Journal of Korean
Data & Information Science Society
2005, Vol. 16, No. 3, pp. 567~579

An Estimation of VaR in Stock Markets Using Transformations[1)]

In-Kwon Yeo[2)] · Choo Mi Jeong[3)]

Abstract

It is usually assumed that asset returns in the stock market are normally distributed. However, analyses of real data show that the distribution tends to be skewed and to have heavier tails than those of the normal distribution. In this paper, we investigate the method of estimating the value at risk(VaR) of stock returns. The VaR is computed by using the transformation and back-transformation method. The analysis of KOSPI and KOSDAQ data shows that the proposed estimation outperformed that under the normal assumption.

Keywords : Maximum likelihood estimation, Modulus transformation, Value at risk, Yeo-Johnson transformation

1. 서론

주식투자는 다른 재텍크 수단보다 위험 부담이 크지만 상대적으로 높은 투자수익(investment return)을 얻을 수 있는 공격적인 투자방식이다. 투자수익은 투자로 인한 부의 증가를 의미하며 위험에 대한 보상이기도 하다. 주식투자의 경우, 투자수익은 배당소득과 시세차익으로 구성이 되어 있으며 이들의 합은 투자성과의 척도가 된다. 그러나 사람, 종목, 시점마다 투자규모 또는 투자액이 다르기 때문에, 수익에 관련된 분석에서는 투자한 양과 투자로부터 회수된 수익의 양의 상대적 비율인 투자수익률(rate of return on investment)을 이용하는 것이 일반적이다. 이런 상대적 비율을 주식시장에서는 주가 수익률이라 하는데, 모든 배당이 재투자 된다고 가정할 때, 주가 수익률은 아래와 같은 2가지의 계산방식에 의해 계산된다. 시점 t에서의 주식의 가격을 p_t

1) 본 연구는 숙명여자대학교 2005년도 교내특별연구비 지원에 의해 수행되었음
2) First Author : Assistant Professor, Division of Mathematics & Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul, 140-742, Korea
E-mail : inkwon@sookmyung.ac.kr
3) Graduate Student, Division of Mathematics & Statistical Informatics, Chonbuk National University, Chonju, Chonbuk, 560-759, Korea

이라고 하고 바로 이전 시점 가격을 p_{t-1}라고 하면 단위시점에 대한 수익률은 다음과 같이 정의 된다.

산술수익률(이산수익률): $r_t = \dfrac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$, $(-1 < r_t < \infty)$

기 하 수 익 률 (연 속 수 익 률) : $R_t = \log\left(\dfrac{p_t}{p_{t-1}}\right) = \log(1 + r_t)$, $(-\infty < R_t < \infty)$.

금융시장의 자유화로 여러 제도적 제약들이 완화되고 금융자산의 가격 변동이 확대되면서 투자자들은 주식, 채권 등의 금융자산에의 투자로부터 수익을 얻을 수 있는 가능성이 높아졌다. 또한 큰 손실이 발생할 가능성도 동시에 갖게 되었다. 이러한 수익과 손실의 발생에 대한 예측은 주식이나 채권과 같은 금융상품의 위험을 얼마나 정확하게 측정하느냐에 달려있게 된다. 위험의 정도를 측정하는 도구로는 만기, 베타, 표준편차, 듀레이션 등이 있는데, 국내에서는 1997년의 IMF 금융위기 이후에 많은 금융기관들이 위험측정의 방법으로 Value at Risk(이하 VaR)를 도입하고 있다. VaR은 '정상적인 시장여건 하에서 주어진 신뢰수준에서 일정기간 동안 발생할 수 있는 최대 손실금액(또는 손실률)'이라고 정의된다. 기존의 위험측정치들은 위험을 합산할 수 없다는 단점이 있는 것에 반해, VaR는 통계학에 근거하여 위험을 평가하고 합산 요약하여 하나의 값으로 제공하며 개념의 단순함과 이용의 편리함 때문에 많이 사용된다.

재무학에서 VaR를 추정할 때, 일반적으로 수익률은 독립적이고 동일한 정규분포를 따른다고 가정한다. 그러나 VaR에 관한 많은 실증분석의 결과에 의하면 금융자산의 수익률이 정규분포를 따르지 않는 것으로 나타났다. Fama(1965)의 연구에서는 수익률이 정규분포를 따르지 않고 확률분포의 꼬리부분이 두터운 형태를 하고 있음을 보였고, McCulloch(1996)과 McDonald(1996)는 수익률 분포의 비정규성에 대해 실증분석으로 통해 보였다. Zangari(1996)는 미국 주식의 포트폴리오의 수익률 분포가 꼬리부분이 정규분포보다 더 두텁다고 보고하고 있으며, Li(1999)는 외환시장에서 이루어지는 환거래가 정규분포를 따르지 않는다는 사실을 보고하였다. 이들 연구를 정리하면 수익률이 독립이 아닌 경우, 등분산이 아닌 경우, 정규성을 따르지 않는 경우와 같은 문제가 발생하는 것으로 나타났다. 여기서 비정규성(non-normality)은 투자에 있어서 매우 중요한 의미를 가지게 된다. 예를 들어 음의 왜도는 자산 가격이 큰 폭으로 상승할 확률이 큰 폭으로 하락할 확률보다 높게 움직인다는 사실을 나타내고 양의 왜도는 그 반대로 해석될 수 있다.

