Journal of Korean
Data & Information Science Society
2005, Vol. 16, No. 4, pp. 791~799

System Reliability Estimation in Bivariate Pareto Model Affected by Common Stress : Bivariate Random Censored Data Case[1)]

Jang Sik Cho[2)]

Abstract

We consider two components parallel system in which the lifetimes have the bivariate Pareto model with bivariate random censored data. We assume that bivariate Pareto model is affected by common stress which is independent of the lifetimes of the components. We obtain estimators for the system reliability based on likelihood function and relative frequency. Also we construct approximated confidence intervals for the reliability based on maximum likelihood estimator and relative frequency estimator, respectively. Finally we present a numerical study.

Keywords : Bivariate Pareto distribution, Bivariate random censored data, Common stress, Maximum likelihood estimator, Relative frequency estimator, System reliability

1. 서론

두 개의 부품으로 구성된 시스템의 수명시간에 대한 실험에서 부품들의 수명시간을 수학적 계산의 편의성 등 여러가지 이유 때문에 독립으로 가정하는 경우가 많다. 그러나 이러한 독립성의 가정은 각 부품의 수명시간들이 서로 영향을 미치는 여러 분야에서 현실성이 떨어지는 경우가 많이 발생한다.

이와 같이 각 부품의 수명시간들이 서로 영향을 미치는 시스템의 수명시간에 대한 모형으로서 이변량 지수모형들이 Freund(1961), Marshall과 Olkin(1967), Block과 Basu (1974) 등에 의해서 제안되었다.

한편, Lindley와 Singpurwalla(1986)는 실험환경이 변하는 일반적인 상황까지 고려

---

1) This Research was supported by Kyungsung University Research Grants in 2004.

2) Associate Professor, Department of Informational Statistics, Kyungsung University, Busan, 608-736, Korea
E-mail : jscho@ks.ac.kr

한 모형으로서 이변량 파레토(BVP) 모형을 제안하였다. 이변량 파레토 모형과 관련된 연구로는 Bandyapadhyay와 Basu(1990), 그리고 Veenus와 Nair(1994)는 몇 가지 형태의 BVP 모형을 제안하였고, Jeevanand (1997)는 스트레스-스트렝스의 신뢰도에 대한 베이즈 추정량을 제안하였다. 그리고 Hanagal(1996)은 다변량 파레토 모형을 소개하였으며, Cho, Cho, Lee(2003)와 Cho, Cho, Cha(2003)은 완전자료 및 일변량 중단자료를 갖는 경우 신뢰도에 대한 최우추정량을 구하였다.

한편, 현실적으로 부품들의 수명이 실험자의 의도 또는 실험환경의 제약에 의해서 두 부품의 수명시간들이 서로 다른 임의중단 분포를 갖는 경우가 많으며, 이 경우 수명시간들은 이변량 임의 중단된 자료(bivariate random censored data)로 관찰된다. 이변량 임의중단모형은 두 부품의 임의중단 분포가 동일한 경우는 일변량 임의중단 모형이 되므로 일변량 임의중단모형의 확장된 개념으로 더 일반적인 중단 모형이다.

본 논문에서는 수명시간들이 이변량 파레토 모형을 따르는 두 개의 부품으로 구성된 병렬시스템에서, 수명시간들이 이변량 임의 중단된 자료로 관찰되는 경우를 가정한다. 또한 두 부품의 수명시간과는 독립적으로 두 부품의 수명시간에 영향을 주는 공통의 스트레스가 존재하여 수명시간에 영향을 준다고 가정한다. 이러한 가정 하에서 우도함수 및 상대도수에 기초한 시스템 신뢰도에 대한 추정량들을 각각 제안하고, 그 추정량들의 근사적 성질을 밝힌다. 또한 시스템 신뢰도에 대한 근사적 신뢰구간들을 각각 구성하고, 몬테칼로 모의실험을 통하여 제안된 추정량들과 근사적 신뢰구간들을 각각 비교한다.

