

IGARCH and Stochastic Volatility : Case Study¹⁾

S. Y. Hwang²⁾ · J. A. Park³⁾

abstract

IGARCH and Stochastic Volatility Model(SVM, for short) have frequently provided useful approximations to the real aspects of financial time series. This article is concerned with modeling various Korean financial time series using both IGARCH and stochastic volatility models. Daily data sets with sample period ranging from 2000 and 2004 including KOSPI, KOSDAQ and won-dollar exchange rate are comparatively analyzed using IGARCH and SVM.

Keywords : IGARCH, Korean financial time series, Stochastic volatility

1. 서 론

시계열 자료의 변동성 예측은 크게 두 가지 방법으로 나눌 수 있다(cf. 박형우(2003); 오세경, 김진호, 이건호(2003)). 첫 번째는 자산수익률의 시계열 자료에 기초하여 자산변동성의 동적행동을 규정짓는 방법으로, Engle(1982)에 의해 제안된 ARCH모형과 이것을 발전시킨 GARCH류 모형(cf. Bollerslev(1986))이 대표적이다. 재무론 분야에서 GARCH모형을 실제 데이터에 적용할 때, 비정상 패턴에 가까운 경우가 자주 나타난다. 이러한 경우에는 과거의 정보가 현재의 분산에 매우 중요한 역할을 한다. 또한, 이 GARCH과정이 정상성을 갖지 못할 가능성이 있으므로 미래의 분산의 예측값이 지나치게 커질 수 있다. 이러한 현상을 고려한 모형이 IGARCH(Integrated GARCH)모형이다. Hwang and Park(2005)은 국내의 대표적인 금융시계열 다섯 개(종합주가지수, KOSPI200, KOSDAQ, KOSDAQ50, 대미 환율)를 분석한 결과 IGARCH 모형에 가깝다는 결론을 얻은 바 있다. 두 번째로는 내재변동성의 시계열 자료에 기초하여 변동성을 예측하는 것으로 확률변동성(Stochastic Volatility Model ; SVM)모형을 들 수 있다. 본 논문에서는 IGARCH 모형과 확률변동성 모형에 대해 알아본 후,

1) This work was supported by a grant(2004) from Sookmyung Women's Univ.

2) First Author : Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's Univ., Seoul, 140-742, Korea.
E-mail : shwang@sookmyung.ac.kr

3) Graduate student, Department of Statistics, Sookmyung Women's Univ., Seoul, Korea.

조건부 이분산성이 존재하는 국내의 대표적인 금융 시계열 자료에 이 두 모형을 적합 시키고자 한다. 각각의 방법으로 추정된 모형식을 이용하여 95% 신뢰수준의 예측구간을 구한 뒤 실제 데이터가 이 예측구간에 들어가는 비율을 이용하여 모형에 대한 적합력을 비교 분석하였다.

2. IGARCH 및 SVM 소개

시계열 $\{\epsilon_t\}$ 가 다음과 같을 때 GARCH(1,1)모형을 따른다고 정의한다 (Bollerslev(1986)).

$$\epsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, h_t), \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 h_{t-1} \quad (2.1)$$

여기서 Ψ_{t-1} 는 $t-1$ 시점까지의 정보를 의미한다. 자산가격의 변동성은 일단 상승(저하)하게 되면, 그 후 잠시 동안 변동성이 높은(낮은) 상태를 지속하게 된다. GARCH(1,1)모형에서 변동성의 충격의 지속성은 $\alpha_1 + \gamma_1$ 에 의하여 구할 수 있다.

변동성 h_t 는 ϵ_t^2 의 예측값, 즉 조건부 기대값이다. 만일 $|\alpha_1 + \gamma_1|$ 가 1에 가까울수록 현재의 변동성이 장래에도 지속될 가능성이 높은 것이다. 금융 시계열에 있어서는 조건부 분산에 대한 충격의 효과가 사라지는데 소요되는 시간이 매우 긴 경향이 있다(cf. 최병선(1997)).