위의 세 문제가 발생되었을 때 지금까지의 해결방법은 다음과 같이 정리할 수 있다. 독립이 아닌 경우, 해결방법은 AR(p)나 ARMA(p,q)등의 시계열적 모형을 추가하여 분석하는 방법이고, 등분산성이 아닌 경우, Engle(1982)의 ARCH모형이나 Bollerslev(1986)의 GARCH모형 등을 적용해서 해결할 수 있다. 마지막으로 정규성이 아닌 경우, 왜도의 문제는 극한값 분포(extreme value distribution), 첨도는 t-분포 등의 다른 분포를 사용하여 해결하거나 데이터를 정규성에 가깝게 변환하는 변수변환 방법이 사용될 수 있다. 이 중 본 논문에서는 변환을 이용하여 정규성 문제를 해결하는데 관심을 두었다.

변환을 이용한 연구로 Turan(2003)은 주식 가격의 극단적인 변화의 점근적인 분포의 종류를 일반화된 극한값 분포로 Box-Cox(1964)변환을 이용한 방법을 소개하였다. 이 논문에서는 John and Draper(1980)의 modulus 변환과 Yeo-Johnson(2000) 변환을 통해 주가수익률의 첨도와 왜도를 조절하여 자료의 정규성을 높인 후 VaR를 추정하는 방법에 대해 알아본다. Box-Cox 변환의 경우 양의 관측 값에만 사용될 수 있기 때문에 이 논문에서는 고려하지 않았다.

2. VaR 정의

투자대상으로서 주식은 높은 투자수익이 기대되지만 투자위험도 높은 특성을 지닌다. 그러므로 위험에 대한 효율적인 관리가 필요한데, 이를 위해서는 적정한 위험수준을 설정하고, 그 위험수준에서 기대이익을 극대화하는 전략이 필요하다. 이 논문에서 사용된 위험측정치 VaR의 공식적인 정의를 다시 살펴보면, 정상적인 시장여건 하에서 특정신뢰구간에서 목표기간동안 발생할 수 있는 최대손실금액 또는 손실률을 의미한다. VaR는 원하는 시점에서 위험에 노출된 금액을 측정할 수 있는 기법으로 금융거래에서 발생되는 위험을 적극적이고 효율적으로 관리하기 위하여 도입되었다. 이는 금리, 환율, 주가 등에서 시장가격에 대한 미래분포를 예측하여 향후 불리한 가격변동이 특정 신뢰구간 내에서 발생하는 경우 나타날 수 있는 포트폴리오 가치의 최대손실규모를 산출하는 기법이다(참고, 김진호, 오세경, 이건호(2000)). 또한, VaR는 금융자산의 시장위험을 측정하는 기법 중 통계적으로 정교하면서도, 복잡한 위험을 통합하여 하나의 숫자로 위험을 표시해 주기 때문에 이해하거나 사용하기 쉬운 기법으로 활용도가 크다. 통계적인 기초에 근거하여 VaR는 측정하기 위해서는 먼저 보유기간과 신뢰수준을 선택 하여야 한다. 보유기관과 신뢰수준은 사용자의 입장에서 대상의 특성을 고려하여 다소 임의적으로 결정된다. 예를 들어, Bankers Trust Bank은 99%, Chemical Bank은 97.5%, J. P. Morgan사는 95%의 신뢰수준을 사용하고 있고, 신뢰수준이 높아질수록 VaR는 더 커지게 된다. 보유기간은 금융상품에 따라 차이가 큰데 채권과 같이 수익률의 변화가 심하지 않는 경우 긴 반면 주식이나 외환과 같이 변화가 심한 경우 짧은 경향이 있다. 참고로, J. P. Morgan의 RiskMetrics에서는 95% 신뢰수준에서 1일 보유기간을 사용하고 있다.

재무학에서 수익률 분포로 정규분포가 널리 사용되고 있다. 정규분포는 평균과 분산의 두 가지 모수만으로 분포의 속성을 모두 파악할 수 있는 간편성과 자료가 많아질수록 표본 평균의 분포가 정규분포에 가까워진다는 중심극한정리에 의한 대표성으로 많이 사용된다. 또한 수익률 분포가 정규분포인 경우에는 신뢰수준 ($1-\alpha$)%과 표준편차를 알면 쉽게 VaR를 구할 수 있다는 점 때문이다. 예를 들어 신뢰수준 95%에서 VaR은 1.645%×투자금액이 된다. 그러나 자료가 정규분포를 따르지 않는 경우에 적용하면 적절하지 않은 결과를 얻을 수도 있다. 이에 해결 방법으로 이 논문에서는 수익률 분포가 정규분포를 따르지 않는 경우 적절한 변환을 통하여 수익률의 분포를 정규분포에 근사시킨 후 변환된 자료를 이용하여 VaR를 계산하고 이 값을 역변환하여 본래의 척도에서 해당 VaR를 계산하는 방법에 대해 알아본다.