2. 개요

확률변수 (X, Y)를 두 개의 부품으로 구성된 시스템에서 각 부품의 수명시간이라 하자. 그리고 수명시간에 대한 분포로서 모수 $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \zeta)$를 갖는 이변량 파레토 분포를 가정하면 결합확률밀도함수는 식 (1)과 같이 주어진다.

$$
\begin{aligned}
&f(x, y : \phi_1, \phi_2, \phi_3, \zeta) \\
&\quad = \begin{cases} \phi_1(\phi_2+\phi_3)\zeta^{\phi} x^{-\phi_1-1} y^{-(\phi_2+\phi_3)-1}, & \zeta < x < y < \infty, \\ \phi_2(\phi_1+\phi_3)\zeta^{\phi} x^{-(\phi_1+\phi_3)-1} y^{-(\phi_2+\phi_3)-1}, & \zeta < y < x < \infty, \\ \phi_3\zeta^{\phi} x^{-\phi-1}, \zeta < x = y < \infty. & \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}
$$

여기서 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \zeta > 0$이고 $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$이다.

그리고 결합 생존함수는 식 (2)와 같이 주어진다.

$$
\begin{aligned}
\overline{F}(x, y) &= P(X > x \ , \quad Y > y) \\
&= \left(\frac{x}{\zeta}\right)^{-\phi_1} \cdot \left(\frac{y}{\zeta}\right)^{-\phi_2} \cdot max\left(\frac{x}{\zeta}, \frac{y}{\zeta}\right)^{-\phi_3}, \quad \zeta \le min(x, y) < \infty.
\end{aligned} \tag{2}
$$

위 식 (1)의 모형에서 $\zeta = 1$을 가정한다면 (X, Y)에 대한 결합 생존함수는 식 (3)

과 같이 주어진다.

$$\overline{F}(x,y) = x^{-\phi_1} \cdot y^{-\phi_2} \cdot (max(x,y))^{-\phi_3}. \tag{3}$$

여기서 식 (2)를 제 1종 이변량 파레토 모형이라 부르고, 식 (3)을 제 2종 이변량 파레토 모형이라 부른다. 본 논문에서는 제 2종 이변량 파레토 모형에 대해서 연구의 초점을 맞추고자 한다.

또한 본 논문에서는 확률변수 Z를 두 부품의 수명시간 (X, Y)의 분포와는 독립적이며 두 부품의 수명시간에 영향을 미치는 공통 스트레스로 모수가 $(\mu, 1)$인 파레토 분포를 가정한다.

그러면 공통의 스트레스에 의해 영향을 받는 시스템의 신뢰도는 다음 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} R &= P[Z < max(X,Y)] \\ &= \mu\left[\frac{1}{\phi_1+\phi_3+\mu} + \frac{1}{\phi_2+\phi_3+\mu} - \frac{1}{\phi+\mu}\right],\ \ \phi = \phi_1+\phi_2+\phi_3. \end{aligned} \tag{4}$$

편의상 본 논문에서 사용되는 기호들을 소개하면 $j=1,2;\ k=1,2,3;\ i=1,2,\cdots,n$에 대하여 다음과 같다.

(1) (t_{x_i}, t_{y_i}) : i번째 시스템의 이변량 임의 중단시간.

(2) $C_{1i} = I(X_i > t_{x_i})$, $C_{2i} = I(Y_i > t_{y_i})$, $C^*_{ji} = 1 - C_{ji}$.

(3) $R_{1i} = I(X_i < Y_i)$, $R_{2i} = I(X_i > Y_i)$, $R_{3i} = I(X_i = Y_i)$, $R^*_{ki} = 1 - R_{ki}$.

(4) $\Theta = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \theta_1, \theta_2)$.

그러면 이변량 임의중단된 자료가 관찰되는 경우, i번째 시스템에서 각각의 부품들에 대해서 다음과 같은 세 가지 경우가 발생할 수 있다.

(1) 두 개의 부품들이 모두 관찰되는 경우($C^*_{1i}C^*_{2i} = 1$).

(2) 하나의 부품만 관찰되고 다른 하나의 부품은 중단되는 경우($C_{1i}C^*_{2i} + C^*_{1i}C_{2i} = 1$).

(3) 두 개의 부품들이 모두 중단되는 경우($C_{1i}C_{2i} = 1$).

따라서 i번째 시스템의 수명시간 (x_i, y_i)은 다음 식 (5)와 같이 관찰된다.

