

## On the Estimation of Parameters in ALT under Generalized Exponential Distribution

Sang Chul Yoon<sup>1)</sup>

### Abstract

The two parameter generalized exponential distribution was recently introduced by Gupta and Kundu (1999). It is observed that the generalized exponential distribution can be used quite effectively to analyze skewed data set.

This paper develops the accelerated life test model using generalized exponential distribution and considers maximum likelihood estimation of parameters under the tampered random variable model. To show the performance of proposed maximum likelihood estimates, some simulation will be performed. Using a real data set, an example will be given.

**Keywords** : Accelerated Life Testing, Generalized Exponential Distribution, Tampered Random Variables

### 1. 서론

신뢰성 연구에 있어서 신뢰도가 높은 제품의 수명에 대한 정보를 정상조건에서의 신뢰성시험으로 얻기 위해서는 많은 시간과 비용이 소요된다. 특히 수명주기가 짧은 제품일 경우에는 자료를 얻는 시점이 제품의 수명주기보다 늦어 현실적으로 의미가 없는 경우도 생긴다. 이런 경우 제품을 정상조건보다 더 열악한 조건에서 시험하는 가속수명시험 (accelerated life test; ALT)기술을 많이 사용한다.

가속수명시험은 제품의 정상조건에서의 스트레스-예를 들면, 온도, 전압, 압력등과 이들의 조합을 사용하는 등-를 더 열악한 수준으로 변화시켜 수명에 대한 자료를 빨리 얻어, 여기서 관측되는 자료로부터 정상조건에서의 수명을 추론한다. 가속수명시험은 시험제품에 스트레스를 가하는 방법에 따라 일정스트레스 시험 (constant stress test) 방법, 단계스트레스 시험 (step stress test) 방법 그리고 점진형스트레스 시험 (progressive stress test)방법 등으로 분류된다.

---

1) 경북 경산시 유곡동 290번지 대구한의대학교 정보·경영대학 정보보호학과 강사  
E-mail : scyoon@dhu.ac.kr

단계스트레스 시험 방법은 스트레스 수준을 단계적으로 변화시키는 것으로 주어진 스트레스 수준에서 시험을 시작하여 일정 시점까지 고장을 관측하고 이 시점까지 고장이 나지 않은 제품에 대하여 스트레스를 더 높은 수준으로 높여 일정 시점까지 시험을 한 후 이 시점까지 고장이 나지 않은 제품에 대해서 더 높은 스트레스 수준에서 시험하는 과정을 반복하여 수명을 측정하는 방법이다. 이 방법과 관련된 연구는 Khamis 와 Higgins(1998), 윤상철등(2000a), Park, Yoon과 Cho (2000b)등이 있다.

통계학에서 제품의 수명 자료의 분석에 대한 가장 잘 알려진 분포는 와이블분포와 감마분포를 따르는 경우가 다수이고, 이들 분포는 치우쳐진 자료 분석에 잘 적합된다. 이 두 분포는 형상 모수에 의존하여 감소하거나 증가하는 위험률 혹은 지수분포와 같이 일정 위험률을 갖는 모형에 잘 적합되며, 이 두 분포는 물리적인 해석도 또한 용이하다.

그러나 이 두 분포는 다음과 같은 취약점을 가지게 된다. 먼저, 와이블분포와 감마분포는 형상 모수가 상수가 아닌 경우 분포함수, 생존함수의 계산이 쉽지 않다는 약점을 가지고 형상 모수가 상수가 아닌 경우에 위험함수, 생존함수나 분포함수는 통계 소프트웨어나 수학적 표들을 사용하여 얻어야한다. 계산적인 면에서 보면 감마분포는 와이블분포 비해 위험함수, 생존함수나 분포함수등의 계산에서 사용이 다소 제한적이다. 뿐만아니라 와이블분포는 중도절단 자료를 가지는 경우에도 수명 자료 분석에서 감마분포보다 더 유용하다. 또한 영보다 큰 양의 값으로 관측되는 자료에 잘 적합된다.

