

# 박스 지하 구조물의 간편 내진해석

## Simplified seismic analysis of underground rectangular structures

박인준\*<sup>1</sup>, 박성용<sup>2</sup>, 김수일<sup>3</sup>, 김상환<sup>4</sup>

Park, Inn-Joon · Park, Seong-Yong · Kim, Soo-Il · Kim, Sang-Hwan

### Abstract

There are basically two methods for the seismic design of underground structures ; analytical or pseudo-static, and dynamical method. In pseudo-static analysis approach, the ground deformations are imposed as a static load and soil-structure interaction does not include dynamic or wave propagation effects. However the behavior of soil-structure interaction is nonlinear, it needs to consider nonlinear soil-structure interaction effects. In this study simplified seismic analysis method to consider soil-structure interaction by iterative procedure is proposed and the results are compared and analyzed by a finite difference computer program.

**Keywords:** Underground rectangular structure, pseudo-static analysis, dynamic analysis, free-field deformation, normalized structure deformation

### 요 지

지하구조물의 해석 방법은 크게 해석적 또는 유사정적 해석방법과 동적해석 방법의 두 종류로 나눌 수 있다. 유사정적 해석방법은 자유지반변형을 구조물에 정적인 하중으로 적용하여 구조물의 변위를 구하는 방법으로 선형 탄성해석에 기초를 두고 있다. 그러나 지진 발생시 지반과 구조물 사이의 상호작용은 비선형 거동을 하여 이를 고려한 해석이 이루어져야 한다. 본 연구에서는 유사정적 해석방법에 반복계산과정에 의하여 지반의 비선형성을 고려할 수 있는 간편해석방법을 소개하고, 이를 수치해석을 통한 동해석을 수행하여 비교 검증하였다.

**주요어:** 박스 지하 구조물, 유사정적해석, 동적해석, 자유지반변형, 정규화 구조물 변형

## 1. 서론

지하 시설은 현대 사회에서 없어서는 안 될 사회기간시설이며, 지하철, 철도, 고속도로, 재료수송, 하수 및 상수의 운송을 담당하는데 광범위하게 사용되고 있다. 지진 활동이 예상되는 지역에 이러한 지하 구조물이 건설 될 경우, 지하구조물은 정적인 하중뿐만 아니라 지진하

중에도 견딜 수 있도록 설계되어야 한다. 역사적으로 지하구조물은 지진 발생시 지상 구조물에 비해 적은 피해가 발생하였다. 하지만 최근 1995년 일본 고베지진과, 1999년 대만 Chi-chi 지진, 1999년 터키 Kocaeli 지진에서 지하구조물에 심각한 피해가 발생하였으며, 이로 인하여 지금까지의 지하구조물의 내진설계에 대한 우려와 관심이 증가하고 있다.

\*1 한서대학교 교수 (geotech@hanseo.ac.kr)

2 연세대학교 박사과정

3 연세대학교 교수

4 호서대학교 교수

일반적으로 지하구조물에 가해지는 설계 지진력은 주변 지반에 의해 구조물에 가해지는 변형 또는 변형률의 향으로 표현된다. 가장 간단한 해석 방법은 지하구조물과 지반의 상호작용을 무시하는 것이다. 이 때, 지진에 의해 발생한 지반의 자유지반변형 (free-field deformation)이 산정되며, 구조물은 이 변형에 견딜 수 있도록 설계된다. 이러한 방법은 낮은 수준의 진동이 예상되거나 구조물이 암반 같은 견고한 지반에 존재할 때는 만족스러운 결과를 나타낸다. 또 다른 방법은 주변지반과 구조물 사이의 상호작용을 고려하는 방법이다. 유사정적 (pseudo-static) 해석에서는 지반의 변형이 구조물에 정적인 하중으로 가해지며, 구조물-지반의 상호 작용에 의한 동적 또는 파 전달 (wave propagation) 효과는 고려되지 않는다. 이 때, 지진에 의해 구조물은 주변 지반과 함께 변형을 일으키고, 구조물은 구조적인 강성의 변화 없이 자유지반변형을 한다는 가정에 기초를 두고 있다. 동적해석에서는 유한요소해석 또는 유한차분해석 같은 수치해석 기법에 의해 비선형적인 구조물-지반의 상호작용을 고려할 수 있다. 이러한 해석방법에는 설계응답스펙트럼을 만족하는 시간 이력을 지반입력운동으로 사용한다.

