

사다리꼴 핀에 대한 해석적 방법과 실험의 비교

Comparison Between Analytic Method and Experimentation on the Trapezoidal Fin

조 칠 현* 한 영 민** 강 형 석***
Cho, Chul-Hyun Han, Young-Min Kang, Hyung-Suk

Abstract

A trapezoidal fin is analyzed by using one-dimensional analytic method. For two boundary conditions, the heat transfer rate is given instead of specified temperature at the fin base and heat conduction into the fin tip is equal to heat convection from the tip. Temperatures at three different points within the trapezoidal fin are measured by using experimental apparatus. A comparison of the temperature between one-dimensional analytic method and experimentation is made as a function of dimensionless fin length under both free convection and forced convection conditions. The ratio of heat loss from the fin tip surface to that through the fin base is presented as a function of dimensionless fin length and Biot number. One of results shows that the relative error increases as the air velocity increases for forced convection conditions.

기호설명

A_c : 핀 단면적 [m^2]
 A_s : 핀 주위 표면적 [m^2]
 b : 핀 측면상단의 기울기 ($= 0 \leq b \leq 1/L$)
 Bi : 핀 주위 Biot 수 ($= hl'/k$)
 E_0 : 무차원 열손실 ($= Q_0/2k\theta_0$)
 h : 핀 표면 주위의 열전달 계수 [$W/m^2 \cdot ^\circ C$]
 k : 열전도율 [$W/m \cdot ^\circ C$]
 I_0 : 수정된 제1종 zeroth-order Bessel 함수

I_1 : 수정된 제1종 first-order Bessel 함수
 K_0 : 수정된 제2종 zeroth-order Bessel 함수
 K_1 : 수정된 제2종 first-order Bessel 함수
 l' : 핀 높이의 반 [m]
 L' : 핀 길이 [m]
 L : 무차원 핀 길이 ($= L'/l'$)
 q : 열유속 [W/m^2]
 Q_0 : 핀으로부터의 열손실 [W] ($= Q$)
 T : 온도 [$^\circ C$]
 x' : 길이 방향 좌표 [m]
 x : 무차원 길이 방향 좌표 ($= x'/l'$)
 y' : 높이 방향 좌표 [m]
 y : 무차원 높이 방향 좌표 ($= y'/l'$)
 θ : 무차원 온도
($= (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$)

* 강원대학교 대학원 기계공학과, 박사과정
** 강원대학교 대학원 기계공학과, 석사과정
*** 강원대학교 기계공학과 교수, 공학박사

Θ_0 : 변형된 온도 ($T_w - T_\infty$)