한편, 일반화된 지수분포 (generalized exponential ; GE)는 Gupta 와 Kundu (1999, 2001a, b와 2002, 2003, 2005)가 처음 소개하였고 여러 통계적 성질들을 밝혔다. GE분포는 오른쪽으로 치우쳐진 분포를 가지는 자료를 분석하기에 적절한 분포임이 알려져 있으며 그 모양은 대수정규분포와 유사하나 대수정규분포는 꼬리쪽에서 지수분포보다 두터운 분포이나 GE분포는 지수분포와 꼬리부분에서 유사하다. 또한 GE분포는 형상 모수에 의존하여 증가 또는 감소하는 위험률을 가진다. GE분포는 많은 성질들이 감마분포의 성질과 유사하나 분포함수는 감마분포에 비해 계산이 간단하다.

이 논문에서는 먼저 GE분포를 이용하여 변환확률변수의 단계스트레스 가속수명시험모형을 제안하고, 제안된 모형에 대한 모수를 최대우도추정법을 이용하여 추정하고, 추정량에 대한 모의실험을 통하여 효율성을 보인다. 그리고 실제 자료를 이용하여 자료를 분석하는 사례를 보인다.

## 2. 일반화된 지수분포에서의 단계스트레스 가속수명모형

변환확률변수 모형은 DeGroot 와 Goel (1979)이 제안하였으며, 이들은 변환확률변수가 어떤 미지의 가속인자에 의해 변화시간의 단위에 대한 나머지 수명의 곱으로 나타나는 낮은 스트레스에서 높은 스트레스로 변하는 효과를 제안하였다.

가속수명시험모형 자료의 통계적 분석을 위해서는 스트레스 수준과 수명과의 관계를 나타내는 모형과 스트레스 수준의 변화가 제품수명에 미치는 효과를 설명하는 모형이 필요하다.

이절에서는 이 논문에서 고려하는 변환확률변수 (tampered random variable ; TRV) 모형과 사용되는 기본적인 가정들을 정리하고, 변환확률변수 모형에서 제품의

수명분포를 유도한다.

## 2.1 기본 모형

DeGroot와 Goel (1979)의 변환확률변수모형을 표현하기 위하여  $T$ 를 정상수준에서 수명시간이라 하고  $X$ 를 단계 스트레스 가속수명시험에서의 수명시간이라 하면 변환 확률변수는 다음과 같이 표현된다.

$$X = \begin{cases} T, & T \leq \tau \\ \tau + \frac{1}{a}(T - \tau), & T > \tau. \end{cases} \quad (2.1)$$

여기서  $X$ 는 변환확률변수이고  $\tau$ 는 변환점 (tampering point)이라 하며,  $a$ 는 변환계수 (tampering coefficient)라 정의한다. 그리고  $0 < a < 1$ 이다.

최근 Gupta 와 Kundu (1999)는 일반화된 지수 분포 (예 : 1999, 2001a, b와 2002, 2005)를 소개하였고, 그들은 GE 분포함수를 다음과 같이 정의하였다.

$$F(x | \alpha, \lambda) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha, \quad x > 0.$$

따라서 확률밀도함수는 아래와 같다.

$$f(x | \alpha, \lambda) = \alpha \lambda (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \quad x > 0, \quad (2.2)$$

여기서  $\alpha > 0$ 는 형상(shape)모수이고  $\lambda > 0$ 는 척도(scale)모수이다.  $\alpha = 1$  때는 평균이  $1/\lambda$ 인 지수분포이고,  $\alpha \leq 1$  때는 감소위험률을 가지는 분포이며,  $\alpha > 1$  단봉(unimodal) 척도함수이다. Gupta 와 Kundu (2001a)는 확률밀도함수가 항상 오른쪽으로 기울어져 (skewed) 있고, 기울어진 자료에 대한 분석에 아주 효과적이라는 것을 밝혔다.