IGARCH 모형

재무론에서 GARCH(1,1)모형을 실제 데이터에 적용할 때, $\alpha_1 + \gamma_1$ 이 1에 가까운 경우가 자주 나타난다. 이러한 경우에는 과거의 정보가 현재의 분산에 아주 중요한 역할을 한다. 또한, 이 GARCH과정이 정상성을 갖지 못할 가능성이 있으므로 미래의 분산의 예측값이 지나치게 커질 수 있다. 이러한 현상을 고려한 모형이 IGARCH모형이다. 식(2.1)에서 $\alpha_1 + \gamma_1$ 이 1인 경우 이 모형을 IGARCH(1,1) 모형이라 한다.

SVM 모형

GARCH류 모형은 각 모수가 음수가 되면 안 되는 조건과 모수의 개수가 조금만 늘어나도 계산과정이 복잡해지는 단점이 있다. SVM 모형은 이런 GARCH류 모형에서 추정의 어려움에 대한 대안으로, Hull과 White(1987)에 의하여 제안되었다. SVM 모형에서는 기초자산이 확률과정을 따를 뿐만 아니라 그 변동성도 또한 확률과정을 따른다. 따라서 ARCH류 모형들이 과거 관측치 조건부 모형이라면, SVM모형은 비관측치 조건부 모형이라 할 수 있다(cf. 김명직, 장국현(1998)).

SVM모형의 일반적인 형태는 다음과 같이 표현된다(Kim, Sheppard and Chib(1998))

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= \sigma_t \exp(h_t/2) z_t, \quad h_t = \mu + \phi(h_{t-1} - \mu) + \sigma_\eta \eta_t, \\ h_1 &\sim N(\mu, \sigma_\eta^2 / (1 - \phi^2)). \end{aligned}$$

여기서 ε_t 는 시점 t 에서 평균을 수정한 수익률(mean corrected return)을 나타내고, 시점 t 에서의 로그 변동성인 h_t 는 정상 과정을 따른다고 가정하고, ε_t 와 η_t 는 서로 독립이다. 모수 σ_r 에서, $\exp(\mu/2)$ 는 상수척도화인자이며, 어느 특정한 변동성을 나타낸다고 할 수 있다. 또한, ϕ 는 변동성에서 지속성을 의미하고 σ_η 는 로그변동성의 표준편차이다. 본 논문에서는 다음과 같은 SVM 모형을 사용한다.

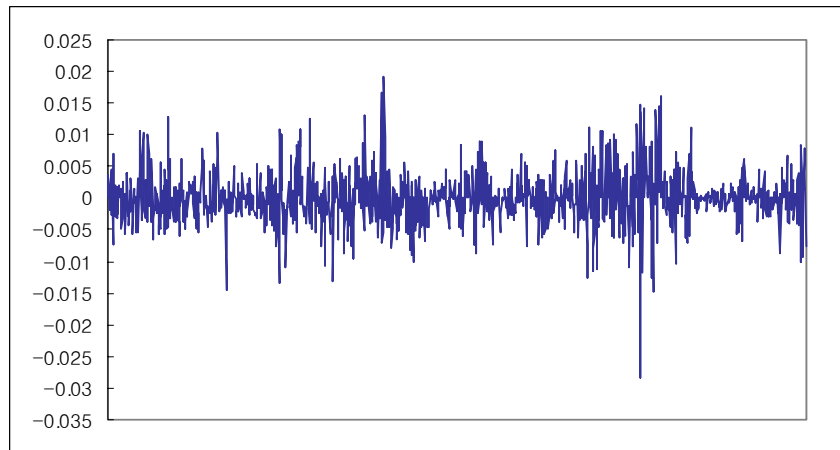
$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sqrt{h_t} z_t, & z_t &\sim i.i.d. N(0, 1) \\ \ln h_t &= \omega + \phi \ln h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t, & \eta_t &\sim i.i.d. N(0, 1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

3. 우리나라 금융시계열 사례분석

본 절에서는 우리나라의 대표적인 금융시계열 자료 세 가지(대미 환율, 종합주가지수, KOSDAQ)자료에 대해서 조건부 이분산 모형인 GARCH(1,1)모형과 IGARCH 모형, 그리고 SVM 모형을 적합 시켜 보았다. 각 자료의 수익률로 모형에 적합 시키기 위하여 자료를 로그 차분한(이를 ν_t 로 표현하기로 하자)후 분석에 이용하였다. 모형 적합 결과는 다음과 같다. 여기서 GARCH 및 IGARCH 모형적합은 SAS/ETS를 이용하였으며 SVM의 모수 추정은 EMM(efficient method of moment ; Gallant and Tauchen(1996) 참고) 방법으로 EMMPack 1.07 package를 이용하여 추정하였다.