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (x_i, y_i), & x_i < t_{x_i}\ ,\ y_i < t_{y_i} \\ (t_{x_i}, y_i), & x_i > t_{x_i}\ ,\ y_i < t_{y_i} \\ (x_i, t_{y_i}), & x_i < t_{x_i}\ ,\ y_i > t_{y_i} \\ (t_{x_i}, t_{y_i}), & x_i > t_{x_i}\ ,\ y_i > t_{y_i}. \end{cases} \tag{5}$$

여기서 이변량 임의중단시간 (t_{x_i}, t_{y_i}), $(i = 1, 2, \cdots, n)$는 모수가 각각 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \rho)$를 갖는 이변량 파레토 분포를 따른다고 가정한다. 또한 결합확률밀도함수 및 생존함수

는 각각 $g(t_{x_i}, t_{y_i}: \theta_{1,} \theta_2, \theta_3, \rho)$와 $\overline{G}(t_{x_i}, t_{y_i}: \theta_1, \theta_2, \theta_3, \rho)$이라고 두자. 본 논문에서는 $\theta_3 = 0$라 가정한다. 즉, $g(t_{x_i}, t_{y_i}: \theta_{1,} \theta_2, \theta_3, \rho) = g_1(t_{x_i}: \theta_1, \rho) \cdot g_2(t_{y_i}: \theta_2, \rho)$와 $\overline{G}(t_{x_i}, t_{y_i}: \theta_1, \theta_2, \theta_3, \rho) = \overline{G_1}(t_{x_i}: \theta_1, \rho) \cdot \overline{G_2}(t_{y_i}: \theta_2, \rho)$인 경우를 가정한다. 만약 $t_{x_i} = t_{y_i}$인 경우는 일변량 임의 중단모형이 되고, 중단시간 t_{x_i}와 t_{y_i}이 미리 정해진 상수값이면 이변량 제1종 중단모형이 된다.

그러면 우도함수는 아래 식 (6)과 같이 계산될 수 있다.

$$
\begin{aligned}
L(\Theta) = & \prod_{i=1}^{n} \{ [f(x_i, y_i) \cdot \overline{G_1}(x_i; \rho, \theta_1) \cdot \overline{G_2}(y_i; \rho, \theta_2)]^{C_{1i}^{*} C_{2i}^{*}} \\
& \cdot [\overline{F}(x_i, y_i) \cdot g_1(x_i; \rho, \theta_1) \cdot g_2(y_i; \rho, \theta_{2i})]^{C_{1i} C_{2i}} \\
& \cdot [\overline{F}_{X \mid Y=y}(x_i) f_Y(y_i) \cdot g_1(x_i; \rho, \theta_1) \cdot \overline{G_2}(y_i; \rho, \theta_2)]^{C_{1i} C_{2i}^{*}} \\
& \cdot [\overline{F}_{Y \mid X=x}(y_i) f_X(x_i) \cdot \overline{G_1}(x_i; \rho, \theta_1) \cdot g_2(y_i; \rho, \theta_2)]^{C_{1i}^{*} C_{2i}} \}^{(R_{1i} + R_{2i} + R_{3i})} \\
= & \psi_1^{D_1} \psi_2^{D_2} \psi_3^{D_3} (\psi_1 + \psi_3)^{D_4} (\psi_2 + \psi_3)^{D_5} \cdot \theta_1^{D_6} \cdot \theta_2^{D_7} \\
& \cdot \exp[-(\psi_1 + \psi_1) x_s - (\psi_2 + \psi_2) y_s - \psi_3 (x_s + y_s - t_s)],
\end{aligned} \tag{6}
$$

여기서 $f_X(x) = (\psi_1 + \psi_3) \cdot \exp(-(\psi_1 + \psi_3)x)$, $f_Y(y) = (\psi_2 + \psi_3) \cdot \exp(-(\psi_2 + \psi_3)y)$,

$$D_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_{1i} C_{1i}^{*} C_{2i}^{*} + R_{2i}^{*} C_{1i}^{*} C_{2i}), \quad D_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_{2i} C_{1i}^{*} C_{2i}^{*} + R_{1i}^{*} C_{1i} C_{2i}^{*}),$$

$$D_3 = \sum_{i=1}^{n} R_{3i} C_{1i}^{*} C_{2i}^{*}, \quad D_4 = \sum_{i=1}^{n} R_{2i} C_{1i}^{*}, \quad D_5 = \sum_{i=1}^{n} R_{1i} C_{2i}^{*}, \quad D_6 = \sum_{i=1}^{n} C_{1i}, \quad D_7 = \sum_{i=1}^{n} C_{2i}$$

$$x_s = \sum_{i=1}^{n} \log(x_i), \quad y_s = \sum_{i=1}^{n} \log(y_i), \quad t_s = \sum_{i=1}^{n} \log(min(x_i, y_i))$$

이다.

