Journal of Korean
Data & Information Science Society
2005, Vol. 16, No. 4, pp. 889~898

Simple Estimation in Proportional Odds Model under Censoring[1)]

Ju-Sung Kim[2)] · Min-Ja Seo[3)] · Dong-Yu Won[4)]

Abstract

In this paper we propose a new estimator of relative odds ratio in the two-sample case of proportional odds model under censorship. Also, we show that the estimator consistent and asymptotically normal by using martingale-representation.
The efficiency of the proposed is assessed through a simulation study.

Keywords : 마팅게일, 비례오즈모형, 생존함수, 오즈비, 중도절단

1. 머리말

본 논문의 목적은 관심의 두 군에 대한 위험함수들이 시간에 대하여 비례하는 것이 아닌 그들의 비가 1로 가는 경향이 있을 때 임의의 중도절단 자료를 갖는 생존시간에 대한 상대 오즈를 추정하는 새로운 방법을 제시하는 것이다. 실제응용에서 두 군의 위험함수들이 시간에 대하여 수렴하는 경우는 흔히 발생하는 일이다. 이런 경우는 치료의 초기효과 또는 진단 시 질병의 진행정도의 차이가 시간이 지남에 따라 감소 할 때나 환자의 다른 두 그룹에 대한 위험률이 점점 비슷해질 때 나타난다. 이표본인(two-sample) 경우에 비례오즈모형이 두 위험률의 비가 수렴하는 경우의 자료를 적합 시키는데 유용하다. 만일, $S_i(t)$가 군 $i(i=1,\ 2)$에서 개체에 대한 실제 생존함수를 나타낸다고 했을 때, 군 i에서 생존시간이 t보다 더 큰 개체에 대한 실제오즈는 $\psi_i(t)=\dfrac{S_i(t)}{1-S_i(t)}(i=1,\ 2)$로 나타내어지고, 모든 $t>0$와 어떤 $\theta>0$에 대해서 식 $\psi_2(t)=\theta\psi_1(t)$이 성립할 때, 두 군은 비례오즈모형을 만족한다고 말한다. 만일 h_i

---

1) 이 논문은 2005년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비지원에 의하여 연구되었음.
2) 제1저자: 청주시 흥덕구 개신동 산 48번지 충북대학교 정보통계학과 교수
E-mail : kimjs@chungbuk.ac.kr
3) 청주시 흥덕구 개신동 산 48번지 충북대학교 정보통계학과
4) 충북대학교 전자계산학과 전산통계 전공 이학박사

가 $S_i(t)$에 대응되는 위험함수이면 비례오즈모형 하에서 $\frac{h_2(t)}{h_1(t)} = \frac{1}{1+(\theta-1)S_1(t)}$이다. 따라서, $t \to \infty$일때 $\frac{h_2(t)}{h_1(t)} \to 1$이 된다. Bennett(1983b)에 의해 생존분석에 도입된 비례오즈모형에 대하여 많은 연구가 이루어져 왔는데, 그 중 몇몇을 소개하면 Bennett (1983a)은 여러 공변량값이 각 구간 상에서 측정되어져 있거나, 개체들의 군이 두 개 이상일 때 비례오즈회귀모형이 적합될 수 있음을 보여 주었다. 또 Song Yang과 Prentice(1999)는 우측중도절단 된 생존시간을 갖는 비례오즈회귀모형의 적합을 위하여 가중경험오즈함수를 이용하여 회귀추정량을 얻었으며, Wu(1995)는 이표본(two -sample) 비례오즈모형에서 초기 $\sqrt{n}$-일치 추정치를 사용한 1단계(one-step)추정치를 기본으로 하는 상대 오즈비에 대한 추정방법을 제시하였다. Rossini와 Tsiatis (1996)는 구간 중도 절단된 자료의 분석에서 비례오즈모형을 사용하였고, Huang와 Rossini(1997)는 구간 중도절단을 갖는 비례오즈실패-시간회귀모형에 대하여 sieve최우추정량을 사용하여 회귀계수를 추정하였다. Dabrowska-Doksum (1988)는 이표본 일반화 오즈비모형에서 스코어함수를 이용하여 상대오즈비를 추정하였다. 본 논문에서, 우리는 중도 절단된 자료를 갖는 비례오즈모형 하에서 상대오즈비를 추정하는 새로운 방법을 제안하려고 하여, 2절에서는 새로운 추정량을 제안하고 이 제안된 추정량의 일치성과 근사적 정규성을 마팅게일 표현법을 사용하여 보인다. 또한 3절에서는 우리가 제안한 추정량에 대한 유효성을 평가하기 위하여, 로그-로지스틱분포를 사용하여 모의실험을 통해 얻어진 추정치를 이용하여 95%신뢰구간을 구하여 모수포함확률을 계산한다.