3. 변수변환

서론에서 언급한 것과 같이 대부분의 수익률 분포는 꼬리부분이 두터우면서 기울어진 형태를 가지고 있다. 이와 같은 형태를 가지는 분포를 정규분포에 근접하도록 만드는 적절한 변환을 찾기 위해서는 van Zwet(1964)가 소개한 상대적인 왜도 개념을 살펴볼 필요가 있다.

임의의 연속형 확률변수 X의 분포 함수를 F라고 하고 이 분포함수의 역함수를 F^{-1}라고 하자. I_F는 $P(X \in I_F)=1$를 만족시키는 가장 짧은 구간이라고 하면 F의 분포가 어떤 지점 x_0에 대해 대칭이라는 것을 다음과 같이 정의할 수 있다. 모든 $x \in I_F$ 에 대해,

$$F(x_0+x)+F(x_o-x)=1$$

가 된다. 또 다른 연속형 확률변수 Y가 분포 함수 G를 따르고 이 분포함수의 역함수를 G^{-1}라고 하자. 함수 $\psi(x)=G^{-1}(F(x))$ 라고 정의하면, $G(\psi(x))=F(x)$ 가 되는데 이것은 $P(Y \le \psi(x))=P(X \le x)$ 을 의미한다. 즉, Y의 분포함수 G는 또한 $\psi(X)$ 의 분포함수가 되며 확률 변수 $\psi(X)$ 는 확률변수 Y와 같은 분포를 따른다. 이 때 G가 X에 대해 비감소이고 볼록한(오목한) 변환 $\psi(X)$ 의 분포인 경우에 한해서 $G^{-1}F$는 볼록(오목)하게 된다.

Van Zwet(1964)은 $G^{-1}(F(x))$ 가 감소하지 않고 볼록(오목)한 함수이면 분포함수 G를 분포 함수 F보다 상대적으로 오른쪽으로 치우친(relatively skewed to the right)(왼쪽으로 치우친(relatively skewed to the left)) 분포라고 정의하였다. 확률변수의 감소하지 않는 볼록(오목)한 변환이 I_F의 아래쪽(위쪽) 부분을 상대적으로 모아주고 위쪽(아래쪽) 부분을 늘려주어 분포가 왼쪽(오른쪽)으로 치우쳐지는 것을 줄여준다. 즉, 분포가 음의 왜도를 가지는 경우 비감소 볼록함수를 이용하여 자료를 변환시키면 왜도를 줄일 수 있고 양의 왜도인 경우 비감소 오목함수를 이용하여 왜도를 줄일 수 있다. 이와 같은 성질을 만족하는 변환으로는 Box and Cox(1964)에 의해 소개된 Box-Cox 변환과 Yeo and Johnson (2000)에 의해 제안된 Yeo-Johnson변환이 있다.

분포가 어떤 점 x_0에 대해 대칭이지만 꼬리부분이 두터운 경우, 정규분포에 근사하도록 첨도를 줄일 수 있는 변환을 찾기 위해서는 x_0에 관한 I_F에서 반-대칭인 함수 ψ를 찾아야 한다. 점 x_0에 관한 I_F의 반-대칭이라는 것은 $x_0-x \in I_F$이고 $x_0+x \in I_F$인 모든 x에 대해 다음의 등호가 성립한다는 것을 의미한다.

$$\psi(x_0+x)+\psi(x_0-x)=2\psi(x_0)\ .$$

이 경우 $x \le x_0$ 인 부분에서 함수가 볼록(오목)이면 $x \ge x_0$ 에서는 오목(볼록)이 되기 때문에 I_F 상에서의 반-대칭 함수 ψ 는 볼록-오목(concave-convex)함수라고 불린다. 대표적인 볼록-오목함수로는 John and Draper(1980)의 modulus 변환과 Johnson(1949)의 HST 변환이 있는데 modulus 변환의 경우 양수부분이 Yeo-Johnson 변환과 일치하고 변환모수를 추정하는데 있어 비슷한 가능도함수가 유도되기 때문에 이 논문에서는 modulus 변환을 이용하여 분포의 첨도를 조절하고자 한다.

두 변환은 다음과 같이 정의된다.

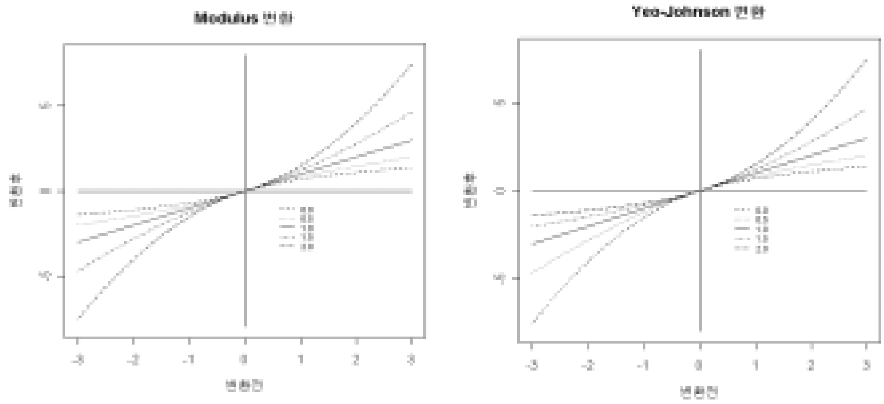
▷ Modulus 변환

$$\psi^{MO}(x,\lambda)=\begin{cases} sign(x)\log(|x|+1), & \lambda=0 \\ sign(x)\dfrac{(|x|+1)^{\lambda}-1}{\lambda}, & \lambda\neq 0. \end{cases}$$

