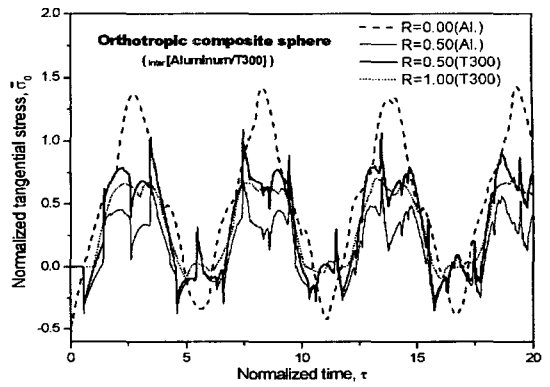


Fig. 12 Normalized tangential stresses at points A, B and C for a composite sphere $inter[Aluminum/T300 fiber]$

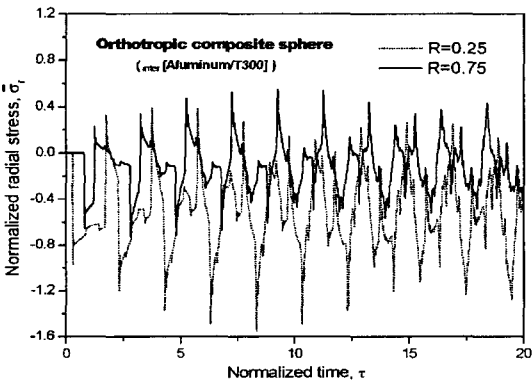


Fig. 11 Normalized tangential stresses at internal points for a composite sphere $inter[Aluminum/T300 fiber]$

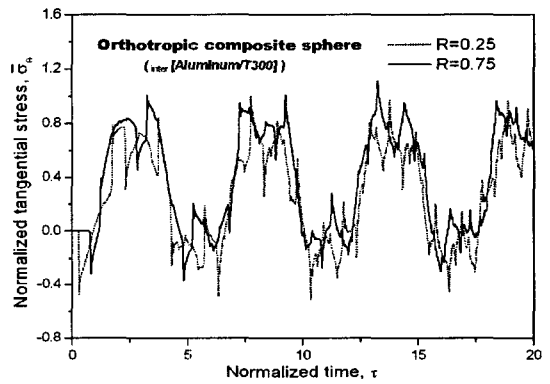


Fig. 13 Normalized tangential stresses at internal points for a composite sphere $inter[Aluminum/T300 fiber]$

내의 두 균대($\tau = 1.17, 2.29$)에서 응력이 순간적으로 급강하는데, 이는 이중적층구에서 설명한 것처럼 계면에서 파의 반사로 생긴 영향이다.

Fig. 11은 각 층의 내부($R=0.25, 0.75$)에서의 반경방향응력을 도시한 것이다. 계면의 존재로 인해서 T300 탄소섬유층 보다 알루미늄층 내부($R=0.25$)에서 더 큰 응력차를 보이고 충격내압 이하로 떨어지는데, 이것은 단층인 경우(Fig. 3, 5)에서는 예상할 수 없던 일이다.

Fig. 12와 Fig. 13은 2층으로 적층된 복합중공구의 $R=0.0, 0.5, 1.0$ 와 $R=0.25, 0.75$ 에서의 접선방향응력을 도시한 것이다. Fig. 12에서 내경(A점)에서 최대치들의 주기는 $T_\tau = 5.6$ 이며,

계면($R=0.5$)에서의 접선방향응력은 불연속함을 알 수 있고, 강성이 큰 층에서 그 값이 더 커짐을 알 수 있다. 그리고 Fig. 13에서는 계면에서 반사된 파의 영향으로 알루미늄층 내부($R=0.25$)와 T300 탄소섬유층 내부($R=0.75$)에서 접선응력분포가 Fig. 12에 비해 불연속(떨림) 현상이 더 증가함을 알 수 있다.

둘째로, Fig. 14 ~ Fig. 17은 $inter[Aluminum/Glass fiber/T300 fiber]$ 3개 층으로 적층된 두꺼운 중공구가 충격하중을 받는 경우에 대한 수치결과이다. 수치계산을 위해 사용된 물성치는 Table 2와 같다. 3중 복합적층 중공구의 동특성 해석을 위한 무차원 변수값은 다음과 같다.