상첨자
' : 차원변수

하첨자
w : 벽
 ∞ : 주위
tip : 핀 끝

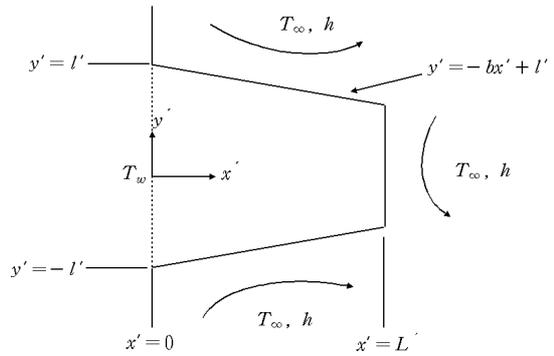


Fig. 1 Geometry of a Trapezoidal fin

1. 서론

핀 또는 확장된 표면은 열전달을 증가시키기 위한 수단으로 많이 사용되고 있으며, 그 사용범위는 일반 가정의 간단한 주방기구에서부터 최첨단 항공기까지 매우 광범위하다. 이러한 핀에 대한 연구가 계속 이루어져 왔으며 여전히 많은 논문들이 발표되고 있다. 특히 핀에 대한 직접적인 해석을 한 연구들은 주로 수치해석적인 방법을 사용하였다. 예를 들면, Ullmann과 Kalman[1]은 일정한 질량의 네 가지 다른 단면적의 환형 핀으로부터 열손실 증가를 해석하였으며, Kang과 Look[2]은 해석적인 방법을 사용하여 기울기가 변화하는 사다리꼴 핀에 대하여 해석을 하였다. 또한 Abrate와 Newnham[3]은 유한차분법을 사용하여 전열면에 붙어 있는 삼각 핀에 대한 해석을 수행한 반면, Lee 와 Kang[4]은 3차원 해석적 방법을 사용하여 사다리꼴 핀으로부터의 열손실 및 온도분포에 대한 연구를 하였다. Aziz 와 Nguyen[5]은 유한요소법을 사용하여 삼각 핀에 대한 온도분포와 열손실에 대하여 연구한 반면, Crawford[6]는 핀 바닥온도가 사이클로 적으로 변화할 때 사다리꼴 핀을 해석하였다. 최근에는 Kang과 Look[7]이 열적 그리고 기하학적으로 비대칭인 사다리꼴 핀의 최적화에 대한 연구를 하였다. 이와 같이 기존의 연구들이 주로 수치적인 방법에 치중하여 이루어졌을 반면, 실험적인 방법에 의한 해석은 그다지 많이 이루어지지 않았다. 따라서 본 연구에서는 사다리꼴 핀에 대한 해석적 방법과 실험에 의한 방법을 동시에 수행하여 핀 내의 온도에 대한 데이터를 해석적 방법에 의한 결과와 실험에 의해 구해진 결과를 비교 분석하였다. 또한 그동안 이루어진 사다리꼴 핀에 대한 대부분의 연구들은 경계조건으로 핀 바닥에서의 일정한 온도가 주어졌다. 그러나 본 연구에서는 실험과 직접적으로 비교하기 위하여 핀 바닥에서 일정한 열전달을 경계조건으로 하였다. 이와 같은 변화된 경계조건을 가지고 핀 바닥으로부터의 열손실에 대한 핀 끝으로부터의 열손실의 비가 Biot 수와 무차원 핀 길이에 함수로서 연구된다.

2. 1차원 해석적 방법

Fig. 1에서 보여지는 사다리꼴 핀에 대한 무차원의 지배 방정식은 식 (1)과 같이 표현된다.

$$\frac{d^2\Theta}{dx'^2} - \frac{b}{1-bx'} \frac{d\Theta}{dx'} + Bi \frac{\sqrt{1+b^2}}{1-bx'} \Theta = 0 \quad (1)$$

위의 지배방정식을 풀기 위한 두 개의 무차원 경계조건들은 식 (2)와 식 (3)으로 나타내어진다.

$$\frac{d\Theta}{dx'} = -E_0 \quad \text{at} \quad x=0 \quad (2)$$

$$\frac{d\Theta}{dx'} + Bi \cdot \Theta = 0 \quad \text{at} \quad x=L \quad (3)$$

식 (2)는 핀 바닥에서 일정한 열전달이 주어짐을 의미하고 식 (3)은 핀 끝에서 전도에 의한 열전달은 대류에 의한 열전달과 같음을 의미한다. 사다리꼴 핀의 무차원 온도분포식 $\Theta(x)$ 는 식 (1)에 식 (2)와 식 (3)의 경계조건을 적용하여 구할 수 있는데, 그 결과는 식 (4)로 쓰여진다.

$$\Theta(x) = \frac{E_0}{b \cdot P} \frac{(A(x) + B(x))}{D} \quad (4)$$

여기서,

$$A(x) = C_1 \cdot I_0(2P\sqrt{1-bx}) \quad (5)$$

$$B(x) = C_2 \cdot K_0(2P\sqrt{1-bx})$$

(6)

$$D = C_1 \cdot I_1(2P) - C_2 \cdot K_1(2P)$$

(7)

$$P = \sqrt{Bi} \cdot \sqrt{\frac{1}{b^2} + 1}$$

(8)

$$C_1 = \frac{b \cdot P}{\sqrt{1 - bL}} \cdot K_1(2P\sqrt{1 - bL}) + Bi \cdot K_0(2P\sqrt{1 - bL})$$

(9)

$$C_2 = \frac{b \cdot P}{\sqrt{1 - bL}} \cdot I_1(2P\sqrt{1 - bL}) - Bi \cdot I_0(2P\sqrt{1 - bL})$$

(10)

위 식에서 보이는 b 의 값은 실험에 사용한 핀과 직접 비교하기 위하여 0.024로 주어진다.