2. 추정량의 제안과 정규근사

생존시간을 나타내는 독립된 양의 확률변수들 $X_{ij}(i=1, 2, j=1,\cdots,n_i)$가 연속분포함수 $F_i(t)=\Pr(X_{ij}\le t)$ $(i=1, 2)$, 생존함수 $S_i(t)=\Pr\{X_{ij}>t\}$ 을 갖는다고 하자. 그리고 $C_{ij}(i=1, 2, j=1,\cdots,n_i)$가 연속분포함수 $G_i(t)=\Pr(C_{ij}\le t)$을 갖는 중도절단된 시간을 나타내는 독립된 양의 확률변수라 하자. 또한 X_{ij}와 C_{ij}가 서로 독립이라고 가정하자. $Z_{ij}=\min(X_{ij}, C_{ij})$라 정의하고 중도절단 되었는지를 나타내기 위하여 $\delta_{ij}=I_{\{X_{ij}\le C_{ij}\}}$라고 정의하자. 이 때, $\delta_{ij}=0$ 인 경우 i군의 j번째 개체가 중도절단 되었음을 의미하며 $\delta_{ij}=1$ 인 경우는 i군의 j번째 개체가 중도절단 되지 않았음을 나타낸다. 중도절단된 경우를 고려하므로 우리에게 유용한 두 표본들은 $\{(Z_{11}, \delta_{11}),\cdots,(Z_{1n_1}, \delta_{1n_1})\}$와 $\{(Z_{21}, \delta_{21}),\cdots,(Z_{2n_2}, \delta_{2n_2})\}$이다. 여기서, 우리는 Z_{ij}에 대한 순서통계량 $Z_{(ij)}$에 대하여, 최대관측치 $Z_{(1n_1)}$과 $Z_{(2n_2)}$가 중도절단 되지 않은 경우에 대해서만 생각한다. 표본 (Z_{ij}, δ_{ij}) $(i=1, 2,\cdots, n)$에 대한 생존함수와 분포함수는 다음과 같다.

$$1-H_i(t)=Pr(Z_{ij}>t)=[1-F_i(t)][1-G_i(t)]$$

$$\begin{aligned} H_i(t) &= pr(Z_{ij}\le t)=Pr(Z_{ij}\le t,\delta=1)+Pr(Z_{ij}\le t,\delta=0) \\ &= \int_0^t[1-G_i(u-)]dF(u)+\int_0^t[1-F(u-)]dG(u) \\ &= H_i^1(t)+H_i^0(t) \end{aligned}$$

여기서, $H_i^1=Pr(Z_i\le t,\ \delta_i=1)$이고, $H_i^0=Pr(Z_i\le t,\ \delta_i=0)$이다.

1절에서 언급한 바와 같이, 비례오즈모형은 위험비가 시간이 무한이 증가함에 따라 $(t\rightarrow\infty)$ 1로 수렴하는 경우에 대단한 가치를 갖는다. 만일 두 군이 비례오즈모형을 만족한다면 모든 $t>0$와 어떤 $\theta>0$ 에 대해서 식 $\psi_2(t)=\theta\psi_1(t)$이 성립한다. 따라서

$$\frac{S_i(t)}{S_i(t)-1}=\theta\frac{S_i(t)}{S_i(t)-1}\quad(i=1,\ 2) \tag{2-1}$$

이다.

한편 (2-1)에서 $d[-\psi_2(t)]=\theta\dfrac{-dS_1(t)}{[S_1(t)-1]^2}$이고, $\int_0^\infty -dS_1(t)=1$ 이므로 $\int_0^\infty[1-S_1(t)]^2d[-\psi_2(t)]=\theta$가 성립한다.