사례분석 1 - 대미 환율 (2000. 1. 1 - 2004. 7. 31)

2000년 1월부터 2004년 7월까지의 대미 환율 데이터를 써서 GARCH모형, IGARCH 모형 그리고 확률변동성 모형을 추정하였다. GARCH(1,1)모형에 대한 추정결과를 살펴보면 아래와 같다.



<그림 1> 대미환율 수익률 (2000. 1. 1 - 2004. 7. 31)

$$\begin{aligned} \text{GARCH :} \quad & \nu_t = 0.0943 \nu_{t-1} + \varepsilon_t \\ & h_t = 0.00000034934 + 0.1279 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.8589 h_{t-1} \end{aligned}$$

GARCH모형에서 모수 $\alpha_1 + \gamma_1$ 의 값이 1에 가깝기 때문에 IGARCH(1,1)모형에 적합시켜서 다음의 결과를 얻었다.

$$\begin{aligned} \text{IGARCH :} \quad & \nu_t = 0.0939 \nu_{t-1} + \varepsilon_t \\ & h_t = 0.00000026388 + 0.1375 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.8625 h_{t-1} \end{aligned}$$

또한 SVM 모형의 추정결과는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \text{SVM :} \quad & \varepsilon_t = \sqrt{h_t} z_t \\ & \ln h_t = -0.88615 + 0.92094 \ln h_{t-1} + 0.25416 \eta_t \end{aligned}$$

세 모형들의 적합력을 비교하기 위하여 각 모형에서 $\widehat{\varepsilon}_t$ 값의 95% 1시차후 예측구간을 h_t 를 이용하여 각각 구한 후 ε_t 의 값이 예측구간 내에 존재하는 비율을 계산하였다. 확률변동성 모형의 경우 교란항 η_t 이 존재하기 때문에, GARCH류 모형과는 달리 SVM모형은 $(t-1)$ 기의 모든 정보가 주어졌다 해도 t 기의 변동성의 값을 알지 못한다. 그러므로 ε_t 이 95% 예측구간 내에 존재하는 비율과 예측구간의 길이(length)를 구하기 위해, 대미환율 수익률 데이터를 AR(1)에 적합시켜 추정된 ACF와 위에서 추정된 SV모형을 이용하여, 주가를 변동시키는 정보량이 날마다 확률적으로 변동한다고 하는 가정 하에 시뮬레이션을 200번 시행하여 그 값들의 평균값을 이용하였다. <표 1>은 포함확률(coverage probability; CP) 입장에서 모형의 예측력을 비교해 본 결과이다.

<표 1> ε_t 가 95% 예측구간 내에 존재하는 비율

모형	GARCH	IGARCH	SVM
포함확률(CP)	94.18%	94.50%	95.42%

대미 환율 데이터의 경우, IGARCH(1.1), GARCH(1,1)모형보다는 SV모형이 좋은 적합력을 가진다는 것을 보여준다. 따라서 CP 기준으로 보면 대미 환율 자료의 예측 모형으로 SVM모형이 적당하다.

<표 2> 95% 예측구간의 평균길이(length)

모형	GARCH	IGARCH	SVM
길이	0.015303	0.015611	0.01552

<표 2>는 세가지 모형의 예측력을 예측구간의 평균길이를 기준으로 비교해 본 결과이다. Length를 기준으로 모형을 비교했을 때, <표 1>과는 다른 결과를 보여준다. SVM모형과, IGARCH(1,1)모형보다는 GARCH(1,1)모형이 좋은 적합력을 가진다.

사례분석 2 : 종합주가지수 (2000. 1. 1 - 2004. 7. 31)

분석결과를 요약하면 다음과 같다.

GARCH : $\nu_t = 0.024 \nu_{t-1} + \varepsilon_t, h_t = 0.000009 + 0.081\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9035h_{t-1}$

IGARCH :

$$\nu_t = 0.0232 \nu_{t-1} + \varepsilon_t, h_t = 0.0000041565 + 0.0826\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9174h_{t-1}$$

SVM :

$$\ln h_t = -1.5375 + 0.80005 \ln h_{t-1} + 0.000027924 \eta_t$$

<표 3>은 모형의 예측력을 ε_t 이 예측구간 내에 존재하는 비율(CP)을 기준으로 비교해 본 결과이다.