그리고 $D_1, D_2, \cdots, D_5$는 확률변수이며, 이들의 기대값은 복잡한 계산과정을 거친 후에 다음과 같이 주어진다.

$$
\begin{aligned}
E(D_1) = n \cdot & \left\{ \frac{\psi_1}{\psi} - \frac{\psi_1 \theta_1}{\psi(\psi + \theta_1)} + \frac{\theta_2}{\psi + \theta_2} - \frac{\theta_2}{\psi_2 + \psi_3 + \theta_2} \right\} \\
& + n_1 \cdot \frac{\theta_1 \theta_2}{\psi_2 + \psi_3 + \theta_2} \cdot \left\{ \frac{1}{\psi_2 + \psi_3 + \theta_1 + \theta_2} - \frac{1}{\psi + \theta_1 + \theta_2} \right\} \\
& + n_2 \cdot \frac{\psi_3}{\psi} \cdot \left\{ \frac{\theta_2}{\psi + \theta_1 + \theta_2} - \frac{\theta_1 \theta_2}{(\psi + \theta_1)(\psi + \theta_1 + \theta_2)} \right\},
\end{aligned}
$$

여기서 $n_1=\sum_{i=1}^{n} R_{1i},\ \ n_2=\sum_{i=1}^{n} R_{2i}$ 이다.

$$E(D_2)=n\cdot\left\{\frac{\psi_2}{\psi}-\frac{\psi_2}{\psi}\frac{\theta_2}{\psi+\theta_2}+\frac{\theta_1\theta_2}{(\psi_1+\psi_3+\theta_1)(\psi_2+\theta_2)}-\frac{\theta_1}{\psi_1+\psi_3+\theta_1}\right\}$$
$$+n_2\cdot\left\{\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2+\psi_1+\psi_3}-\frac{\theta_1\theta_2}{(\theta_1+\theta_2+\psi)(\theta_1+\psi_1+\psi_3)}\right\}$$
$$+n_1\cdot\frac{\psi_3}{\psi}\cdot\left\{\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2+\psi}-\frac{\theta_1\theta_2}{(\psi+\theta_2)(\psi+\theta_1+\theta_2)}\right\},$$

$$E(D_3)=\frac{\psi_3}{\psi}\cdot\left\{n-n_1\cdot\frac{\theta_1}{\psi+\theta_1+\theta_2}-n_2\cdot\frac{\theta_2}{\psi+\theta_1+\theta_2}\right\},$$

$$E(D_4)=n\cdot\left\{\frac{\psi_2}{\psi}-\frac{\psi_2}{\psi}\cdot\frac{\theta_2}{\psi+\theta_2}+\frac{\theta_1\theta_2}{(\psi_1+\psi_3+\theta_1)(\psi_2+\theta_2)}\right\}$$
$$+n\cdot\left\{-\frac{\theta_1}{\psi_1+\psi_3+\theta_1}+\frac{\theta_2}{\psi_2+\theta_2}-\frac{\theta_1\theta_2}{(\psi_1+\psi_3+\theta_1)(\psi_2+\theta_2)}\right\}$$
$$+n_2\frac{\psi_1+\psi_3}{\psi}\cdot\left\{\frac{\theta_1\theta_2}{(\theta_1+\psi)(\theta_1+\theta_2+\psi)}-\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\right\},$$

$$E(D_5)=n\cdot\left\{\frac{\psi_1}{\psi}-\frac{\psi_1\theta_1}{\psi(\psi+\theta_1)}+\frac{\theta_2}{\psi+\theta_2}-\frac{\theta_2}{(\psi_2+\psi_3+\theta_2)}\right\}$$
$$+n\cdot\left\{\frac{\psi_1\theta_1}{\psi(\psi+\theta_1)}-\frac{\theta_1\theta_2}{(\psi_1+\theta_1)(\psi_2+\psi_3+\theta_2)}\right\}.$$

그러면 우도방정식은 다음 식 (7)-(11)과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial}{\partial\psi_1}\log L(\Theta)=\frac{D_1}{\psi_1}+\frac{D_4}{\psi_1+\psi_3}-x_s=0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial\psi_2}\log L(\Theta)=\frac{D_2}{\psi_2}+\frac{D_5}{\psi_2+\psi_3}-y_s=0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial\psi_3}\log L(\Theta)=\frac{D_3}{\psi_3}+\frac{D_4}{\psi_1+\psi_3}+\frac{D_5}{\psi_2+\psi_3}-(x_s+y_s-t_s)=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}\log L(\Theta)=\frac{D_6}{\theta_1}-x_s=0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_2}\log L(\Theta)=\frac{D_7}{\theta_2}-y_s=0. \tag{11}$$