따라서 $\hat{\theta}=\int_0^\infty[1-\hat{S_1}(t)]^2d[-\hat{\psi_2}(t)]$에 의하여 θ를 추정할 수 있다. 여기서 $-\hat{\psi_2}(t)=\dfrac{\hat{S_2}(t)}{\hat{S_2}(t)-1}$이고, $\hat{S_i}(t)(i=1,\ 2)$ 는 $S_i(t)$에 대한 Kaplan-Meier 추정량이다.

따라서 우리는 $\hat{\theta}=\int_0^\infty[1-\hat{S_1}(t)]^2d(-\hat{\psi_2}(t))$, $\theta=\int_0^\infty[1-S_1(t)]^2d(-\psi_2(t))$ 에 대한 추정량으로 제안한다.

이제, 아래의 정리에 나열된 이 추정량이 갖는 중요한 특성을 증명하자.

정리 1 $n=n_1+n_2$라 하고, $n_i\rightarrow\infty\,(i=1,\ 2)$ 함에 따라 $\dfrac{n}{n_i}=\rho_i$라고 가정하자. 그러

면

(1) $\hat{\theta}$ 는 θ의 일치추정량이다.

(2) $\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)$ 의 근사분포는 평균이 0, 분산 σ^2이 아래와 같은 정규분포를 따른다.

$$\sigma^2 = 4\theta^2\rho_1\int_0^\infty \frac{S_1^2(t)}{[1-S_1(t)]^2}\, d\left[S_1^2(t)[1-S_1(t)]^2\int_0^t \frac{1}{1-H_1(y-)}\, d\Lambda_1(y)\right]$$

여기서,

$$+\theta^2\rho_2\int_0^\infty [1-S_1(t)]^4\, d\left[\frac{S_1^2(t)}{[1-S_1(t)]^2[1-S_2(t)]^2}\int_0^t \frac{1}{1-H_2(y-)}\, d\Lambda_2(y)\right]$$

(3)

$$\widehat{\sigma^2} = 4\hat{\theta}^2\rho_1\int_0^\infty \frac{\hat{S}_1{}^2(t)}{[1-\hat{S}_1(t)]^2}\, d\left[\hat{S}_1{}^2(t)[1-\hat{S}_1(t)]^2\int_0^t \frac{1}{\frac{Y_1(y-)}{n_1}}\, d\hat{\Lambda}_1(y)\right]$$

$$+\hat{\theta}^2\rho_2\int_0^\infty [1-\hat{S}_1(t)]^4\, d\left[\frac{\widehat{S_1^2}(t)}{[1-\hat{S}_1(t)]^2[1-\hat{S}_2(t)]^2}\int_0^t \frac{1}{\frac{Y_2(y-)}{n_2}}\, d\hat{\Lambda}_2(y)\right]$$

는

$$\sigma^2 = 4\theta^2\rho_1\int_0^\infty \frac{S_1^2(t)}{[1-S_1(t)]^2}\, d\left[S_1^2(t)[1-S_1(t)]^2\int_0^t \frac{1}{1-H_1(y-)}\, d\Lambda_1(y)\right]$$

$$+\theta^2\rho_2\int_0^\infty [1-S_1(t)]^4\, d\left[\frac{S_1^2(t)}{[1-S_1(t)]^2[1-S_2(t)]^2}\int_0^t \frac{1}{1-H_2(y-)}\, d\Lambda_2(y)\right]$$

의 일치 추정량이다. 여기서 $\Lambda_i(y) = \int_0^y \frac{1}{(1-H_i)}\, dH_i^1$ 이고, $\hat{\Lambda}_i(y) = \int_0^y \frac{dN_i}{Y_i}$ 이다.

증명: (1) $\hat{S}_i(t)$이 $S_i(t)$의 일치추정량이므로 $\hat{\theta} = \int_0^\infty [1-\hat{S}(t)]^2 d[-\widehat{\psi_2}(t)]$이 $\theta = \int_0^\infty [1-S(t)]^2 d(-\psi_2(t))$ 의 일치추정량이 됨은 자명하다[Serfling, 1980 pp.24 Theorem].