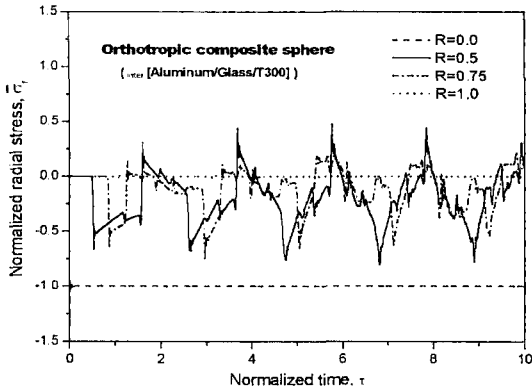


Fig. 14 Normalized radial stresses at points A, B and C for a composite sphere $inter[Aluminum/Glass fiber/T300 fiber]$

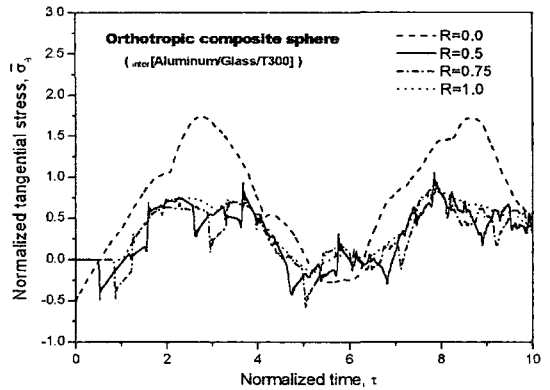


Fig. 16 Normalized tangential stresses at points A, B and C for a composite sphere $inter[Aluminum/Glass fiber/T300 fiber]$

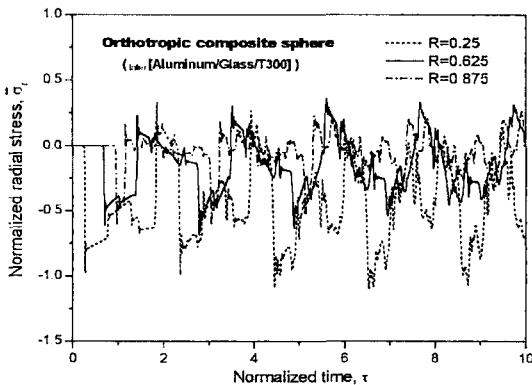


Fig. 15 Normalized tangential stresses at internal points for a composite sphere $inter[Aluminum/Glass fiber/T300 fiber]$

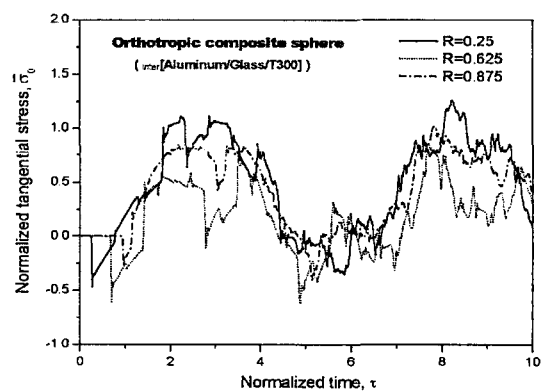


Fig. 17 Normalized tangential stresses at internal points for a composite sphere $inter[Aluminum/Glass fiber/T300 fiber]$

알루미늄층: $\lambda_4^A = 0.16205$, $\beta_4^A = 0.0008102$

유리섬유층: $\lambda_4^G = 0.12325$, $\beta_4^G = 0.0006163$

T300 탄소섬유층: $\lambda_4^T = 0.21474$, $\beta_4^T = 0.0010737$

Fig. 14와 Fig. 15는 3중 복합적층 중공구의 계면과 경계면($R=0.0, 0.5, 0.75, 1.0$), 그리고 각 층의 내부($R=0.25, 0.625, 0.875$)에서의 반경방향응력을, 그리고 Fig. 16과 Fig. 17은 접선방향응력을 도시한 것이다. Fig. 16에서 접선방향응력은 서로 다른 층의 계면에서 불연속하나 그림이 너무 복잡하게 되어 평균한 값을 도시하였다. 이 수치결과들을 2중 복합적층 중공구의 수치결과(Fig. 10 ~ Fig. 13)와 비교하면, 내부에서의

반경방향응력의 크기는 감소하였으나, 접선방향응력의 크기는 내측반경($R=0.0$)에서 증가하였으며, 그 파의 주기도 더 커짐을 알 수 있다.

결과적으로, 인접한 두 층의 물성값의 차를 크게 하면 계면에서의 반사파에 의한 영향도 커지게 되며, 또한 적층된 층의 개수가 많아지면 계면에서 반사파의 종류와 횟수가 증가하므로 응력곡선의 불연속(떨림) 현상이 더욱 커지게 된다.

참고로, 본 해석에서 서로 다른 층의 계면에서의 반경방향응력은 항상 연속이 됨을 알 수 있었다. 또한, 계면에서 반경방향응력이 시간에 흐름에 따라 반대부호를 반복함과 접선방향응력이 불연속함은 층간분리의 원인이 될 수 있다.