지반-구조물 상호작용에 대한 연구는 많은 연구자들 (Savin, 1961; Timoshenko 와 Goodier, 1970; Peck 등, 1972; Merritt 등, 1985; Penzien 과 Wu, 1998; Penzien, 2000; Hashash 등, 2001)에 의해 연구되었지만, 단지 원형 단면에 국한되었다. 원형단면은 라이프라인 또는 깊은 터널에 적합하지만 15m 이내의 얇은 깊이의 구조물 (개착식 터널)의 경우에는 박스형 단면이 일반적이다. Penzien (Penzien, 2000)에 의해 박스형 터널의 정해가 제안되었지만, 이는 여러 가정에 기초한 간략식이다. 본 연구에서는 Penzien의 가정을 개선하여 Huo (Huo, 2004)가 제안한 박스형 구조물의 유사정적 해석 방법을 반복계산과정에 의하여 지반-구조물의 비선형성을 고려할 수 있는 간편법을 제안하였으며, 수치해석 프로그램을 수행하여 간편법을 이용하여 해석한 결과와 비교분석하였다.

## 2. 박스 구조물의 간편 내진해석

### 2.1 유사-정적해석 (pseudo-static analysis)에 의한 박스 구조물의 내진해석

유사정적 해석 방법은 구조물이 없는 자유지반에 지진시 지반에 발생하는 자유지반변형을 구조물에 정적인 하중으로 적용하여 박스 지하구조물에 발생하는 변형량을 계산하는 해석 방법이다. 첫 단계는 지진에 의해 발생하는 자유지반변형 (free-field deformation),  $u_{x, \text{freefield}}$ 를 지반응답해석을 통하여 구한다. 균질하고 등방인 지반의 자유 지반변형은 다음과 같다.

$$u_{x, \text{freefield}} = \Delta_{\text{freefield}} = \gamma_{\text{freefield}} b = \frac{\tau_0}{G} b \quad (1)$$

- 여기서,  $G$  : 지반의 전단탄성계수
- $b$  : 박스 구조물의 높이
- $\tau_0$  : 자유지반의 전단응력
- $\gamma_{\text{freefield}}$  : 자유지반의 전단변형률

자유지반의 전단 변형률은 지반응답해석에 의해 구할 수 있다. 지반응답해석에는 변형률 증가에 따른 전단탄성계수의 감쇠를 고려한 Fourier spectra analysis 또는 response spectra analysis가 이용될 수 있다 (Kramer, 1996). 대상 지반의 지반응답해석시에는 지진 활동을 특정 짓는 지반운동계수 (ground motion parameters)가 이용된다. 일반적으로 지반의 운동은 세 방향의 전달성분 (translational components)과 세 방향의 회전성분 (rotational components)으로 나눌 수 있다. 지반 운동계수는 진폭, 주파수, 강진의 지속시간의 세 개의 주요 인자를 갖는 가속도, 속도, 변위 시간이력으로 표현될 수 있다. 최대지반가속도 (peak ground acceleration, PGA), 최대지반속도 (peak ground velocity, PVA), 최대지반변위 (peak ground displacement, PGD) 같은 지반운동의 최대값들이 지반응답해석시 주로 이용된다.

지반응답해석시 지반의 물성을 산정하는 지반조사 (site characteristic)는 자유지반변형을 계산하는데 있어서 매우 중요하다. 대상 지하구조물 위치에서의 지반운동은

주변 지반의 종류에 따라서 기반암에서 측정된 운동에 비해 증폭될 수도 있고, 감쇠될 수도 있다. SHAKE (Schnabel 등, 1972) 같은 지반응답해석 프로그램이 자주 이용된다.

구조물의 정규변형은 대상 구조물과 주변의 강성비 (stiffness ratio)  $\Omega$ 와 박스 구조물의 형상비 (aspect ratio)  $\lambda$ 가 주어지면 다음의 식으로부터 구할 수 있다 (Huo, 2004).

$$\frac{\Delta_{stru.}}{\Delta_{freefield}} = \frac{G\Delta_{stru.}}{\tau_{ob}} = \frac{(1-\nu_s^2)(1+\lambda)}{12\Omega} \left[ \frac{n}{5} + \left( \frac{m}{5} + \frac{\lambda}{2} \right) \right] \quad (2)$$