핀 끝에서 발생하는 열손실은 식 (11)에 의해서 구해진다.

$$\begin{aligned} E_{tip} &= -kA \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x'=L'} \\ &= -2k\theta_0 \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} \\ &= \frac{2k}{D} \frac{E_0\theta_0}{\sqrt{1 - bL}} [C_1 I_1(2P\sqrt{1 - bL}) - C_2 K_1(2P\sqrt{1 - bL})] \end{aligned}$$

(11)

3. 실험장비 및 실험 방법

실험 장치의 개략도를 Fig. 2에 나타내었다. 실험에 사용된 열교환장치의 사다리꼴 핀은 핀 길이가 62mm이고 핀 바닥에서의 높이는 5mm, 핀 끝에서의 높이는 2mm이다. 그리고 핀 바닥과 핀 바닥으로부터 35mm 그리고 60mm지점에서 핀의 온도를 측정할 수 있는 구멍이 뚫려있다. 실험은 전열면에 40W, 50W, 60W의 전력이 공급되는 세 경우에 대하여, 각각 핀에 어떠한 외부의 작용도 주지 않은 자연대류와 팬을 이용하여 풍속 $v=0.4\text{m/s}$, 0.8m/s 그리고 1.2m/s 의 바람이 핀 주위를 통과하는 강제대류 하에서 그 데이터를 측정하였다. 핀에 전력을 가하여 실험을 실행하기 전에 주변의 온도를 측정한다. 그 다음 40W의 전력을 공급하여 핀 바닥을 가열하고 핀 바닥의 온도가 정상상태에 도달할 때까지 기다렸다가 핀의 온도가 정상상태가 되었을 때의 온도를 측정한다. 온도측정은 온도측정 장치를 이용하며 측정위치는 핀 바닥으로부터 0mm, 35mm, 60mm지점에서의 핀의 온도를 측정한다. 이제

팬을 가동시켜 풍속이 0.4m/s인 바람이 핀을 통과하게 하여 강제대류를 시켜주고 핀 바닥으로부터 0mm, 35mm, 60mm지점에서의 핀의 온도를 측정한다. 위와 동일한 방법으로 풍속이 0.8m/s, 1.2m/s 일 때의 주어진 지점에서의 핀의 온도를 측정한다. 전력이 각각 50W, 60W인 경우에 대하여서도 40W의 경우와 동일한 방법으로 실험을 실시하여 그 온도를 기록한다.

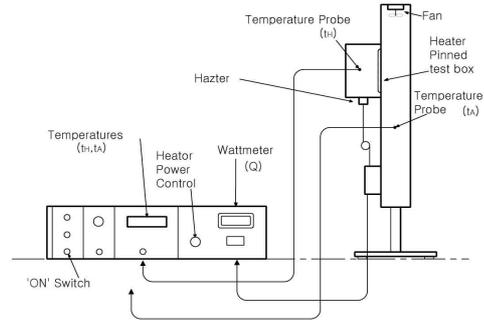


Fig. 2 Experimental Apparatus

4. 결과 및 고찰

Figure 3은 자연대류 하에서 무차원 핀 길이 L 의 변화에 따른 각각 해석적 방법과 실험적 방법으로부터 구한 무차원 핀 온도의 비교를 보여준다. 두 방법 모두 핀의 바닥과 끝에서 열전달이 발생하는 것을 경계조건으로 주었다. 해석적 방법의 경우 온도를 무차원 핀 길이의 함수로 나타내었으며, 실험값은 핀의 세지점값을 측정하여 나타내었다. 해석적인 경우 Biot 수를 0.00061로 하였을 경우, 실험데이터와 핀의 바닥과 끝에서는 거의 일치하였으며 $L=14$ 지점에서는 실험값을 기준으로 하여 약 3.6%의 오차가 나타남을 보인다.