▷ Yeo-Johnson 변환

$$\psi^{YJ}(x,\lambda)=\begin{cases} \log(x+1), & x\ge 0,\ \lambda=0, \\ \dfrac{(x+1)^{\lambda}-1}{\lambda}, & x\ge 0,\ \lambda\neq 0, \\ -\log(-x+1), & x<0,\ \lambda=2, \\ -\dfrac{(-x+1)^{2-\lambda}-1}{2-\lambda}, & x<0,\ \lambda\neq 2. \end{cases}$$

여기서 $sign(x)$ 는 x 가 0 또는 양수이면 1 음수이면 -1의 값을 가지는 함수를 의미한다. <그림 3-1>에서 보는 것과 같이 두 변환은 양수 구간에서는 같은 형태를 가지고 음수부분만 다른 형태를 가진다.



<그림 3-1> 변환모수에 따른 modulus 변환과 Yeo-Johnson 변환

Modulus 변환의 경우, <그림 3-1>에서 보는 것과 같이 양수부분의 형태가 볼록(오목)하면 음수부분에서는 오목(볼록)의 형태를 가지며 원자료의 절대값이 같으면 변환된 자료의 절대값이 같게 되는 형태를 띄고 있다. 그러므로 modulus 변환은 대칭적이지만 양쪽 꼬리부분이 두터운 경우에 적용시키면 효과가 좋은 변환으로 알려져 있다. Yeo-Johnson 변환의 경우 λ가 1보다 작으면 전체적으로 오목하고 1보다 크면 전체적으로 볼록하여 비대칭적 구조를 가지고 있어 자료의 분포가 한쪽으로 기울어져 있는 경우에 적용하면 좋은 효과를 얻을 수 있게 된다.

4. VaR 계산

이 논문에서는 수익률 $X_1, X_2, \cdots, X_n$은 서로 독립이고 동일한 분포를 따르는 확률변수라고 가정한다. 이 자료를 적절한 변환모수 λ를 선택하여 변환 ψ를 적용시켰을 때 변환된 확률변수 $\psi(X_1, \lambda), \psi(X_2, \lambda), \cdots, \psi(X_n, \lambda)$ 들은 평균이 μ이고 분산이 σ^2인 정규분포를 따르게 만들 수 있다고 가정한다. 표기상의 편의를 위해 추정해야 하는 모수를 $\theta = (\mu, \sigma^2, \lambda)$로 관측값을 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$으로 표기한다. 위의 가정 하에서 로그가능도함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$l_n(\theta|x) \propto -\frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\{\psi(x_i, \lambda) - \mu\}^2 + \log\{J(\lambda, x)\} \tag{4.1}$$

여기서 $J(\lambda, x)$는 $\psi(x_i, \lambda)$에 대한 야고비안들의 곱을 나타내며 modulus 변환과 Yeo-Johnson 변환의 경우,

$$\log\{J(\lambda, x)\} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \log\{J^{MO}(\lambda, x_i)\} = (\lambda-1)\sum_{i=1}^{n} \log(|x_i|+1) \\ \sum_{i=1}^{n} \log\{J^{YJ}(\lambda, x_i)\} = (\lambda-1)\sum_{i=1}^{n} sign(x_i)\log(|x_i|+1) \end{cases}$$

가 된다. 로그가능도함수 (4.1)를 최대로 만드는 추정량을 구하기 위해 먼저 λ를 고정시킨다. 고정된 λ에 대해 로그가능도함수를 최대로 만드는 μ와 σ^2의 추정량은 다음과 같다.

$$\widehat{\mu}(\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi(x_i, \lambda), \qquad \widehat{\sigma^2}(\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{\psi(x_i, \lambda) - \widehat{\mu}(\lambda)\}^2 . \tag{4.2}$$

식 (4.2)에 있는 통계량들을 로그가능도함수 (4.1)에 대입하면 다음과 같은 λ에 대한 프로파일로그함수(profile log-likelihood function)를 구할 수 있다.

$$l_{\max}(\lambda) \propto -\frac{n}{2}\log(\widehat{\sigma}^2(\lambda)) + \log\{J(\lambda, x)\} \tag{4.3}$$

식 (4.3)를 최대로 만드는 λ를 $\widehat{\lambda}$라고 하면 이 값은 수치해석학적으로 구할 수 있으며 이 값을 식 (4.2)에 대입하여 얻은 $\widehat{\theta} = (\widehat{\mu}(\widehat{\lambda}), \widehat{\sigma}^2(\widehat{\lambda}), \widehat{\lambda})$가 로그가능도함수 (4.1)를 최대화시키는 최대가능도추정량이 된다. 여기서 주의해야 할 점은 두 변환 모두 비선형이고 추정량 $\widehat{\lambda}$은 위치불변(location-invariance)이지도 않고 척도불변(scale-invariance)이지도 않기 때문에 실제분석에서 수익률 $X_1, X_2, \cdots, X_n$은 먼저 표준화시켰다.