여기서,  $\Omega = \frac{E_s I_s}{Gb^3}$

$\lambda = \frac{a}{b}$ , a : 지하구조물의 폭

$\nu_s$  : 지하 구조물의 포아송비

n,m,l : 부록참조

따라서 구조물의 변형은 자유지반변형에 식 (2)에서 구한 구조물의 정규화변형을 곱하여 식 (3)과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta_{stru.} = \Delta_{freefield} \times \frac{\Delta_{stru.}}{\Delta_{freefield}} \quad (3)$$

이러한 해석적 방법은 유사-정적인 접근방법으로 동적인 해석 방법에 비해 간단하고 쉬운 장점이 있지만 몇 가지 제한사항을 갖고 있다. 이러한 제한사항은 해석적 방법을 개발하기 위해서 세운 가정 사항에 기인한다. 다음은 가장 중요한 가정 사항이다. : (1) 개구부에 가해지는 응력과 (stress wave)에 의한 응력의 증폭현상은 무시할 수 있다. (2) 지반과 구조물의 관성효과는 무시할 수 있다. (3) 흙은 균질하며 등방이다.

## 2.2 탄소성, hysteretic 지반 거동을 고려한 간편해석법

앞서 제시한 해석적 방법은 지반과 구조물의 탄성거동을 한다는 가정에 기초를 두고 있다. 구조물이 매우 견고

하다면 지진 발생시에 피해가 적고 구조물의 강성의 변화가 작기 때문에 이러한 가정은 타당할 수 있을 것이다. 그러나 만약 구조물이 비선형 거동 영역으로 이동하게 되면 구조물 강성의 감소는 중요한 요소가 되며, 이러한 가정은 큰 오차를 남기게 될 것이다. 따라서 구조물과 주변지반의 강성비가 구조물의 반응을 결정하는 중요한 인자가 된다. 구조물에서 멀리 떨어져 있는 지반은 입력 지진에 의해 자유롭게 움직인다. 하지만 구조물 주변의 흙은 구조물의 영향을 받는다. 단단한 구조물은 흙의 자유지반변형을 감소시키고, 그 결과 흙의 전단탄성계수의 감소도 제약을 받게 된다. 반면에 주위 지반에 비해 구조물이 연약할 경우, 구조물에 자유지반변형 보다 큰 변형률이 발생하며, 흙의 전단탄성계수도 개구부 주위의 변형에 맞추어 감소하게 될 것이다. 이러한 구조물의 변형에 의한 흙의 강성 변화는 반복계산 과정에 의해 해석적인 방법에 적용될 수 있다. 여기서 흙의 전단탄성계수는 이전 단계에서 구한 지반의 변형에 의해 조절된다.

다음은 반복계산에 의하여 구조물의 변형을 구하는 과정이다.

1. 지반응답해석을 통한 자유지반변형률  $\gamma_{freefield}$  를 구한다. 자유지반변형률은 SHAKE 프로그램을 이용하여 구할 수 있다.
2. 구조물의 형상비  $\lambda$ 와 지반과 구조물 사이의 강성비  $\Omega$ 를 구하고, 주변 지반의 초기 전단탄성계수를 결정한다. 이 때, 초기 전단탄성계수로 최대전단탄성계수  $G_{max}$ 가 사용될 수 있다.
3. 식 (2)로부터 정규화 구조변형  $\frac{\Delta_{stru.}}{\Delta_{freefield}}$  를 구한다.
4. 식 (3)으로부터 1단계에서 구한 자유지반변형률과 3단계에서 구한 정규화 구조변형을 곱하여  $\Delta_{stru.}$ 를 구한다.
5. 구조물의 응답에 영향을 주는 지반은 구조물과 함께 이동하는 부착지반 (attached ground)이다. 부착지반의 전단탄성계수 감소는 구조물이 경험하는 전단변형률과 같은 크기의 변형률에 의해 결정된다. 따라서 지반의 전단변형률은 구조물의 변형을 구조물의 높이로 나눈 값과 같다.

$$\gamma_{i+1} = \frac{\Delta_{stru.}}{b} \quad (4)$$

- 변형률-전단탄성계수 곡선으로부터 5 단계에서 구한  $\gamma_{i+1}$ 에 해당하는 전단탄성계수  $G_{i+1}$ 을 구한다.
- $\gamma_i$ 와  $\gamma_{i+1}$  사이의 상대오차  $\frac{|\gamma_{i+1} - \gamma_i|}{\max(\gamma_{i+1}, \gamma_i)}$ 를 구한다.  $\frac{|\gamma_{i+1} - \gamma_i|}{\max(\gamma_{i+1}, \gamma_i)}$ 가 일정한 한계치  $\epsilon$ (예를 들어,  $\epsilon = 1\%$ )보다 작으면 해는 수렴하고, 그때의 구조물 변형  $\Delta_{stru.}$ 가 최종해이다. 그렇지 않을 경우, 2 단계로 돌아가서 전단탄성계수  $G_{i+1}$ 을 대입하여 수렴할 때까지 다음 단계를 수행한다.