(2) $N_i = \sum_{j=1}^{n_i} I\{Z_{ij}\le t, \delta_{ij}=1\}$ $(i=1,\ 2)$를 군 i에서의 t 또는 그 이전의 사망자의

총수라 하고 $Y_i = \sum_{j=1}^{n_i} I\{Z_{ij} \ge t\}$를 군 i에서의 위험과정 상태의 총수라고 하자. 여기서 I는 지표함수를 나타낸다. 과정(process) $M_i^c = N_i - \int Y_i d\Lambda_i$는 잘 알려진 이차 적분가능 마팅게일이며 평균이 0이고, 분산 $\int_0^t [1-H_i(y-)][1-\triangle\Lambda_i(y)]d\Lambda_i(y) = H_i^1(t)$을 갖는 가우스과정 M_i에 수렴한다. 여기서 Λ_i는 군 i에서의 누적위험함수를 표시한다. 기호 $\xrightarrow{p}$ 와 $\xrightarrow{d}$ 는 확률수렴과 분포수렴을 각각 나타낸다.
이제 아래의 식을 살펴보면

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) &= \sqrt{n}\left[\int_0^\infty [1-\hat{S}_1(t)]^2 d[-\hat{\psi}_2(t)] - \int_0^\infty [1-S_1(t)]^2 d[-\psi_2(t)]\right] \\ &= \sqrt{n}\int_0^\infty \left([1-\hat{S}_1(t)]^2 - [1-S_1(t)]^2\right) d[-\psi_2(t)] \\ &\quad + \sqrt{n}\int_0^\infty [1-\hat{S}_1(t)]^2 d[\psi_2(t) - \hat{\psi}_2(t)]\end{aligned}$$

위 식에서 전반부를 Z_1, 후반부를 Z_2 라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned}Z_1 &= \sqrt{n}\int_0^\infty \left([1-\hat{S}_1(t)]^2 - [1-S_1(t)]^2\right) d[-\psi_2(t)] \\ &= \sqrt{n}\int_0^\infty [S_1(t)-\hat{S}_1(t)][2-S_1(t)-\hat{S}_1(t)]d[-\psi_2(t)] \\ &= \sqrt{\frac{n}{n_1}}\int_0^\infty \sqrt{n_1}\frac{S_1(t)-\hat{S}_1(t)}{S_1(t)} S_1(t)[2-S_1(t)-\hat{S}_1(t)]d[-\psi_2(t)] \\ &= \sqrt{\frac{n}{n_1}}\int_0^\infty \left[\int_0^t \frac{\hat{S}_1(y-)}{S_1(y)}\frac{1}{1-H_{n_1}(y-)} dM_1^c(y)\right] S_1(t)[2-\hat{S}_1(t)-S_1(t)]d[-\psi_2(t)]\end{aligned}$$

여기서, $1-H_{n_1}(y_-) = \dfrac{Y_1(y)}{n_1}$, $\hat{S}_1 \xrightarrow{p} S_1$이고, $1-H_{n_1}(y-) \xrightarrow{p} 1-H_1(y-)$이며 $M_1(y)$이 $M_1^c(y)$의 정규극한과정이기 때문에 Slutsky 정리와 Mann-Wald 정리에 의하여

$$Z_1 \overset{d}{\leftrightarrow} 2\sqrt{\rho_1}\int_0^{\infty} \left[\int_0^t \frac{1}{1-H_1(y-)} dM_1(y) S_1(t)[-S_1(t)] d[-\psi_2(t)]\right.$$

이다. 그리고 부분적분법을 사용하여 위식을 적분하면 다음과 같다.

$$Z_1 \overset{d}{\leftrightarrow} \ 2\sqrt{\rho_1}\int_0^{\infty} \ \psi_2(t) d\left[S_1(t)[1-S_1(t)]\int_0^t \frac{1}{1-H_1(y-)} dM_1(y)\right..$$