정상조건에서의 수명시간  $T$ 가 모수  $\lambda, \alpha$ 인 일반화된 지수분포를 따른다면 단계 스트레스 가속수명모형인 식(2.1)에 의한 분포함수는 다음과 같이 나타낼 수 있으며

$$G(x | \lambda, \alpha) = \begin{cases} F(x | \lambda, \alpha), & x \leq \tau \\ F\left(\tau + \frac{x - \tau}{a} | \lambda, \alpha\right), & x > \tau, \end{cases} \quad (2.3)$$

여기서  $F(x | \lambda, \alpha) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha$ 이다.

따라서 식 (2.1), 식 (2.2) 와 식 (2.3)를 이용하여 단계 스트레스 가속수명모형에서의 일반화된 지수분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$g(x | \theta) = \begin{cases} \alpha \lambda (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \leq \tau \\ a \alpha \lambda (1 - e^{-\lambda(\tau + a(x-\tau))})^{\alpha-1} e^{-\lambda(\tau + a(x-\tau))}, & x > \tau, \end{cases} \quad (2.4)$$

### 3. 일반화된 지수분포에서의 단계스트레스 가속수명모형에 대한 최우추정량

이 장은 GE 분포에서 가속수명시험 모형을 위한 모수  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $a$ 의 추정에 대한 최우 추정법을 고려하였다.

#### 3.1 최우추정량

식 (2.3)과 식 (2.4) 변환확률변수 모형에서 관측된 단계스트레스 가속수명모형의 우도함수는

$$\begin{aligned} L(\lambda, \alpha, a | x) &= \prod_{i=1}^{n_1} g(x_i | \lambda, \alpha, a) \prod_{i=1}^{n_2} a g(\tau + a(x_i - \tau) | \lambda, \alpha, a) \\ &= \alpha^n \lambda^n a^{n_2} \prod_{i=1}^{n_1} (1 - e^{-\lambda x_i})^{\alpha-1} \prod_{i=1}^{n_2} (1 - e^{-\lambda(\tau + a(x_i - \tau))})^{\alpha-1} \\ &\quad \times e^{-\lambda \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} x_i + \sum_{i=1}^{n_2} (\tau + a(x_i - \tau)) \right\}}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

여기서  $n = n_1 + n_2$ 이다.

식 (3.1)로 부터 모수  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $a$ 에 대한 대수우도함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \ell(\theta | x) &= n_2 \ln a + n \ln \alpha + n \ln \lambda \\ &\quad + (\alpha - 1) \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} \ln(1 - e^{-\lambda x_i}) + \sum_{i=1}^{n_2} \ln(1 - e^{-\lambda(\tau + a(x_i - \tau))}) \right\} \\ &\quad - \lambda \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} x_i + \sum_{i=1}^{n_2} (\tau + a(x_i - \tau)) \right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

식 (3.2)에서 모수  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $a$ 에 대한 대수우도함수에 대한 일차편미분식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \lambda} &= \frac{n}{\lambda} + (\alpha - 1) \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}} + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{(\tau + a(x_i - \tau)) e^{-\lambda(\tau + a(x_i - \tau))}}{1 - e^{-\lambda(\tau + a(x_i - \tau))}} \right\} \\ &\quad - \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} x_i + \sum_{i=1}^{n_2} (\tau + a(x_i - \tau)) \right\}, \\ \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} + \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} \ln(1 - e^{-\lambda x_i}) + \sum_{i=1}^{n_2} \ln(1 - e^{-\lambda(\tau + a(x_i - \tau))}) \right\}, \\ \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial a} &= \frac{n_2}{a} + \lambda \sum_{i=1}^{n_2} \left\{ (\alpha - 1) \frac{(x_i - \tau) e^{-\lambda(\tau + a(x_i - \tau))}}{1 - e^{-\lambda(\tau + a(x_i - \tau))}} - \sum_{i=1}^{n_2} (x_i - \tau) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

식 (3.3)에서 모수  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $a$ 에 대한 최우추정량은