신뢰수준이 100($1-\alpha$)%에서의 VaR를 계산하기 위해서는 보유기간 말 기준의 주식가치 또는 수익률을 나타낼 수 있는 확률밀도함수 f를 구하고 이 밀도함수를 이용하여 아래와 같은 조건을 만족하는 최소가치 R^*를 찾아야 한다.

$$\int_{-\infty}^{R^*} f(u)du = \alpha.$$

즉, VaR는 α에 해당하는 위수(quantile)를 추정하는 것으로 본 논문에서는 확률밀도함수 f를 직접 추정하지 않고 자료를 변환시켜 정규분포에 근사시킨 후 정규분포에서 위수를 추정하고 추정된 위수를 역변환 하여 VaR를 추정한다.

신뢰구간 $100(1-\alpha)$%의 VaR를 구하고자 한다면 분포의 왼쪽 꼬리부터 시작하여 α%에 해당하는 백분위수(percentile) 값을 구해야 하는데, 이 값을 구하기 위해 먼저 최대가능도추정량을 구하고 평균이 $\widehat{\mu}(\widehat{\lambda})$이고 표준편차가 $\widehat{\sigma}(\widehat{\lambda})$인 정규분포에서 α에 해당되는 위수를 $q_\alpha(\hat{\lambda})$를 계산한다. 이 때 $q_\alpha(\widehat{\lambda})$는 다음과 같은 식으로 쉽게 구할 수 있다.

$$q_{\alpha}(\hat{\lambda}) = \hat{\mu}(\hat{\lambda}) + z_{\alpha} \times \hat{\sigma}(\hat{\lambda})$$

여기서 z_{α}는 표준정규분포에서 α에 해당되는 위수를 나타낸다. 이 백분위수 값을 사용한 변환의 역변환을 사용하여 원래 자료에 대한 척도로 표시된 위수 q_{α}를 계산한다. 이 때 각각의 변환에 대한 역변환은 다음과 같이 정의된다.

▷ Modulus 역변환

$$\psi^{MO^{-1}}(x,\lambda) = \begin{cases} sign(x)\{\exp|x| - 1\}, & \lambda = 0 \\ sign(x)\{(\lambda|x| + 1)^{1/\lambda} - 1\}, & \lambda \neq 0. \end{cases}$$

▷ Yeo-Johnson 역변환

$$\psi^{YJ^{-1}}(x,\lambda) = \begin{cases} \exp(x) - 1, & x \geq 0,\ \lambda = 0, \\ (\lambda x + 1)^{1/\lambda} - 1, & x \geq 0,\ \lambda \neq 0, \\ 1 - \exp(-x), & x < 0,\ \lambda = 2, \\ 1 - \{(\lambda - 2)x + 1\}^{1/(2-\lambda)}, & x < 0,\ \lambda \neq 2. \end{cases}$$

즉, 원래 수익률의 척도로 표시된 위수는 $q_{\alpha} = \psi^{-1}(q_{\alpha}(\hat{\lambda}), \hat{\lambda})$가 된다. 현재 투자액을 W라고 하면 산술수익률을 사용한 경우의 VaR는 Wq_{α}가 되고 기하수익률을 사용한 경우의 VaR는 $W(\exp(q_{\alpha}) - 1)$이 된다. 이렇게 계산된 VaR에 위에서 수익률을 표준화시킬 때 사용하였던 표준편차를 곱하고 평균을 더한 값이 실제 VaR이 된다.

5. VaR 검정

VaR모형의 정확성을 검정하는 가장 간단하고 많이 쓰이는 방법은 Kupiec(1995)이 제안한 주어진 표본에서 VaR를 능가하는 손실이 발생하는 사건의 비율인 실패율(failure rate)을 이용하는 것이다. 신뢰수준 $100(1-\alpha)\%$ 에서 계산된 VaR보다 큰 손실이 발생한 일수를 N 이라고 하면 '$p = 1 - \alpha$' 라는 귀무가설 하에서 N 는 성공할 확률이 p 이고 실험횟수가 T 인 이항분포를 따른다는 사실을 이용하여 검증할 수 있다.

Kupiec의 방법을 이용하여 VaR의 타당성을 계산하면 사용된 동일한 자료를 가지고 계산된 VaR의 타당성을 확인하기 때문에 그 모형의 정확성에 대한 왜곡된 결과를 초래할 수 있다. 그러므로 이 논문에서 Kupiec이 제안한 방법을 보완한 교차타당성