$M_1(y)$이 평균 0, 분산과정 $\int_0^y \ [1-H_1(u-)][1-\triangle\Lambda_1(u-)]d\Lambda_1(u) = H_1^1(y)$을 가지므로

$$2\sqrt{\rho_1}\int_0^{\infty} \ \psi_2(t) d\left[S_1(t)[1-S_1(t)]\int_0^t \frac{1}{1-H_1(y-)} dM_1(y)\right.$$

의 분산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= 4\rho_1\int_0^{\infty} \ \psi_2^2(t) d\left[S_1^2(t)[1-S_1(t)]^2\int_0^t \ \frac{1}{[1-H_1(y-)]^2} dH_1^1(y)\right] \\ &= 4\rho_1\int_0^{\infty} \ \psi_2^2(t) d\left[S_1^2(t)[1-S_1(t)]^2\int_0^t \ \frac{1}{1-H_1(y-)} d\Lambda_1(y)\right] \\ &= 4\theta^2\rho_1\int_0^{\infty} \ \frac{S_1^2(t)}{[1-S_1(t)]^2} d\left[S_1^2(t)[1-S_1(t)]^2\int_0^t \ \frac{1}{1-H_1(y-)} d\Lambda_1(y)\right].\end{aligned}$$

따라서, Z_1의 극한분포는 평균이 0이고 분산 σ^2인 다음과 같은 정규분포를 따른다.

$$\sigma_1^2 = 4\,\theta^2\rho_1\int_0^{\infty}\frac{S_1^2(t)}{[1-S_1(t)]^2}\, d\left[S_1^2(t)[1-S_1(t)]^2\int_0^t\frac{1}{1-H_1(y-)}\, d\Lambda_1(y)\right].$$

같은 방법으로 우리는 Z_2의 극한분포를 구할 수 있다.

$$Z_2 = \sqrt{n}\int_0^{\infty}[1-\hat{S_1}(t)]^2 d[\psi_2(t)-\hat{\psi_2}(t)]$$

에 대하여

$$\begin{aligned}\psi_2(t)-\widehat{\psi_2}(t) &= \frac{S_2(t)}{1-S_2(t)}-\frac{\widehat{S_2}(t)}{1-\widehat{S_2}(t)} \\ &= \frac{\psi_2(t)}{1-\widehat{S_2}(t)}\frac{S_2(t)-\widehat{S_2}(t)}{S_2(t)} \\ &= \frac{\psi_2(t)}{1-\widehat{S_2}(t)}\frac{1}{\sqrt{n_2}}\int_0^t \frac{\widehat{S_2}(y-)}{S_2(y)}\frac{1}{1-H_{n_2}(y-)}dM_2^c(y)\end{aligned}$$

이므로

$$Z_2=\sqrt{n}\int_0^\infty [1-\widehat{S_1}(t)]^2 d\left[\frac{\psi_2(t)}{1-\widehat{S_2}(t)}\frac{1}{\sqrt{n_2}}\int_0^t \frac{\widehat{S_2}(y-)}{S_2(y)}\frac{1}{1-H_{n_2}(y-)}dM_2^c(y)\right]$$

이다.

여기서, $1-H_{n_2}(y-)=\dfrac{Y_2(y)}{n_2}$ 이며 $\widehat{S_2}\overset{p}{\leftrightarrow} S_2$ 이고 $1-H_{n_2}(u-)\overset{p}{\leftrightarrow}1-H_2(u-)$ 이다.

$M_2(u)$ 이 $M_2^c(u)$ 의 극한과정이기 때문에 Slutsky 정리와 Mann-Wald 정리에 의하여

$$\begin{aligned}Z_2 &\overset{d}{\leftrightarrow}\sqrt{\rho_2}\int_0^\infty [1-S_1(t)]^2 d\left[\frac{\psi_2(t)}{1-S_2(t)}\int_0^t \frac{1}{1-H_2(y-)}dM_2(y)\right] \\ &= \theta\sqrt{\rho_2}\int_0^\infty [1-S_1(t)]^2 d\left[\frac{S_1(t)}{[1-S_1(t)][1-S_2(t)]}\int_0^t \frac{1}{1-H_2(y-)}dM_2(y)\right]\end{aligned}$$