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial a} = 0,$$

을 만족하는 비선형 방정식의 해이다. 이 비선형 연립방정식의 해는 Newton-Raphson방법을 이용하여 구할 수 있다. Newton-Raphson방법을 사용하기 위하여 대수우도함수에 대해 각각의 모수에 대한 이차편미분식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \lambda^2} &= -\frac{n}{\lambda^2} - (\alpha - 1) \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} \frac{x_i^2 e^{-\lambda x_i}}{(1 - e^{-\lambda x_i})^2} + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{(\tau + a(x_i - \tau))^2 e^{-\lambda(\tau + a(x_i - \tau))}}{(1 - e^{-\lambda(\tau + a(x_i - \tau))})^2} \right\}, \\ \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \lambda \partial a} &= (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n_2} \frac{(x_i - \tau) e^{-\lambda(\tau + a(x_i - \tau))} \{1 - \lambda(\tau + a(x_i - \tau)) - e^{-\lambda(\tau + a(x_i - \tau))}\}}{(1 - e^{-\lambda(\tau + a(x_i - \tau))})^2} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n_2} (x_i - \tau), \\ \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial a^2} &= -\frac{n_2}{a^2} - \lambda^2 (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n_2} \frac{(x_i - \tau)^2 e^{-\lambda(\tau + a(x_i - \tau))}}{(1 - e^{-\lambda(\tau + a(x_i - \tau))})^2}, \\ \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \lambda \partial \alpha} &= \sum_{i=1}^{n_1} \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}} + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{(\tau + (x_i - \tau)/a) e^{-\lambda(\tau + (x_i - \tau)/a)}}{1 - e^{-\lambda(\tau + (x_i - \tau)/a)}}, \\ \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \alpha^2} &= -\frac{n}{\alpha^2}, \\ \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \alpha \partial a} &= \lambda \sum_{i=1}^{n_2} \frac{(x_i - \tau) e^{-\lambda(\tau + a(x_i - \tau))}}{1 - e^{-\lambda(\tau + a(x_i - \tau))}}. \end{aligned}$$

#### 4. 모의실험

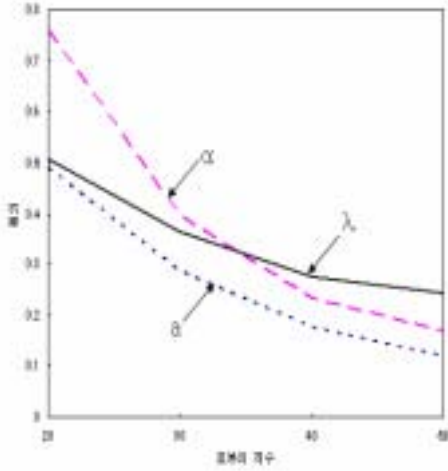
대수우도함수를 최대로 하는 모수  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $a$ 의 값은 비선형방정식의 해를 구하는 Newton-Raphson방법으로 구할 수 있다.

제안한 단계 스트레스 가속수명모형의 세 개의 추정량에 대한 정상조건의 단계 스트레스 가속수명모형의 참값을 모수에 대하여 각각  $\alpha = 2.0$ ,  $\lambda = 3.0$ ,  $a = 2.8$ 로 두고 변환점  $\tau$ 는  $-(1/\lambda)\ln(1 - (0.5)^{(1/\alpha)})$ 으로 두고 소표본의 특성을 조사하기 위하여 모의실험을 실시하였다.