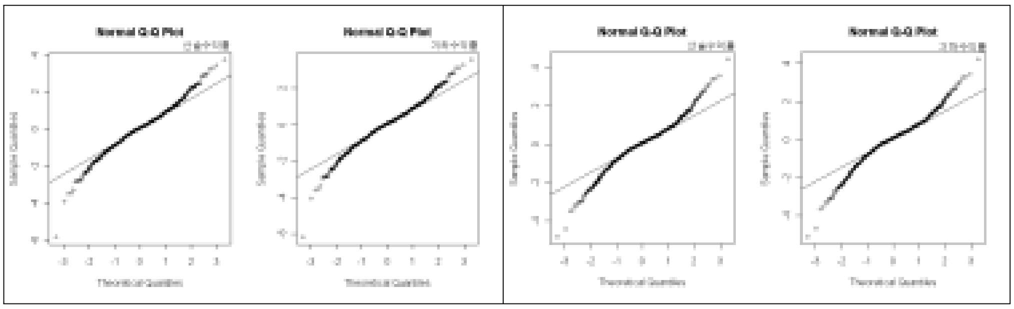
(cross validation) 방법을 이용하여 VaR의 타당성을 검정하는 방법을 적용하였다. 교차타당성 방법을 이용하기 위해서는 먼저 수익률 자료를 K개의 그룹으로 나누고 첫 번째 그룹을 제외한 나머지 수익률들을 이용하여 VaR를 계산하고 첫 번째 그룹의 수익률 중에서 VaR보다 큰 손실이 발생한 일수 N_1을 구한다. 이 때 VaR를 계산하는데 사용된 수익률을 훈련자료(training data)라고 하고 N_1를 계산하는데 사용된 자료를 시험자료(test data)라고 한다. 이런 방법을 모든 그룹에 적용하여 $N_2, \cdots, N_K$를 차례로 계산하고 $N = N_1 + \cdots + N_K$를 구한다. 이 N를 위의 로그가능도 비율을 이용하여 구한 기각역 또는 채택역과 비교하여 VaR의 타당성을 확인한다.

6. 실증 연구

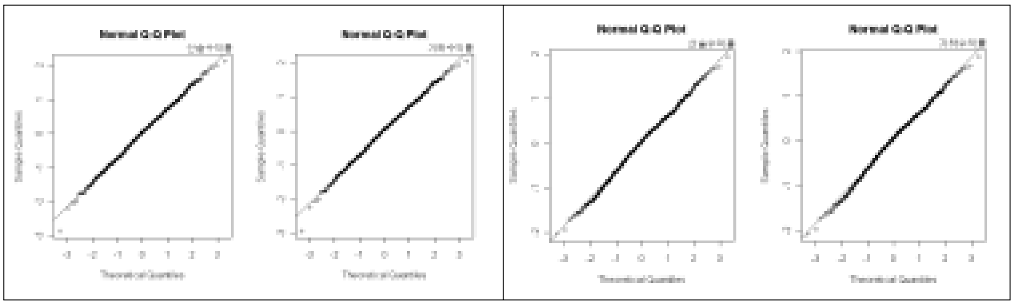
6.1 주가 수익률을 이용한 VaR 계산

이 절에서는 실증분석을 통해 정규분포 하에서의 VaR과 제안한 방법을 통해 얻어진 VaR를 비교하고 제안 방법이 얼마나 타당한지를 확인하고자 한다. 분석에 사용된 자료는 2000년 5월 30일부터 2004년 6월 30일까지 1001개의 KOSPI 종합지수와 KOSDAQ 지수의 종가로 계산된 1000개의 산술수익률과 기하수익률을 비교대상으로 설정하였다.

(a) KOSPI (b) KOSDAQ



(c) Modulus 변환 후 KOSPI (d) Modulus 변한 후 KOSDAQ



<그림 6-1> KOSPI와 KOSDAQ 자료에 대한 Q-Q plot

<그림 6-1>의 (a)와 (b)는 KOSPI와 KOSDAQ의 산술수익률과 기하수익률에 대한 Q-Q plot으로 모든 수익률이 정규분포보다 양쪽 꼬리부분이 두터운 것을 볼 수 있다. 이와 같이 자료의 왜도보다 첨도에서 더 심각한 문제가 발생하는 경우, Yeo-Johnson 변환보다는 modulus 변환을 이용하여 VaR를 추정하는 것이 더 효율적이다. 이 논문에서는 이러한 점을 고려하여 KOSPI와 KOSDAQ 자료에 modulus 변환을 적용하였다. <표 6-1>에서는 변환 전과 modulus 변환을 적용한 후의 수익률에 대한 왜도, 첨도, 그리고 Shapiro-Wilk 통계량을 이용한 정규성 검정을 결과가 표시되어 있다.

<표 6-1>에서 보는 것과 같이 변환된 KOSPI와 KOSDAQ에 대한 변환모수의 추정값이 모두 1보다 훨씬 작아 양쪽꼬리부분을 당겨주는 구조가 되어 변환된 수익률의 첨도가 상대적으로 많이 작아진 것을 볼 수 있다. Shapiro-Wilk 검정에서도 KOSPI의 경우 정규성에 무리가 없는 것으로 나타났다. KOSDAQ의 경우 첨도가 줄어들었지만 Shapiro-Wilk 정규성 검정에서는 여전히 정규분포를 따르지 않는 것으로 나타났다. 그러나 Shapiro-Wilk 통계량의 값이나 기타 통계량을 보면 변환 전보다 상대적으로 정규분포에 접근해 간 것을 볼 수 있다. <그림 6-1>의 (c)와 (d)를 보면 KOSPI와 KOSDAQ의 모든 수익률의 modulus 변환에서 변환 후의 Q-Q plot이 변환 전에 비해 정규분포에 잘 적합하고 있는 것으로 나타났다.