이고, $M_2(y)$ 가 평균 0과 분산과정 $\int_0^y [1-H_2(u-)][1-\triangle\Lambda(u)]d\Lambda_2(u)=H_2^1(y)$ 을 갖는 정규과정이므로 Z_2 의 극한분포는 평균 0이고 분산 σ^2 인 다음과 같은 정규분포를 따른다.

$$\begin{aligned}\sigma_2^2 &= \theta^2\rho_2\int_0^\infty [1-S_1(t)]^4 d\left[\frac{S_1^2(t)}{[1-S_1(t)]^2[1-S_2(t)]^2}\int_0^t \frac{1}{[1-H_2(y-)]^2}dH_2^1(y)\right] \\ &= \theta^2\rho_2\int_0^\infty [1-S_1(t)]^4 d\left[\frac{S_1^2(t)}{[1-S_1(t)]^2[1-S_2(t)]^2}\int_0^t \frac{1}{1-H_2(y-)}d\Lambda_2(y)\right].\end{aligned}$$

$M_1(y)$ 와 $M_2(y)$ 이 서로 독립이라는 사실로부터 $\sqrt{n}(\hat\theta-\theta)=Z_1+Z_2$ 의 극한분포는 평균 0 이고 분산 σ^2 이 다음과 같은 정규분포를 따른다.

$$\sigma^2 = 4\theta^2\rho_1\int_0^\infty \frac{S_1^2(t)}{[1-S_1(t)]^2} d\left[S_1^2(t)[1-S_1(t)]^2\int_0^t \frac{1}{1-H_1(y-)}d\Lambda_1(y)\right]$$
$$+\theta^2\rho_2\int_0^\infty [1-S_1(t)]^4 d\left[\frac{S_1^2(t)}{[1-S_1(t)]^2[1-S_2(t)]^2}\int_0^t \frac{1}{1-H_2(y-)}d\Lambda_2(y)\right].$$

(3) $\hat{\theta}$는 θ의 일치추정량이고, $\frac{Y_i}{n_i}\xleftrightarrow{p} 1-H_i$이며 , $\hat{S}_i \xleftrightarrow{p} S_i$ $\hat{\Lambda}_i \xleftrightarrow{p} \Lambda_i$ 이기 때문에 $\widehat{\sigma}^2$이 σ^2의 일치추정량이 됨은 분명하다.

3. 모의실험결과

이 절에서 우리는 제안된 추정량의 근사적 결과에 대한 평가를 위한 모의실험 연구 결과를 95%신뢰구간에 대한 모수포함확률을 계산해 보았다. 모의실험은 로그-로지스틱 분포에서 이루어졌는데, 그 이유는 이모형이 와이블모형과 지수모형처럼 생존함수와 위험함수에 대한 용이한 대수적 표현을 갖는 장점 때문이다. 로그-로지스틱분포에서 생존함수와 분포함수 그리고 오즈함수는 다음과 같다.

$$S(t) = \left[1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]^{-1},\ \alpha>0,\ \beta>,\ t>0$$
$$F(t) = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\left[1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]^{-1},$$
$$\phi(t) = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{-\beta},$$
$$\lambda(t) = \frac{\beta+t^{\beta-1}}{\alpha^\beta+t^\beta}.$$

여기서, α는 위치모수(location parameter)이고, β는 척도모수(scale parameter)이다. 두 표본과 관련된 모의실험을 위하여 β는 동일한 것으로 간주할 것이다. s번째 표본에 대한 위험함수는 $\lambda_s(t) = \frac{\beta+t^{\beta-1}}{\alpha_s^\beta+t^\beta}$이고 두 표본 s와 r에 대한 위험비는

$$\frac{\lambda_s(t)}{\quad}\lambda_r(t) = \frac{\beta+t^{\beta-1}}{\alpha_s^\beta+t^\beta}\frac{\alpha_r^\beta+t^\beta}{\beta+t^{\beta-1}} = \frac{\alpha_r^\beta+t^\beta}{\alpha_s^\beta+t^\beta}$$

이다. 따라서 $\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_s(t)}{\lambda_r(t)} = 1$ 이다.