### 3. 박스 지하 구조물의 수치해석

#### 3.1 해석 대상 및 조건

박스 지하 구조물의 지반과의 비선형적인 상호작용을 고려하기 위해서 FLAC2D 4.0 프로그램을 이용하여 동적해석을 수행하였다. 해석대상 지반 및 구조물은 ○○ 지하철의 단면으로 선정하였으며, 박스형 터널의 단면은 그림 1과 같고, 그림 2는 해석에 사용된 요소망을 그림 3은 지층 및 물성구분을 나타낸 것이다. 대상 지반 및 구조물의 입력 물성은 표 1과 같다. 해석에 사용된 모델은 지반의 경우 Mohr-Coulomb 모델을 사용하였으며, 박스 구조물은 탄성모델을 적용하였다. 지반 입력 운동은 국내 내진설계에서 이용되고 있는 1968년 Tokachi 앞 바다에서 발생한 Hachinohe 지진파와 1978년 Miyagi현 앞 바다에서 발생한 Ofunato 지진파 및 인공지진파를 이용하였다. 그림 4는 Hachinohe 지진파, Ofunato 지진파

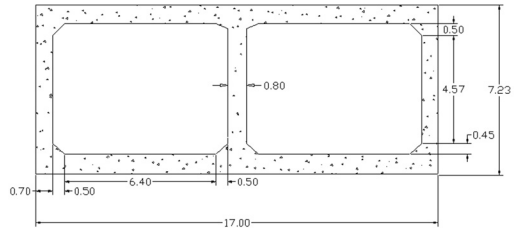


그림 1. 해석 대상 단면

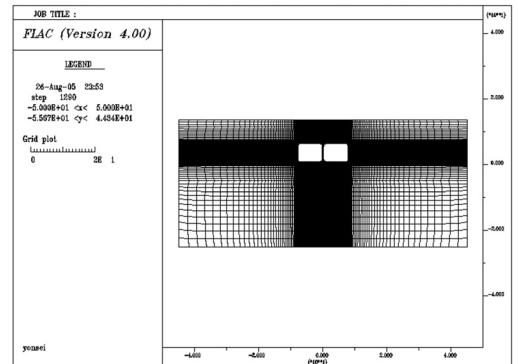


그림 2. 해석 요소망

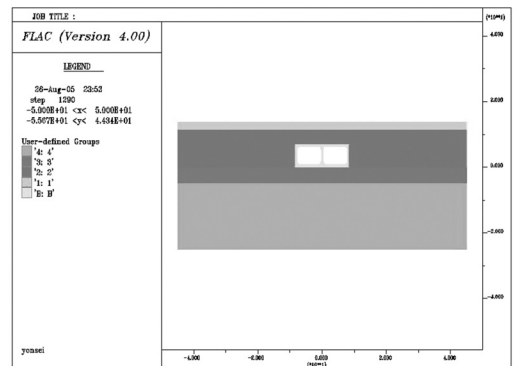
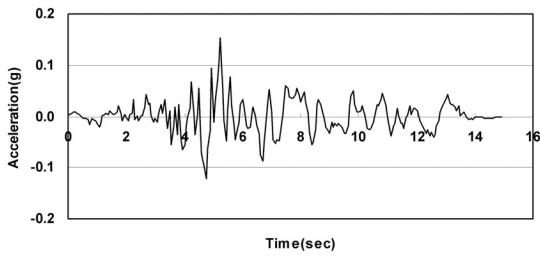