Figure 4는 강제대류 하에서 무차원 핀 길이 L 의 변화에 따른 각각 해석적 방법과 실험적 방법으로부터 구한 무차원 핀 온도의 비교를 보여준다. 실험에서 주위공기의 속도는 각각 0.4, 0.8, 1.2m/s로 변화를 주었다. 먼저 (a)는 공기의 속도가 0.4m/s인 경우인데 해석적인 방법에서 Biot 수를 0.0027로 증가시켰을 때 주어진 세 지점 모두에서 거의 온도값이 일치함을 보여준다. 공기의 속도를

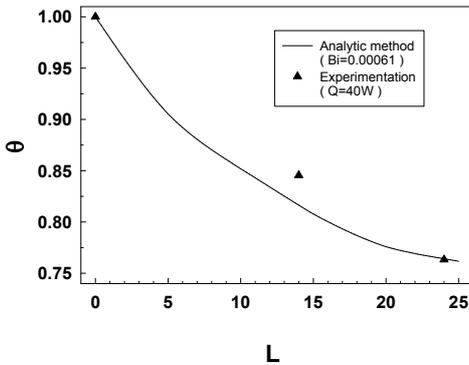
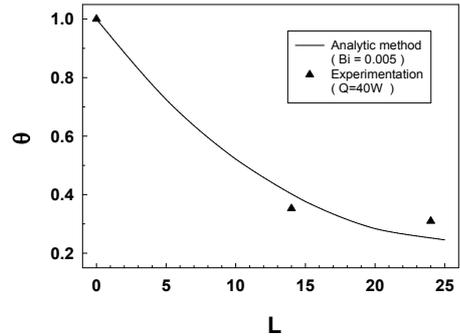
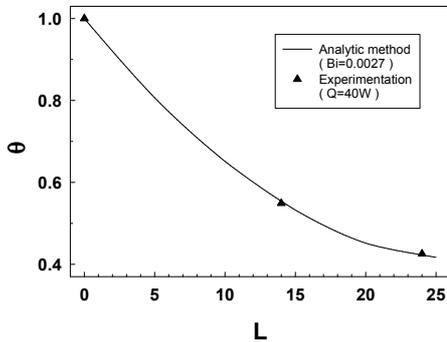


Fig. 3 Temperature versus dimensionless fin length for free convection ($v=0$ m/s)

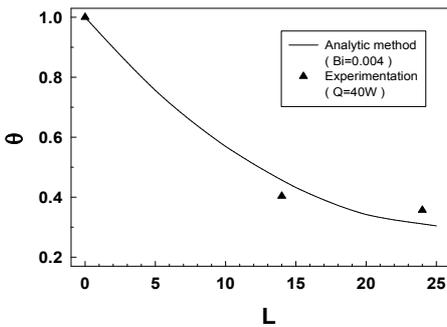


(c) $v=1.2$ m/s

Fig. 4 Temperature versus dimensionless fin length for forced convection for $b=3/5L$



(a) $v=0.4$ m/s



(b) $v=0.8$ m/s

0.8m/s 로 올린 (b)에서는 두 방법을 비교해보면 해석적인 방법에서 Biot 수를 0.004로 주었을 때 $L=14$ 인 지점에서는 실험값이 해석적 방법에 의한 값보다 작아지고 $L=24$ 인 지점에서는 반대로 커지는 것을 알 수 있다. 공기의 속도를 1.2 m/s로 올

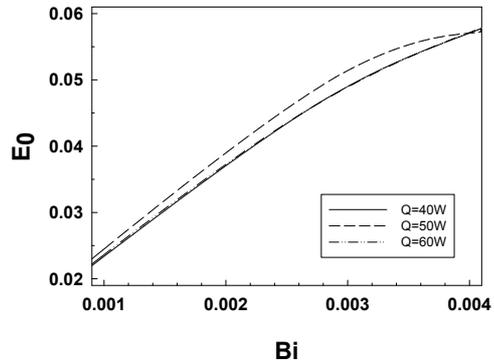


Fig. 5 Dimensionless heat loss versus Biot number from experimentation for $v=0$ m/s

린 (c)에서는 두 방법 사이의 상대오차가 앞의 두 경우보다 더욱 증가함을 알 수 있다.

실험에서 구한 데이터로부터 Biot 수의 변화에 대한 무차원 열손실 E_0 의 변화가 Fig. 5에서 보여진다. 핀 바닥에서 전력은 각각 40, 50 그리고 60W로 주어졌으며, 세 경우 모두 Biot 수의 증가에 따라 무차원 열손실은 거의 선형적으로 증가함을 나타낸다. 이 그림에서 Biot 수는 해석적 방법과 실험적 방법을 비교할 때 해석적 방법에서 채택한 Biot 수를 나타내며, 핀 바닥에 일정한 전력을 주었음에도 불구하고 무차원 열손실이 Biot 수

의 증가에 따라 증가하는 것은 무차원 열손실의 분모에서 온도항의 값이 작아지기 때문이다.