다시 말하면 시간이 커짐에 따라 1로 수렴한다. 그러므로 비례오즈모형을 따른다는

가설 하에서 로그-로지스틱분포에서 모의실험을 실행할 수 있다. 먼저 두 모집단의 분포를 각각 로그-로지스틱분포에서 모수 θ가 0.75, 1, 1.25에 대해, 첫 번째 집단의 자료 n_1과 두 번째 집단의 자료 n_2로 하여 (n_1, n_2)를 $(20, 30)$와 $(30, 60)$인 경우에 각각 5000번씩 발생시켜 몬테카롤로 방법을 사용하여 θ를 추정하였다. 중도절단률은 10%, 20%, 30%를 적용하였다. θ의 추정치에 대한 평균과 MSE 그리고 θ에 대한 95%신뢰구간을 구하여 모수 θ에 대한 포함확률 값을 <표 4-1>, <표 4-2>에 나타내었다. <표 4-1>과 <표 4-2>를 보면 대체로 포함확률이 만족스러운 결과로 나타난다. 이것은 추정치의 효율성이 좋다는 것을 의미한다. 앞으로 비례오즈모형 하에서 최대관측치가 중도절단된 경우에 대한 상대오즈비 추정과 관련된 연구도 대단히 유용할 것으로 생각한다.

<표 4-1> (n_1, n_2)=(20, 30)인 경우

중도절단율	θ	0.75	1	1.25
10%	추정치의평균	1.0655205	1.1536622	1.4865266
	MSE	0.21169021	0.141826	0.2333778
	포함확률(95%)	96	95	96
20%	추정치의평균	1.1673771	1.2578219	1.6979808
	MSE	0.3110177	0.2075839	0.2798069
	포함확률(95%)	96.2	96.7	95.2
30%	추정치의평균	0.9532917	1.1410169	1.36753
	MSE	0.1931650	0.1128579	0.1672631
	포함확률(95%)	95.8	95	94

<표 4-2> (n_1, n_2)=(30, 60)인 경우

중도절단율	θ	0.75	1	1.25
5%	추정치의평균	1.3867533	1.4673233	1.5530922
	MSE	0.5231752	0.331397	0.208488
	포함확률(95%)	96	96	96
10%	추정치의평균	1.2731019	1.3479654	1.4349093
	MSE	0.3731264	0.22202269	0.1361774
	포함확률(95%)	95	96	95
15%	추정치의평균	1.1376054	1.2244333	1.293947
	MSE	0.2387763	0.1412418	0.0945235
	포함확률(95%)	96	95	94.1

참고문헌

1. Bennett, S. (1983a). Log-Logistic Regression Models for Survival data, *Applied. statist*. 32, No. 2, 165-171.
2. Bennett, S. (1983b). Analysis of Survival Data by the Proportional Odds Model, *Statistics in Medicine*, 2. 273-277.
3. Daborowska, D. M., and Doksum, K. A. (1988). Estimation and Testing in a Two-sample Generalized odds-Rate Model, *Journal of the American Statistical Association*, 83, No. 403, 744-749.
4. Shorack, G. R., and Weller, J. A. (1986). *Empirical Processes with Applications to Statistics*, John Willey & Sons, Inc. 1-150, 258-333.
5. Huang, J., and Rossini, A. J. (1997). Sieve Estimation for the Proportional Odds Failure Time Regression Model with The Interval Censoring, *Journal of the American Statistical Association*, 92. 960-967.
6. Andersen, P. K., Borgan, ∅., Keiding, N., and Gill, R. D. (1992). *Statistical Models Based on Counting Processes*, Springer Series in Statistics.
7. Murphy, S. A., Rossini, A. J., and Vaart A. W. V. D. (1997). Maximum Likelihood Estimation in the Proportional Odds Model, *Journal of the American Statistical Association*, 92, 968-976.
8. Kirmani, S. N. U. A. and Gupta, R. C. (2001). On the Proportional Odds Model in Survival Analysis, *Ann. Inst. Statist. Math.* 53, 2, 203-216.
9. Yong, S., and Prentice, R. L. (1999). Semiparametric Inference in the Proportional Odds Regression Model, *Journal of the American Statistical Association*, 94, 125-136.

[2005년 9월 접수, 2005년 11월 채택]