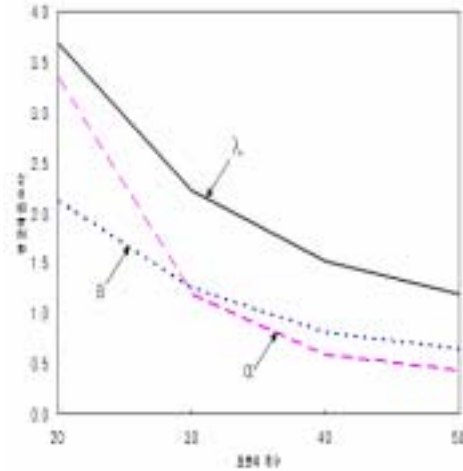
IMSL 난수 발생 부프로그램을 이용하여 1,000번을 반복하여 정상조건에서의 단계 스트레스 가속수명실험의 세 개의 추정량  $\alpha$ ,  $\lambda$ 와  $a$ 에 대한 편의(bias)와 평균제곱오차(mean squared error; MSE)를 각각 구하였다.  $\alpha = 2.0$ ,  $\lambda = 3.0$ ,  $a = 2.8$ 일 때 세 개의 추정량에 대한 정상조건의 단계스트레스 가속수명모형의 편의와 평균제곱오차의 결과는 <표 4.1>에 주어져 있다. 그리고 Newton-Raphson방법의 수렴은 오차가  $10^{-5}$  이내일 때의 값을 추정값으로 선택하였다.

<표 4.1> 모수  $\lambda$ ,  $\alpha$  와  $a$ 에 대한 편의와 평균제곱오차

|          |      | $\lambda$   | $\alpha$    | $a$         |
|----------|------|-------------|-------------|-------------|
| $n = 20$ | Bias | 4.8882102   | 0.7609985   | 0.5068901   |
|          | MSE  | (2.1250811) | (3.3357231) | (3.6872572) |
| $n = 30$ | Bias | 0.5068901   | 0.3971483   | 0.3633917   |
|          | MSE  | (1.2532292) | (1.1883988) | (2.2197681) |
| $n = 40$ | Bias | 0.1768656   | 0.2337796   | 0.2759295   |
|          | MSE  | (0.8176415) | (0.5902450) | (1.5229030) |
| $n = 50$ | Bias | 0.1196449   | 0.1697399   | 0.2433177   |
|          | MSE  | (0.6505109) | (0.4391066) | (0.1195255) |



<그림 4.1> 변환확률변수  
가속수명모형에서 편의



<그림 4.2> 변환확률변수  
가속수명모형에서 평균제곱오차

위의 모의실험 결과 중 <그림 4.1> 와 <그림 4.2> 은 각각 단계 스트레스 가속수명 모형에서 정상조건에 대한 편의와 평균제곱오차가 표본의 크기에 따라 점점 감소함을 보여준다.

예제) 다음의 자료는 deep groove ball bearing의 내구력을 시험한 결과이다. 이 자료는 Lawless, (2003, pp 98-99)에서 와이블 분포로 적합시켜 분석된 자료이며, Gupta 와 Kundu (2003)은 이 자료를 GE 분포에 적합시켜 모수를 추정한 바 있다. 이제 이 수명자료를 이용하여 앞서 제안된 확률변환변수 가속수명모형으로 자료를 변환한 후 본 논문에 제안된 방법으로 모수를 추정하려고 한다. 원래의 자료와 확률변환변수 모형으로 변환한 후의 자료 (글자색이 진하게 나타낸 것)는 다음과 같다.

|            |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |       |
|------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-------|
| 원래의<br>자료값 | 17.88        | 28.92        | 33.00        | 41.52        | 42.12        | 45.60        | 48.80        | 51.84        | 51.96        | 54.12        | 55.56        | 67.80 |
| 변환된<br>자료값 | 68.44        | 68.64        | 68.88        | 84.12        | 93.12        | 98.64        | 105.12       | 105.84       | 127.92       | 128.04       | 173.40       |       |
| 변환된<br>자료값 | 17.88        | 28.92        | 33.00        | 41.52        | 42.12        | 45.60        | 48.80        | 51.84        | 51.96        | 54.12        | 55.56        | 67.80 |
| 변환된<br>자료값 | <b>68.08</b> | <b>68.12</b> | <b>68.17</b> | <b>71.22</b> | <b>73.02</b> | <b>74.12</b> | <b>75.42</b> | <b>75.56</b> | <b>79.98</b> | <b>80.00</b> | <b>89.08</b> |       |