모수 Θ에 대한 최우추정량 $\widehat{\Theta}$은 위의 우도방정식 식 (7)-(11)을 뉴턴-랍슨과 같은 수치해석적 방법에 의해 얻을 수 있다. 그리고 (θ_1, θ_2)에 대한 최우추정량은 독립적으로 식 (10)와 식 (11)에 의해서 바로 $\widehat{\theta_1} = D_6/x_s$, $\widehat{\theta_2} = D_7/y_s$로 얻을 수 있다.

따라서 $\sqrt{n}\ (\widehat{\psi}^T - \psi^T)$의 분포는 표본의 크기가 증가하면서 근사적으로 평균벡터가 영이고 분산-공분산행렬이 $I^{-1}(\psi)$인 다변량 정규분포를 따름을 알 수 있다. 여기서 $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, $\widehat{\psi} = (\widehat{\psi_1}, \widehat{\psi_2}, \widehat{\psi_3})$이다. 그리고 피셔의 정보행렬은 다음과 같다.

$$I(\psi) = ((I_{ij})),$$

여기서 $I_{ij} = E\left[-\frac{\partial^2}{\partial\psi_i\partial\psi_j} \log L(\psi) \right]$; $i, j = 1, 2, 3$이며,

$$I_{11} = E(D_1)/\psi_1^2 + E(D_4)/(\psi_1+\psi_3)^2,\ \ I_{12} = 0,\ \ I_{13} = E(D_4)/(\psi_1+\psi_3)^2,$$
$$I_{22} = E(D_2)/\psi_2^2 + E(D_5)/(\psi_2+\psi_3)^2, I_{23} = E(D_5)/(\psi_2+\psi_3)^2,$$
$$I_{33} = E(D_3)/\psi_3^2 + E(D_4)/(\psi_1+\psi_3)^2 + E(D_5)/(\psi_2+\psi_3)^2.$$

3. 시스템 신뢰도 추정

이 장에서는 우도함수와 상대도수에 기초한 추정량들을 이용하여 공통 스트레스가 존재하는 병렬시스템의 신뢰도에 대한 추정량과 근사적 신뢰구간을 각각 제시하고자 한다.

먼저 모수에 대한 최우추정량 $\widehat{\psi} = (\widehat{\psi_1}, \widehat{\psi_2}, \widehat{\psi_3})$을 기초로 병렬시스템의 신뢰도를 추정하기 위해 식 (7)-(11)에서 얻은 모수에 대한 최우추정량을 이용하면 다음 식 (12)와 같은 병렬시스템의 신뢰도에 대한 최우추정량을 얻을 수 있다.

$$\widehat{R}_{MLE} = \widehat{\mu}\left[\frac{1}{\widehat{\psi_1} + \widehat{\psi_3} + \widehat{\mu}} + \frac{1}{\widehat{\psi} + \widehat{\psi} + \widehat{\mu}} - \frac{1}{\widehat{\psi} + \widehat{\mu}} \right], \tag{12}$$

여기서 $\widehat{\psi} = \widehat{\psi}_1 + \widehat{\psi}_2 + \widehat{\psi}_3$이며, $\widehat{\mu} = n/\sum_{i=1}^{n} \log(y_i)$이다.

또한 최우추정량의 일치성과 델타 방법을 이용하면 시스템 신뢰도의 최우추정량 $\widehat{R}_{MLE}$는 근사적으로 평균 R, 분산 $\Lambda \cdot (I^{-1}(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \mu)/n) \cdot \Lambda'$인 정규분포를 따름을 알 수 있다 (Lehmann(1983), 제 5장). 여기서 $\Lambda = (\partial R/\partial\psi_1,\ \partial R/\partial\psi_2,\ \partial R/\partial\psi_3,\ \partial R/\mu)$이며, 피셔의 정보행렬 $I(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \mu)$은 다음과 같이 계산된다.