보통 핀에 대한 연구에서 핀의 바닥 온도가 경계조건으로 주어지는 반면 본 연구의 1차원 해석에서는 실험값과 직접적으로 비교하기 위하여 바닥을 통하여 들어오는 열전달량이 경계조건으로 주어졌다. 이와 같이 핀 바닥을 통하여 들어오는 열전달량의 변화에 대한 핀 끝에서의 열전달량의 변화가 Fig. 6에서 보여진다. 길이, 기울기 그리고 Biot 수가 일정하게 주어졌을 때 핀 바닥을 통한 열전달이 증가할 경우 핀 끝에서의 열전달은 이에 따라 선형적으로 증가함을 알 수 있다. 또한 예상한 바와 같이, Biot 수가 증가할수록 핀 끝에서의 열손실은 감소하는데 이는 Biot 수가 증가 할수록 핀 길이에 따라 주위에서 많은 열손실이 일어나기 때문이다.

Fig. 7은 $b=3/5L$ 일 때 세 경우의 Biot 수에 대하여 무차원 핀 길이의 변화에 따라 핀 바닥을 통한 열전달에 대한 핀 끝을 통한 열손실의 비를 나타낸다. 세 경우 모두 무차원 길이가 감소함에 따라 그 비는 처음에는 급격히 감소하다 그 이후 서서히 감소함을 보여준다. 특히 Biot 수가 0.1인 경우에는 무차원 핀 길이가 약 12 이후에는 그 비가

Table. 1 Θ_{tip}/Θ_0 with the variation of L and Bi for $b=1/4L$

Bi	Θ_{tip}/Θ_0				
	L=5	L=10	L=15	L=20	L=25
0.001	0.9822	0.9481	0.8776	0.8024	0.7208
0.01	0.8434	0.5862	0.3687	0.2223	0.1318
0.1	0.2942	0.0559	0.0103	0.0019	0.00035

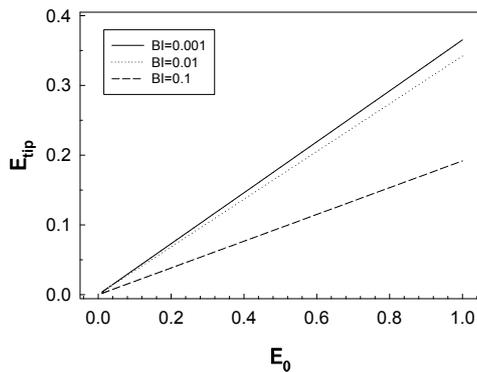


Fig. 6 Dimensionless heat loss from tip versus that through the base for $L=5$ and $b=3/5L$

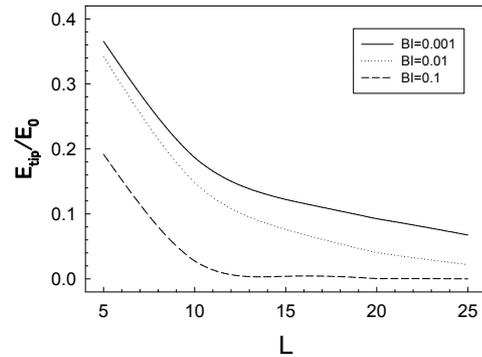


Fig. 7 The ratio of heat loss versus dimensionless fin length for $b=3/5L$

거의 0을 나타내는데 이는 큰 Biot 수로 인하여 길이에 따라 핀 주위로 이미 모두 열손실이 일어나므로써 핀 끝에서의 열손실이 일어나지 않음을 의미한다.