<표 6-1> KOSPI와 KOSDAQ 수익률의 분포형태

	KOSPI				KOSDAQ			
수익률	산술수익률		기하수익률		산술수익률		기하수익률	
변환여부	변환전	변환후	변환전	변환후	변환전	변환후	변환전	변환후
왜도	-0.256	-0.116	-0.384	-0.174	-0.267	-0.175	-0.419	-0.237
첨도	2.067	0.053	2.376	0.079	2.303	-0.022	2.450	-0.008
Shapiro-Wilk 정규성 검정	0.980 (0.000)	0.998 (0.400)	0.977 (0.000)	0.997 (0.093)	0.966 (0.000)	0.996 (0.022)	0.963 (0.000)	0.995 (0.002)
변환모수	1.000	0.387	1.000	0.377	1.000	0.158	1.000	0.149

변수변환을 이용한 VaR를 계산하는데 있어 VaR의 신뢰수준은 일반적으로 많이 사용되고 있는 세 값 95%, 97%, 99%로 정하였으며 보유기간은 1일로 설정하였다. <표 6-2>는 각각의 신뢰수준에서 변환 전 자료에 대한 VaR과 4절에서 언급한 방법으로 계산된 VaR를 계산한 결과이다. 신뢰수준 95%에서는 변환 전과 변환 후의 값에 큰 차이가 없는 반면 신뢰수준이 높아질수록 두 값이 차이가 커지는 것을 볼 수 있다.

<표 6-2> 정규분포를 가정하여 계산한 각 신뢰수준에 대한 VaR

	KOSPI				KOSDAQ			
	산술수익률		기하수익률		산술수익률		기하수익률	
신뢰수준	변환 전	변환 후	변환 전	변환 후	변환 전	변환 후	변환 전	변환 후
95%	0.0336	0.0333	0.0333	0.0329	0.0402	0.0390	0.0398	0.0385
97%	0.0384	0.0398	0.0380	0.0392	0.0458	0.0473	0.0453	0.0465
99%	0.0476	0.0534	0.0469	0.0523	0.0564	0.0657	0.0554	0.0641

6.2 주가 수익률 VaR의 타당성 검정

타당성 검정을 위해 사용된 Kupiec의 채택역이 <표 6-3>에 주어져 있다. <표 6-3>에서 N은 1000개의 수익률 중에서 각각의 신뢰수준에서 <표 6-2>에 계산된 VaR보다 큰 손실률을 보인 수익률의 개수를 의미한다. 이 Kupiec의 실패율을 이용하여 모형을 검증한 결과는 KOSPI의 경우 95%와 97% 신뢰수준에서는 변환 전과 후의 두 방법 모두 큰 문제가 없는 것으로 나타났으나 99% 신뢰수준에서는 변환 전의 결과를 보면 VaR이 과소평가되어 적절한 방법이 아니라는 것을 볼 수 있다. KOSDAQ의 자료의 경우에도 97%에서의 기하수익률을 제외한 나머지 결과에서 위와 동일한 결과를 얻었다. 참고로 Yeo-Johnson변환을 97% 기하수익률에 적용했을 때

VaR은 0.0479로 계산되었으며 Kupiec의 실패개수는 N=39로 채택되었다.

<표 6-3> 추정 VaR의 실패횟수 및 Kupiec의 실패율 채택여부

	KOSPI								KOSDAQ							
	산술수익률				기하수익률				산술수익률				기하수익률			
신뢰수준	변환 전		변환 후		변환 전		변환 후		변환전		변환 후		변환전		변환 후	
	N	채택여부	N	채택여부	N	채택여부	N	채택여부	N	채택여부	N	채택여부	N	채택여부	N	채택여부
95%	53	O	53	O	53	O	54	O	55	O	63	O	56	O	64	O
97%	33	O	30	O	34	O	30	O	48	X	41	O	49	X	43	X
99%	19	X	12	O	20	X	15	O	27	X	12	O	29	X	15	O

위의 세 신뢰수준에 대해 모형의 타당성을 알아보기 위해 1000개의 수익률을 10개의 집단으로 나누어 교차타당성 방법을 이용하였다. 즉, 900개의 훈련자료(training data)로 VaR를 계산하고 나머지 100개의 수익률 검증자료(test data)에서 VaR보다 작은 개수를 구하는 작업을 10번 반복하여 전체에서 VaR보다 작은 수익률의 비율을 계산하였다. <표 6-4>는 원 추정된 VaR의 타당성 검정의 결과이다.

<표 6-4> 각 신뢰수준에 대한 추정 VaR의 타당성 검정

	KOSPI				KOSDAQ			
	산술수익률		기하수익률		산술수익률		기하수익률	
신뢰수준	변환전	변환후	변환전	변환후	변환전	변환후	변환전	변환후
95%	0.053	0.053	0.053	0.054	0.055	0.063	0.056	0.064
97%	0.033	0.030	0.034	0.030	0.048	0.041	0.049	0.043
99%	0.019	0.012	0.020	0.015	0.027	0.012	0.029	0.015

위 <표 6-3>과 <표 6-4>의 결과를 정리하면 다음과 같다.