확률변환변수 모형에서 가속모수의 값  $a=5.0$ 으로 변환점은  $\tau=68.00$ 으로 가정하였다. 이 변환점은 자료 중 50% 정도의 자료가 변환점보다 크게하여 가속효과를 보도록 하자는 의도이다. 위의 표에서 알 수 있듯이 23개의 자료값을 모두 관찰하려면 173.40시간이 필요하나 가속수명시험에서는 90정도의 시간이 필요한 것을 알 수 있다. 그러므로 가속 수명효과는 충분히 있다고 판단된다. 또한 원래의 자료로 추정된 최대우도추

정값은 Gupta와 Kundu (2003)에 의하면,  $\hat{\alpha} = 5.2589$ ,  $\hat{\lambda} = 0.0314$ 이었다. 본 논문에서 제안된 최우추정법으로 추정된 모수값은  $\hat{\alpha} = 5.1828$ ,  $\hat{\lambda} = 0.03189$ ,  $\hat{a} = 5.1272$ 로 추정되었다. 가속수명자료를 이용한 추정값과 원래자료를 이용한 추정값이 거의 비슷한 것을 알 수 있다. 이러한 결과는  $a$ 의 값을 변화시켜도 비슷한 결과를 보여주었다. 이로써 제안된 확률변환변수 모형은 유용하다는 사실을 알았다.

## 5. 결론

이 논문에서는 신뢰수명분야에서 새롭게 제안된 일반화된 지수분포(GE)를 단계 가속수명시험 모형에 적용하여 추정하는 문제를 다루었다. 최우추정량 방법을 사용하여 모수를 추정하는 방법을 제안하였으며 모의실험 결과 표본의 크기가 커질수록 편의와 평균제곱오차가 줄어들고 있었다. 또한 실제의 자료를 통해 분석 사례를 보였다. 사례에서 알 수 있듯이 제안된 모형에 의한 모수추정은 성공적이었다.

## 참고문헌

1. 박병구, 윤상철, 조건호 (2000a), 단계 스트레스 가속수명모형을 이용한 쿨백-라이블 러 정보함수에 대한 추정, *응용통계연구*, 제 13권 2호, pp 563-573.
2. DeGroot, M. H. and Goel, P. K. (1979), Bayesian Estimation and Optimal Design in Partially Accelerated Life Testing, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.26, pp 223-235.
3. Gupta, R. D. and Kundu, D. (1999), Generalized Exponential Distribution, *Austral & New Zealand Journal Statist.*, Vol. 41, pp 173-188.
4. Gupta, R. D. and Kundu, D. (2001a), Generalized Exponential Family : an Alternative to Gamma and Weibull Distributions, *Biometrical Journal*, Vol. 43, pp 117-130.
5. Gupta, R. D. and Kundu, D. (2001b), Generalized Exponential Distribution : Different Methods of Estimation, *Journal Statist. Comput. Simulation*, Vol. 69, pp 315-337.
6. Gupta, R. D. and Kundu, D. (2002), Generalized Exponential Distribution : Statistical Inferences, *Journal Statist. Theory Appl.*, Vol. 1, pp 101-118.
7. Gupta, R. D. and Kundu, D. (2003), Discriminating between Weibull and Generalized Exponential Distributions, *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol. 43, pp 179-196.
8. Gupta, R. D. and Kundu, D. (2005), Discriminating between the Log-normal and Generalized Exponential Distributions, *Journal of Statistical Planning Inference*, Vol. 127, pp 213-227.
9. Khamis, I. H. and Higgins, J. J. (1998). A new Model for Step-Stress



- Testing, *IEEE Transactions on Reliability*, 47, 131-134.
10. Lawless, J. F. (2003). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, 2nd edition, Wiley Inter-Science.
  11. Park, B. G., Yoon, S. C. and Cho, J. Y. (2000b), On Estimating of Kullback- Leibler Information Function using Three Step stress Accelerated Life Test, *International Journal of Reliability and Application*, Vol. 1, No. 2, pp 155-165.

[ 2005년 10월 접수, 2005년 11월 채택 ]