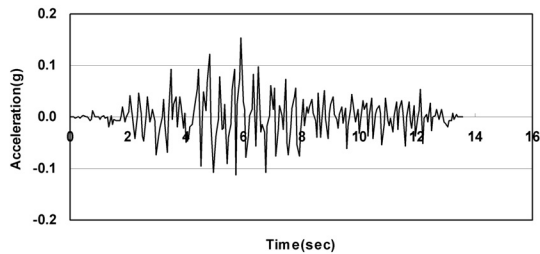
그림 3. 지층 및 물성구분

표 1. 대상지반의 물성

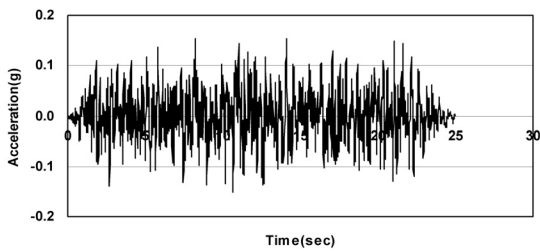
	두께 (m)	탄성계수 (t/m <sup>2</sup> )	단위중량 (t/m <sup>3</sup> )	점착력 (t/m <sup>2</sup> )	내부마찰각 (deg)	포아송비
매립토	2,20	1,000	1,8	0,5	25,0	0,33
퇴적토	11,47	2,000	1,9	1,0	30,0	0,30
풍화토	4,75	6,000	2,0	2,0	35,0	0,29
연암	20,25	65,000	2,2	12,0	35,0	0,28
콘크리트	7,23	2,323,790	2,2	-	-	0,15



(a) Hachinohe 지진파



(b) Ofunato 지진파



(c) 인공지진파

그림 4. 입력지진파

및 인공지진파의 시간이력을 나타낸 것이다. 각 지진파의 최대가속도는 0.154g로 크기를 조정하여 사용하였다.

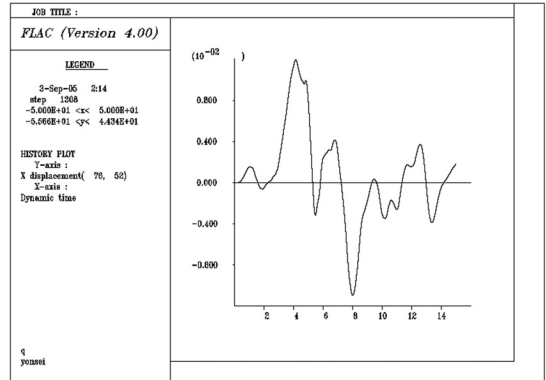
### 3.2 수치해석 결과

동적 수치해석을 수행한 결과 구조물의 최대 변위는 모두 기동 상단에서 발생하였으며, Hachinohe 지진파의 경우 1.19cm, Ofunato 지진파의 경우 2.23cm, 인

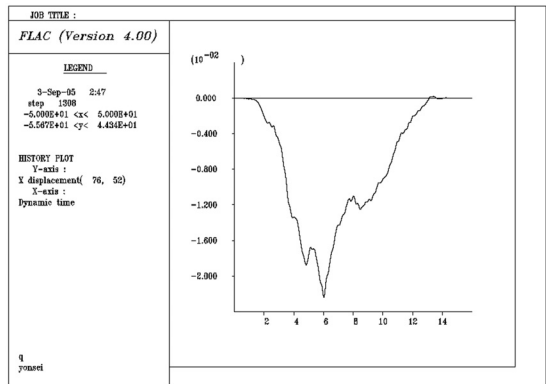
표 2. 지진파에 따른 구조물 변형 비교

Hachinohe	Ofunato	인공지진파
1.19 cm	2.23 cm	1.12 cm

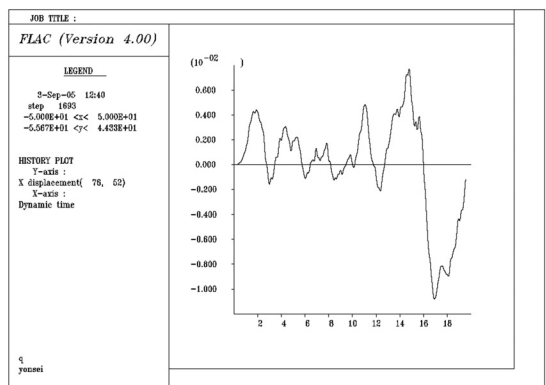
공지진파의 경우 1.12cm가 발생하였다. 그림 5는 기동 상단에서의 수평방향 변위 이력을 나타낸 것이다.