<표 3> ε_t 가 95% 예측구간 내에 존재하는 비율

모형	GARCH	IGARCH	SVM
포함확률(CP)	97.41%	95%	95.43%

종합주가지수 데이터의 경우, IGARCH(1,1), SVM모형보다는 GARCH(1,1)이 좋은 CP-적합력을 가진다는 것을 보여준다.

<표 4> 95% 예측구간의 평균길이(length)

모형	GARCH	IGARCH	SVM
길이	0.084583	0.086619	0.08558

모형의 예측력을 예측구간의 평균길이를 기준으로 비교해 본 결과도 CP-기준으로 비교한 결과와 마찬가지로 종합주가지수 자료의 예측모형으로는 GARCH(1,1)모형이 적합함을 알 수 있다.

사례분석3 - KOSDAQ지수 (2000.1.1 - 2004. 8. 31)

분석결과를 요약하면 다음과 같다.

GARCH :

$$\nu_t = 0.0932 \nu_{t-1} + \varepsilon_t, h_t = 0.0000142 + 0.1399\varepsilon_{t-1}^2 + 0.8469h_{t-1}$$

IGARCH :

$$\nu_t = 0.0921 \nu_{t-1} + \varepsilon_t, h_t = 0.0000115 + 0.1522\varepsilon_{t-1}^2 + 0.8478h_{t-1}$$

$$\text{SVM : } \ln h_t = -0.019758 + 0.99732 \ln h_{t-1} + 0.071516 \eta_t$$

사례분석 1, 2에서와 마찬가지로 이유로 KOSDAQ지수 수익률 데이터를 AR(1)에 적합시켜 추정된 ACF와 위에서 추정된 SV모형을 이용하여, KOSDAQ지수를 변동시키는 정보량이 날마다 확률적으로 변동한다고 하는 가정 하에 시뮬레이션을 200번 시행하여 그 값들의 평균값을 이용하였다.

<표 5> ε_t 가 예측구간 내에 존재하는 비율

모형	GARCH	IGARCH	SVM
포함확률(CP)	93.31%	93.67%	95.11%

KOSDAQ지수 데이터의 경우, CP 기준으로 볼때 IGARCH(1,1), GARCH(1,1)모형보다는 SVM모형이 좋은 적합력을 가진다는 것을 보여준다.

<표 6> 예측구간의 평균길이(length)

모형	GARCH	IGARCH	SVM
길이	0.099347	0.101658	0.112966

Length를 기준으로 네 모형을 비교했을 때, SV모형이나 IGARCH(1,1)모형보다는 GARCH(1.1)모형이 좋은 적합력을 가진다.

감사의 글

본 논문을 심사해 주신 두분의 심사위원께 감사를 드립니다. 본 연구는 2004년도 숙명여대 교비 연구비 지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

1. 박형우(2003). VaR 모형의 비교: GARCH 모형과 확률변동성모형 중심으로. 한국과학기술원 테크노 경영대학원.
2. 김명규(2002). 종합주가지수를 이용한 VaR 측정: GARCH 모형을 중심으로. 연세대학교 경영학과 학위논문.
3. 김명직, 장국현(1998). 금융시계열분석. 경문사.
4. 오세경, 김진호, 이건호(2003). 위험관리론. 경문사.

5. 최병선 (1997). 회귀분석(下). 세경사
6. Bollerslev, T.(1986). Generalized autoregressive conditional heterocedasticity, *Journal of Econometrics*, Vol 31, 307-327.
7. Gallant, A. and Tauchen, G.(1996). Which moments to match?, *Econometric Theory*, 12, 657-681.
8. Hull, J. and White, A.(1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *Journal of Finance*, 42, 281-300.
9. Hwang, S.Y. and Park, J.(2005). VaR(Value at Risk) for Korean financial time series, *Journal of Korean Data and Information Science Society*, 16, 283-288.
10. Kim, S., Shephard N. and Chib S.(1998). Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models, *Review of Economic Studies*, 65, 361-393.

[2005년 9월 접수, 2005년 11월 채택]