Fig. 8은 $b=3/5L$ 이고 무차원 핀 길이가 각각 5,

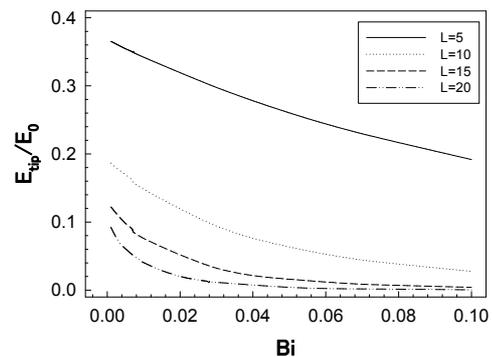


Fig. 8 The ratio of heat loss versus Biot number for $b=3/5L$

10, 15 그리고 20으로 주어졌을 때 Biot 수의 변화에 따른 핀 바닥을 통한 열전달에 대한 핀 끝을 통한 열손실의 비를 나타낸다. 핀 길이가 짧은 5인 경우는 열손실 비가 Biot 수의 변화에 대하여 거의 선형적으로 변하는 반면 Biot 수가 증가할수록 열손실비가 처음에는 급격히 감소하다가 그 이후 서서히 감소함을 보여준다. 핀 길이가 긴 15와 20인 경우 Biot 수가 0.04 이후에는 열손실 비가 거의 변하지 않음을 보여주는데 이는 이미 핀 주위를 통해 많은 열손실이 일어났기 때문에 핀 끝에서의 열손실이 매우 작음을 의미한다.

마지막으로 Biot 수와 핀 길이의 변화에 대하여 핀 바닥에 대한 핀 끝 온도의 비가 Table 1에 나열된다. 예상했던 바와 같이 핀 길이가 증가함에 따라 그리고 Biot 수가 증가함에 따라 온도비는 감소함을 나타낸다. 예를 들면, $Bi=0.001$ 과 $L=5$ 에서는 그 비가 거의 1에 가까운 0.9822를 보이는 반면 $Bi=0.1$, $L=25$ 에서는 거의 0에 가까운 0.00035를 나타낸다. 또한 특이한 점은 온도비가 핀 바닥을 통한 열손실 E_0 에는 무관한점이다. 이는 E_0 가 커지면 핀 바닥온도와 핀 끝 온도가 다 같이 높아지는 반면 E_0 가 작아지면 두 지점의 온도가 다 같이 낮아지기 때문이다.

5. 결론

본 연구에서는 해석적인 방법과 실험적인 방법을 사용하여 얻은 결과를 비교 분석하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다. 자연대류에서는 해석적 방법으로부터 구한 온도값과 실험으로부터 구한 온도값들이 상당히 일치하였으나, 강제대류에서 풍속이 증가함에 따라 상대오차가 증가하였다. 해석적 방법에서와 마찬가지로 실험을 통해서도 Biot 수의 증가에 따라 무차원 열손실이 증가함을 볼 수 있었다. 무차원 핀 길이와 Biot 수가 주어졌을 때 핀 바닥을 통한 열전달의 변화에 대하여 핀 끝을 통한 열전달은 선형적으로 변화한다. 마지막으로 예상했던 바와 같이 핀 바닥을 통한 열전달에 대한 핀 끝을 통한 열손실의 비는 Biot 수와 무차원 핀 길이가 증가함에 따라 감소함을 보여주었다.

참 고 문 헌

- [1] Uallmann, A. and Kalman, H., "Efficiency and Optimized Dimensions of Annular Fins of Different Cross-Section Shapes", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 32, NO. 6, pp. 1105~1110, 1989.
- [2] Kang, H. S. and Look, D. C. Jr., "Two Dimensional Trapezoidal Fins Analysis", *Computational Mechanics*, Vol. 19, No. 3,

pp. 247~250, 1997.

- [3] Abrate, S. and Newnham, P., "Finite Element Analysis of Triangular Fins Attached to a thick Wall", *Computer & Structures*, vol. 57, no. 6, pp. 945-957, 1995.
- [4] Lee, S. J. and Kang, H. S., "Trapezoidal Fin Analysis by the 3-D Analytical Method", *Korean Journal of Air-Conditioning and Refrigeration Engineering*, Vol. 12, No. 4, pp. 388~397, 2000.
- [5] Aziz, A. and Nguyen, H., "Two-Dimensional Effects in a Triangular Convecting Fin", *AIAA J. of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 6, No. 1, pp. 165~167, 1992.
- [6] Crawford, M., "Heat Transfer in Trapezoidal Straight Fins with a Periodically varying Base Temperature", *ASME 82-WA/HT-41*.
- [7] Kang, H. S. and Look, D. C. Jr., "Optimization of Thermally and Geometrically Asymmetric Trapezoidal Fins", *AIAA J. of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 18, No. 1, pp. 52~57, 2004.