5. 결 론

충격내압을 받는 등방성, 이방성 단층 중공구와 이중, 이방성 적층 중공구의 벽 속에 발생하는 응력분포를 유한요소법을 사용하여 정밀하게 수치해석을 하였다. 그 결과 등방성, 이방성 단층 중공구의 경우에 본 해석의 결과와 기존의 Kobayashi and Ishimaru⁽¹¹⁾의 해석해가 거의 정확하게 일치하였으며, Wang⁽¹⁰⁾의 결과가 잘못되었음을 확인할 수 있었다. 그리고 이방성 적층 중공구들에 대해서도 최근에 발표된 Wang et al.⁽¹⁹⁾ 해석해가 잘못되었음을 알 수 있었으며 수정된 새로운 수치해를 제시하였다. 또한 이중적층 중공구에 대한 수치 결과도 함께 제시하였다.

참고문헌

- (1) Huth, J.H., 1955, "Elastic stress waves produced by pressure loads on a spherical shell," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 22, pp. 473~478.
- (2) Baker, W.E., Hu, W.C. and Jackson T.R., 1966, "Elastic response of thin spherical shell to axisymmetric blast loading," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 33, pp. 800~806.
- (3) Chou, P.C. and Koenig, H.A., 1966, "A unified approach to cylindrical and spherical elastic waves by method of characteristics," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 33, pp. 159~167.
- (4) Pao, Y.H. and Ceranoglu, A.N., 1978, "Determination of transient response of a thick-walled spherical shell by the ray theory," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 45, pp. 114~122.
- (5) Timoshenko S. P. and Goodier J. N., 1970, *Theory of Elasticity*, 3rd Edn., McGraw-Hill.
- (6) Achenbach, J.D., 1975, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, Amsterdam.
- (7) Bickford, W.B. and Warren, W.E., 1967, "The propagation and reflection of elastic waves in anisotropic hollow spheres and cylinders," *Pergamon Press Oxford*, Vol. 3, pp. 433~445.
- (8) Matsumoto, H. and Ujibashi, S., 1972, "衝撃圧力をうける異方性中空球の変形と応力," *Trans. JSME* (in Japanese), Vol. 38, No. 307, pp. 466~472.
- (9) Hata, T., 1986, "Determination of transient responses of a thick-walled transversely isotropic spherical shell," *Bulletin of JSME*, Vol. 29, pp. 2810~2816.
- (10) Wang, X., 1994, "An elastodynamic solution for an anisotropic hollow sphere," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 31, pp. 903~911.
- (11) Kobayashi, H. and Ishimaru, K., 1995, Letter to the editor-Discussion of "An elastodynamic solution for an anisotropic hollow sphere," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 32, pp. 127~133.
- (12) Rhie, Y.B. and Chunm, C.K., 1997, "Investigation of the Stress Distributions in a Transversely Isotropic Medium Containing a Spheroidal Cavity," *J. Comp. Struct. Eng. Inst.* (in Korean), Vol. 10, No. 1, 159~172.
- (13) Lee, J.Y. and Kang, Y.C., "Chaotic Response of a Spherical Shell to Impulsive Loading," *J. Comp. Struct. Eng. Inst.* (in Korean), Vol. 10, No. 3, pp. 167~174.
- (14) Shin, H.S., Woo, S.C., Lee, H.C. and Kim, M.S., 2002, "Impact Damage of Brittle Materials by Small Spheres (II)," *Trans. of the KSME A* (in Korean), Vol. 26, No. 1, pp. 153~159.
- (15) Chang, S.N., Yoo, Y.H. and Chung, D.T., 2002, "Numerical Simulation of High-Velocity Oblique Impact of Mild Steel Spheres Against Mild Steel Plates," *Trans. of the KSME A* (in Korean), Vol. 26, No. 3, pp. 576~585.
- (16) Lee, Y.S. and Lee, H., 1989, "Static and Dynamic Analysis of Laminated Composite Axisymmetric Shell," *Trans. of the KSME* (in Korean), Vol. 13, No. 6, pp. 1203~1214.
- (17) Kim, S.J., Goo, N.S., Yu, J.Y. and Kim, T.W., 1995, "Impact Response and Damage Analysis of Cylindrical Composite Panels," *J. KSCM* (in Korean), Vol. 8, No. 1, pp. 34~42.
- (18) Cho, C.D. and Zhao, G.P., 1999, "Dynamic Response and Damage of Composite Shell Under Impact," *KSME Int. J.*, Vol. 13, No. 9, pp. 596~608.
- (19) Wang, X., Lu, G. and Guillow, S.R., 2002, "Stress wave propagation in orthotropic laminated thick-walled spherical shells," *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 4027~4037.
- (20) J.N. Reddy, 1993, *An Introduction to the Finite Element method*, 2nd edn., McGraw-Hill, Chap. 6.
- (21) Hughes, T.J.R., 1987, *The Finite Element Method-Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall. Chap.9.
- (22) Bathe, K.J., 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hill, Englewood Cliffs, Chap. 9.