(a) Hachinohe 지진파



(b) Ofunato 지진파

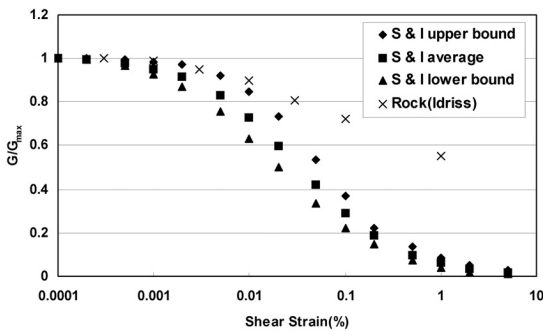


(c) 인공지진파

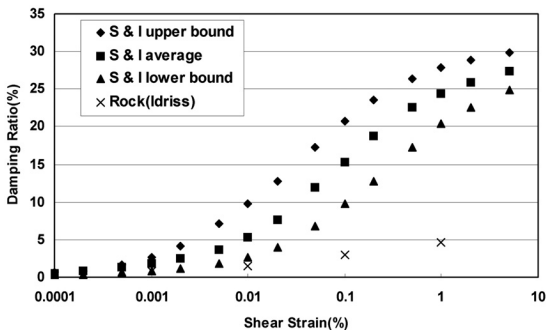
그림 5. 해석결과

## 4. 간편 해석에 의한 박스구조물의 내진해석

지반-구조물의 비선형적인 상호작용을 고려하기 위해서 2.2절에서 제시한 반복계산 과정을 통하여 유사정적 해석을 수행하였다. 대상 지반은 3장의 수치해석 단면으로 하였으며, 자유지반변형률  $\gamma_{freefield}$  를 구하기 위해서 SHAKE 프로그램을 이용하여 지반응답해석을 수행하였다. 해석에 사용된 지반 물성은 수치해석의 경우와 동일하며, 각 지층의 변형률에 따른 정규화 전단탄성계수 감소곡선(normalized shear modulus reduction curve)과 감쇠비-전단변형률 상관곡선(damping curve)은 그림 6과 같다. 매립토는 Seed & Idriss lower bound, 퇴적토는 Seed & Idriss average, 풍화토는 Seed & Idriss upper bound, 연암은 Rock (Idriss) 추천 곡선을 사용하였다. 지반응답해석 결과 각 지진파에 따라 최



(a) 정규화 전단탄성계수 감소곡선



(b) 감쇠비-전단변형률 상관곡선

그림 6. 정규화 전단탄성계수 감소곡선과 감쇠비 곡선

대 전단변형률 발생위치는 박스 구조물이 놓이는 층경계 부에서 발생하였으며 그 값은 표 3과 같다.

2.2절에서 제시한 반복계산과정에 의하여 간편해석을 수행하였다. 박스구조물 주변 지층인 퇴적토와 구조물 사이의 강성비  $\Omega$ 는 66.3이며, 박스구조물의 형상비  $\lambda$ 는 2.35이다. 초기전단탄성계수는 풍화토의 최대전단탄성계수  $769t/m^2$ 을 사용하였다. 반복계산과정에 의하여 구한 각 지진파에 따른 구조물의 최종 변형량과 동적수치해석을 통해 구한 구조물의 최종 변형량을 정리하여 표 4에 나타내었다. 간편해석에 의한 상대오차는 인공지진파의 경우 17.0%로 가장 큰 오차를 나타냈으며, Hachinohe 지진파, Ofunato 지진파의 순으로 오차가 감소했으며, 구조물의 강성이 지반에 비해 크기 때문에 구조물의 변형량이 작게 산정됐다고 판단한다.

표 3. 지진파에 따른 최대 자유지반변형률,  $\gamma_{freefield}$

Hachinohe	Ofunato	인공지진파
0.224 %	0.390 %	0.210 %

표 4. 지진파에 따른 구조물 변형 비교

	Hachinohe	Ofunato	인공지진파
수치해석 (cm)	1.19	2.23	1.12
간편해석 (cm)	1.34	2.10	1.35
상대오차 (%)	11.2	6.2	17.0

## 6. 결론

본 연구에서는 박스 지하구조물의 내진해석에서 유사-정적해석방법에 반복계산을 이용하여 지반-구조물의 비선형적인 상호작용을 고려할 수 있는 간편법을 제시하였으며, 제시한 방법과 유한차분해석 방법에 의한 동해석 결과를 비교검토 하였다. 본 연구를 통하여 얻은 결론은 다음과 같다.

1. 해석적인 방법에 의하여 얻어진 박스구조물의 정해로부터 반복계산과정을 통하여 지반-구조물의 비선형 거동을 적용할 수 있었다.
2. 제안된 간편법과 동적수치해석방법을 비교한 결과

20% 이내의 오차를 보여 비교적 정확한 결과를 나타내었다.