(1) 변환하기 전 자료를 정규분포를 가정하여 측정한 것을 보면 KOSPI와 KOSDAQ의 모든 수익률에 대한 99% 신뢰수준에서 측정된 VaR는 채택역을 만족하지 못하는 것으로 타나나고 있다. 타당성 결과가 상대적으로 높게 나타났는데 이것은 추정된 VaR가 상대적으로 과소평가되어 있는 것을 볼 수 있다.

(2) KOSPI의 수익률에서 modulus 변환을 이용하여 계산된 VaR가 전반적으로 타당한 것으로 나타났다.

(3) KOSDAQ의 경우, 95% 신뢰수준에서 modulus 변환을 이용한 VaR는 과대평가되었다. 추가적인 Yeo-Johnson 변환을 이용하여 추가분석한 결과 95%와 97% 신뢰수준에서 다른 방법보다 타당한 것으로 나타났다.

위의 결과를 종합적으로 판단하면 변환을 하지 않고 구한 VaR보다 수익률을 변환하여 정규성에 근접하도록 한 다음 위수를 구하고 그 값을 다시 역변환 시켜 계산된 VaR가 더 타당하다고 볼 수 있다.

7. 결론 및 향후 연구 방향

주식투자는 대체로 위험이 크고 투자수익이 높기 때문에 위험을 감수하면서 높은 투자수익을 원할 때 사용하는 투자 방법이다. 위험이 크다는 것은 확률적으로 실패할 수 있는 여지가 그만큼 커진다는 것을 의미한다. 최적의 투자를 위해서는 위험과 투자 수익률을 모두 평가하는 것이 현명한 주식투자의 방법이 된다. 투자의 위험을 측정하기 위한 방법으로 전통적인 위험측정치를 보완한 VaR이 많이 사용되고 있다.

본 논문에서는 변환을 통하여 VaR값의 타당성을 높이는 방법에 대해 연구하였으며 실증분석으로 우리나라의 KOSPI와 KOSDAQ 주가 자료가 사용되었다. 이들 자료는 정규분포보다 꼬리가 두터운 모양을 하고 있어 modulus 변환을 통하여 정규성을 높인 후 VaR를 계산한 다음 역변환을 이용하여 원자료의 척도로 VaR를 구하였다. 변환 전의 VaR는 99% 신뢰수준에서 상대적으로 과소평가 되었는데, 이것은 측정된 위험이 실제의 위험보다 과소평가할 가능성이 있다는 것을 의미한다. 그러나 변환을 이용한 경우 99% 신뢰수준 에서는 변환 전에 비해 타당성이 높아지는 것으로 나와 좀 더 적절한 VaR값으로 볼 수있다.

본 논문에서는 주식시장의 자료를 이용하여 정규성을 만족하지 않을 때 변환을 이용하여 VaR를 추정하였다. 향후 환율, 채권 등의 타 금융상품에 대한 VaR를 추정해 보는 것도 의미가 있을 것이다.

참고문헌

1. 김진호, 오세경, 이건호(1999), 위험관리론, *경문사*
2. Bollerslev, T.(1986), Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, vol. 31, 307-327.
3. Box, G. E. P. and Cox, C. R.(1964), An Analysis of Transformations, *Journal of Royal Statistical Society*, series B, 26, 211-252.
4. Engle, R. F. (1982), Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation, Econometrica, 50, 987-1008.
5. Fama, E. F. (1965), The Behavior of Stock Market Prices, Journal of Business, 38, 34-105
6. John, J. A. and Draper, N. R. (1980), An Alternative Family of Transformations, Applied Statistics, 29, 190-197
7. Johnson, N. L. (1949), System of Frequency Curves Generated by Methods of Translation, *Biometrika*, 36, 149-176.
8. Kupiec, P.(1995), Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models, *The Journal of Derivatives*, vol. 2, 73-84

9. Li, D.(1999), Value at Risk Based on the Volatility Skewness and Kurtosis, RiskMetrics Group. http://www.riskmetrics.com/research/working/var4mm.pdf
10. McCulloch, J. H.(1996), Financial Applications of Stable distributions, in Statistical Methods in Finance, *Handbook of Statistics*, vol. 14, 393-425, North-Holland, Amsterdam.
11. McDonald, J. B.(1996), Probability Distribution for Financial Models, *Handbook of Statistics*, vol. 14, 427-461, Eds. Madalla and Rao. Amsterdam: Elsevier.
12. Turan G. B. (2003), The generalized extreme value distribution, *Economics Letters,* vol. 79, 423-427.
13. van Zwet, W. R. (1964), *Convex Transformations of Random Variables*, Amsterdam: Mathematisch Centrum.
14. Yeo, I. K. and Johnson, R. A.(2000), A new family of power to improve normality or symmetry, *Biometrika,* vol. 87, 954-959.
15. Zangari, P.(1996), An Improved Methodology for Measuring VaR. *RiskMetrics Monitor*, 2nd quarter, 7-25.

[2005년 4월 접수, 2005년 7월 채택]