$$I_{11}=\frac{1}{\psi\psi_1}+\frac{\psi_2}{\psi(\psi_1+\psi_3)^2},\ \ I_{13}=\frac{\psi_2}{\psi(\psi_1+\psi_3)^2},\ \ I_{22}=\frac{1}{\psi\psi_2}+\frac{\psi_1}{\psi(\psi_2+\psi_3)^2},$$
$$I_{23}=\frac{\psi_1}{\psi(\psi_2+\psi_3)^2},\ \ I_{33}=\frac{\psi_1}{\psi(\psi_2+\psi_3)^2}+\frac{\psi_2}{\psi(\psi_1+\psi_3)^2}+\frac{1}{\psi\psi_3},\ \ I_{44}=\frac{1}{\mu^2},$$
$$I_{12}=I_{14}=I_{24}=I_{34}=0.$$

그러므로 최우추정치에 기초한 시스템 신뢰도의 $100(1-\alpha)\%$ 근사적 신뢰구간은 다음 식 (13)과 같이 주어진다.

$$\Big(\widehat{R}_{MLE}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\widehat{\Lambda}\cdot I^{-1}(\widehat{\psi}_1,\widehat{\psi}_2,\widehat{\psi}_3,\widehat{\mu})\cdot\widehat{\Lambda}'/n}$$
$$,\ \widehat{R}_{MLE}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\widehat{\Lambda}\cdot I^{-1}(\widehat{\psi}_1,\widehat{\psi}_2,\widehat{\psi}_3,\widehat{\mu})\cdot\widehat{\Lambda}'/n}\Big),\tag{13}$$

여기서 z_α는 표준정규분포의 오른쪽 꼬리 면적이 α가 되는 값을 의미한다.

다음으로 상대도수에 기초한 병렬시스템의 신뢰도를 추정하기 위해, (X_i, Y_i)와 $Z_i, i=1,\cdots,n$를 각각 두 부품의 수명시간과 수명시간에 영향을 주는 공통스트레스라 하자. 그리고 K_1을 전체 표본 중에서 $Z_i < max(X_i, Y_i)$를 만족하는 표본의 개수라 하자. 그러면 K_1의 분포는 모수가 (n, R)인 이항분포를 따름을 알 수 있다.
따라서 상대도수에 기초한 병렬시스템의 신뢰도 추정량은 다음 식 (14)와 같이 얻을 수 있다.

$$\widehat{R}_{RF}=K_1/n.\tag{14}$$

또한 추정치 $\widehat{R}_{RF}$은 이항분포의 대표본 성질에 의해 근사적으로 평균이 R, 분산이 $R(1-R)/n$ 인 정규분포를 따름을 알 수 있다.
그러므로 상대도수에 기초한 시스템의 신뢰도에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 근사적 신뢰구간은 다음 식 (15)와 같이 얻을 수 있다.

$$\Big(\widehat{R}_{RF}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\widehat{R}_{RF}(1-\widehat{R}_{RF})/n},\ \widehat{R}_{RF}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\widehat{R}_{RF}(1-\widehat{R}_{RF})/n}\Big).\tag{15}$$

4. 모의실험

이 장에서는 난수생성기에 의해 생성된 가상자료를 이용하여 3장에서 제안한 병렬시스템의 신뢰도에 대한 두 가지의 추정량과 근사적 신뢰구간을 각각 비교하고자 한다. 먼저 모수 ($\psi_1=3.0$, $\psi_2=3.0$, $\psi_3=0.5$)인 이변량 파레토 분포로부터 표본크기 30인 난수를 발생시킨다. 이변량 임의중단 모형에 대한 분포로서 모수가

($\phi_1=1.0$, $\phi_2=1.0$, $\phi_3=0$)인 이변량 파레토 분포를 따른다고 가정하고, 또한 공통스트레스에 대한 분포로서 모수가 ($3,1$)인 파레토 분포를 가정한다. 이때 병렬시스템의 신뢰도에 대한 참 값은 $R=0.6073$로 계산된다.

식 (7)-(9)에 의해 모수들에 대한 최우추정치를 구해보면 $\widehat{\phi}_1=2.8096$, $\widehat{\phi}_2=3.1522$, $\widehat{\phi}_3=0.6929$로 계산되며 $\widehat{\mu}=2.8036$이 된다. 그러면 병렬시스템의 신뢰도에 대한 최우추정치과 근사적 신뢰구간을 구해보자. 최우추정량와 상대도수에 기초해서 병렬시스템의 신뢰도에 대한 추정치들은 각각 $\widehat{R}_{MLE}=0.5698$와 $\widehat{R}_{RF}=0.4333$로 계산된다. 역시 이들 추정량들을 이용해서 신뢰도에 대한 95% 근사적 신뢰구간들은 식 (13)과 식 (15)에 의해서 각각 (0.4401, 0.6995)와 (0.2560, 0.6106)으로 계산된다.