3. 복잡하고 많은 시간이 소요되는 동적 수치해석방법에 비해 제안된 간편법은 실무자들의 내진해석에 많은 도움이 될 것이다.

## 감사의 글

“건설교통부가 출현하고 한국건설교통기술평가원에서 위탁시행 한 2004년 건설핵심기술연구개발사업 (과제번호 : C104A1010001-05A0501-00120)와 (과제번호 : C104A1010001-05A0501-00240)에 의한 것임”에 심심한 사의를 표합니다.

## 참고문헌

1. Hashash, Y.M.A., Hook, J.J., Schmidt, B., and Yao, J.I.(2001), Seismic Design and Analysis of Underground Structures. *Tunneling and Underground Space Technology*. 16, pp. 247-293.
2. Huo, Hongbin, Ph.D., Purdue University, December 2004. Seismic Design and Analysis of Rectangular Underground Structures.
3. Kramer, S.L, Geotechnical Earthquake Engineering, Prentice-Hall, 1996
4. Merritt, J.L., Monsees, J.E., and Hendron, A.J., Jr.(1985). Seismic Design of Underground Structures. *Proceeding of the 1985 Rapid Excavation Tunneling Conference*, Vol. 1, pp. 104-131.
5. Peck, R.B., Hendron, A.J., Jr., and Mohraz, B.(1972) State of the Art of Soft-Ground Tunneling. *Proceedings of the RETC 1972*; Vol. 1, pp. 683-691
6. Penzien, J., and Wu, C.L.(1998). Stress in Linings of Bored Tunnels. *Earthquake Engineering and Structure Dynamics* 27, pp.283-300
7. Penzien, J.(2000). Seismically Induced Raking of Tunnel Linings. *Earthquake Engineering and Structure Dynamics* 29, pp.683-691
8. Savin, G.N.(1961) *Stress Concentration around Holes*. Pergamon Press, London.
9. Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N.(1970). *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Publishing Company, New York.

1. Hashash, Y.M.A., Hook, J.J., Schmidt, B., and Yao, J.I.(2001), Seismic Design and Analysis of



**박인준**

한서대학교 교수  
geotech@hanseo.ac.kr



**박성용**

연세대학교 박사과정  
billiboy@yonsei.ac.kr



**김수일**

연세대학교 교수  
geotech@yonsei.ac.kr



**김상환**

호서대학교 교수  
kimsh@office.hoseo.ac.kr

## 부록. 유사정적해석에 의한 박스구조물의 정규화변형 계산

$$\frac{\Delta_{\text{stru.}}}{\Delta_{\text{freefield}}} = \frac{G\Delta_{\text{stru.}}}{\tau_o b} = \frac{(1-\nu_s^2)(1+\lambda)}{12\Omega} \left[ \frac{n}{5} + \left( \frac{-m}{5} + \frac{\lambda}{2} \right) 1 \right]$$

$$\frac{1 + \cos 2k\pi - \frac{1}{6} \sin^2 2k\pi - \frac{1}{20} \sin 2k\pi \sin 4k\pi}{1 - \cos 2k\pi - \frac{1}{6} \sin^2 2k\pi + \frac{1}{20} \sin 2k\pi \sin 4k\pi} = a/b = \lambda$$

$$a = e^{2k\pi i}$$

$$x = 3 - 4\nu$$

$$R = \frac{a}{2 \left( 1 + \cos 2k\pi - \frac{1}{6} \sin^2 2k\pi - \frac{1}{20} \sin 2k\pi \sin 4k\pi \right)}$$

$$\rho_1 = \frac{R}{a}$$

$$\rho_2 = \frac{R}{b} = \lambda \rho_1$$

$$a_1 = 1 + \cos(2k\pi)$$

$$a_2 = -\frac{1}{6} \sin^2(2k\pi)$$

$$a_3 = -\frac{1}{20} \sin(4k\pi) \sin(2k\pi)$$

$$b_1 = -1 + \cos(2k\pi)$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i = a_1 + a_2 + a_3$$

$$A = a_1 - 3a_2 + 5a_3$$

$$B = b_1 + 3a_2 + 5a_3$$

$$\beta = \frac{\sqrt{2}}{\pi} - 1 + 2k$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{2}}{\pi} - 2k$$

$$\delta = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} + 1 - 2k + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 - \cos k\pi}{1 + \cos k\pi}$$