<표> 이변량 파레토 분포로부터 생성된 자료

i	x_i	y_i	z_i	i	x_i	y_i	z_i
1	0.41091*	0.18959	1.49934	16	0.06163	0.13488	1.20353
2	0.10637	0.19766	1.37434	17	0.17253	0.06605	3.01175
3	0.08081*	0.00945	1.25236	18	0.13902	0.07094	1.64027
4	0.37618	0.79546	1.17930	19	0.08210	0.51464	1.31157
5	0.84123	0.16507	1.27143	20	0.09406	0.01147	1.48392
6	0.41921	1.33385	1.49319	21	0.04049	0.07053	1.23551
7	0.10515	0.34828	1.46563	22	0.10169	0.03128	1.20151
8	0.40075*	0.05017	1.27014	23	0.15287	0.15287	1.15583
9	0.56702*	0.18229	1.69365	24	0.09750	0.06049	1.25978
10	0.13243	0.07138*	1.20223	25	0.23673	0.10518	1.38653
11	0.02906*	0.10039	1.52822	26	0.20666	1.15666*	1.68672
12	0.18503	0.28384	2.77483	27	0.21868	0.04599	1.43530
13	0.23412	0.18969	1.15470	28	0.42849	0.42849	1.87239
14	0.33621	0.11529	1.39315	29	0.49243	0.19479	1.39535
15	0.07329	0.12003	1.06674	30	0.16252	0.16252	1.26940

위의 결과들로부터 병렬시스템의 신뢰도에 대한 각각의 추정량과 근사적 신뢰구간에 대한 결과에서 알 수 있는 바와 같이, 상대빈도에 기초한 추정량에 비해서 최우추정량에 기초한 추정량이 편의와 신뢰구간의 길이 측면에서 다소 좋은 결과임을 알 수 있다.

그러나 모수의 값, 중단비율 및 표본크기 등에 대한 다양한 조합에 대해서도 본 논문에서 제안한 두 가지 추정방법의 효율성을 비교하는 것도 의미가 있으며, 다른 이변량 수명분포로 확장해서 제안된 추정량을 적용하는 연구는 향후 과제로 남겨두고자 한다.

참고문헌

1. Bandyapadhyay, D. and Basu, A.P. (1990). On Generalization of a Model by Lindley and Singpurwallam, *Advanced Applied Probability*, 22,
2. Block, H. W. and Basu, A. P. (1974). A Continuous Bivariate Exponential Extension, *Journal of the American Statistical Association*, 69, 1031-1037.
3. Cho, J. S., Cho, K. H. and Cha, Y. J. (2003). System Reliability From Stress Strength Relationship in Bivariate Pareto Distribution, *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, Vol. 14(1), 113-118.
4. Cho, J. S., Cho, K. H. and Lee W. D. (2003). Reliability for Series and Parallel Systems in Bivariate Pareto model : Random Censorship Case, *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, Vol. 14(3), 461-469.
5. Freund, J. E. (1961). A Bivariate Extension of the Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 971-977.
6. Hanagal, D.D. (1996). A Multivariate Pareto Distribution, *Communications in Statistics -Theory and Methods*, 25(7), 1471-1488.
7. Jeevanand, E.S. (1997). Bayes Estimation of $P(X_2 < X_1)$ for a Bivariate Pareto Distribution, *The Statistician*, 46(1), 93-99.
8. Lehmann, E.L.(1983), *Theory of Point Estimation*, John Wiley and Sons. New York.
9. Lindley, D.V. and Singpurwalla, N.D. (1986). Multivariate Distributions for the Life Lengths of Components of a System Sharing a Common Environment, *Journal of Applied Probability*, 23, 418-431.
10. Marshall, A.W. and Olkin, I.(1967). A Multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 62, 30-44.
11. Veenus, P. and Nair, K.R.M. (1994). Characterization of a Bivariate Pareto Distribution, *Journal of Indian Statistical Association*, 32, 15-20.

[2005년 9월 접수, 2005년 10월 채택]