$$\mu = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} + 2k$$



$$l = \frac{\left[ (1 + \nu_s^2)n(a+b) - 60 \frac{E_s I_s}{Gb^3} \left[ (\kappa + 1) \frac{nR^2 A^2 \beta}{\lambda^2 a} + (\kappa - 1) \frac{nR^2 B^2 \gamma}{b} + \kappa \frac{R}{\sum_{i=1}^3 a_i} + \frac{R}{\sum_{i=1}^3 a_i} \left( \frac{-3 + a_1 - 2a_2 + 2a_3}{1 + a_1 - 6a_2 + 10a_3} \right) + R \left[ 1 + \frac{13}{12(a_1 + a_2 + a_3)(1 - 3a_2)} \right] \right] + 60 \frac{1}{\lambda} \frac{E_s I_s}{Gb^3} \left[ (\kappa - 1) \frac{nR^2 A^2 \beta}{\lambda^2 a} + (\kappa + 1) \frac{nR^2 B^2 \gamma}{b} + \kappa \frac{R}{\sum_{i=1}^3 a_i} + \frac{R}{\sum_{i=1}^3 a_i} \left( \frac{1 + a_1 + 2a_2 + 2a_3}{-3 + a_1 + 6a_2 + 10a_3} \right) + R \left[ 1 + \frac{13}{12(a_1 + a_2 + a_3)(1 - 3a_2)} \right] \right] \right]}{\left[ - (1 - \nu_s^2) \left[ m(a+b) + \frac{5(\lambda+1)a}{2} \right] + 60 \frac{E_s I_s}{Gb^3} \left[ \kappa \left( \frac{mR^2 A^2 \beta}{\lambda^2 a} + \frac{R^2 B^2 \gamma m}{b} + RA\delta + RB\mu \right) + \frac{mR^2 A^2 \beta}{\lambda^2 a} - \frac{R^2 B^2 \gamma m}{b} - RA\delta + RB\mu \right] + 60 \frac{1}{\lambda} \frac{E_s I_s}{Gb^3} \left[ \kappa \left( \frac{mR^2 A^2 \beta}{\lambda^2 a} + \frac{R^2 B^2 \gamma m}{b} + RA\delta + RB\mu \right) + \frac{mR^2 A^2 \beta}{\lambda^2 a} + \frac{R^2 B^2 \gamma m}{b} - RA\delta + RB\mu \right] \right]}$$

$$m = \frac{\kappa(A\delta' + B\mu' - A\delta - B\mu) - A\delta' + B\mu' + A\delta - B\mu}{\left[ \kappa \left( \frac{A^2 \beta \rho_1}{\lambda^2} + B^2 \gamma \rho_2 - \frac{A^2 \beta' \rho_1}{\lambda^2} - B^2 \gamma' \rho_2 \right) + \frac{A^2 \beta \rho_1}{\lambda^2} - B^2 \gamma \rho_2 - \frac{A^2 \beta' \rho_1}{\lambda^2} + B^2 \gamma' \rho_2 \right]}$$

$$n = \frac{\left[ \frac{(0.704 + 2.121a_2 - 5a_3)(0.19 + 0.19a_1 - 0.92a_2 + 0.92a_3) - (0.207 + 0.5a_1 - 2.121a_2)(1.38 - 0.46a_1 + 0.38a_2 + 0.38a_3)}{(0.207 + 0.5a_1 - 2.121a_2)^2 + (0.707 + 2.121a_2 - 5a_3)^2} \right] + \left[ 0.92 \sum_{i=1}^3 a_i + \frac{13(0.38 - 2.76a_2)}{12(1 + 9a_2^2)} \right] - \left[ \frac{-3 + a_1 - 2a_2 + 2a_3}{1 + a_1 - 6a_2 + 10a_3} \right] - \left[ \sum_{i=1}^3 a_i + \frac{13}{12(1 - 3a_2)} \right] - 0.076\kappa}{\left[ \kappa \left( \frac{A^2 \beta \rho_1}{\lambda^2} + B^2 \gamma \rho_2 - \frac{A^2 \beta' \rho_1}{\lambda^2} - B^2 \gamma' \rho_2 \right) + \frac{A^2 \beta \rho_1}{\lambda^2} - B^2 \gamma \rho_2 - \frac{A^2 \beta' \rho_1}{\lambda^2} + B^2 \gamma' \rho_2 \right] \sum_{i=1}^3 a_i}$$