Journal of Korean
Data & Information Science Society
2005, Vol. 16, No. 2, pp. 371~382

A Comparative Study for Several Bayesian Estimators Under Squared Error Loss Function[1)]

Yeong-Hwa Kim[2)]

Abstract

The paper compares the performance of some widely used Bayesian estimators such as Bayes estimator, empirical Bayes estimator, constrained Bayes estimator and constrained Bayes estimator by means of a new measurement under squared error loss function for the typical normal-normal situation. The proposed measurement is a weighted sum of the precisions of first and second moments. As a result, one can gets the criterion according to the size of prior variance against the population variance.

Keywords : Bayes estimator, constrained Bayes estimator, constrained empirical Bayes estimator, empirical Bayes estimator, mean squared error, squared error loss

1. 서 론

최근 들어 다양한 분야에 걸쳐 베이지안(Bayesian) 추정기법이 널리 활용되고 있으며, 주로 사용되는 추정량으로는 Bayes 추정량(Bayes estimator), EB 추정량(empirical Bayes estimator), CB 추정량(constrained Bayes estimator), CEB 추정량(constrained empirical Bayes estimator) 등이 있다. Bayes 추정량은 주로 제곱손실함수 (squared error loss function) 에 근거하여 구해지며, EB 추정량은 초모수(hyperparameter)의 추정량을 사후분포의 평균(posterior mean)에 대입하여 구해지는 것이 일반적이다. 또한 CB 추정량과 CEB 추정량은 Bayes 추정량과 EB 추정량이 축소추정량(shrinkage estimator)인 단점을 보완하여 1차 적률(moment)과 2차 적률에 대하여 주어진 제한조건을 만족하는 추정량이다. 이러한 추정량들은 고유의 특성 및 장단점을 지니고 있어 모든 경우에 있어 어느 것이 가장 좋다고 할 수는 없다.

---

1) This research was supported by the Chung-Ang University research grants in 2004.
2) Assistant Professor, Department of Statistics, Chung-Ang University, Seoul 156-756, Korea.
E-mail : gogators@cau.ac.kr

본 연구에서는 관심의 대상이 되는 모집단이 정규모집단이고 관심이 있는 모수의 사전분포가 정규분포인 Normal-Normal 상황을 가정하고, 제곱오차 손실함수(squared error loss function)하에서의 여러 가지 베이지안 추정량 및 MSE(mean squared error)를 제시하였다. 또한 분석자가 분포의 중심과 산포를 중요시하는 정도에 따라 적절한 베이지안 추정량을 선택하여 사용할 수 있는 기준이 될 수 있는 새로운 척도(measurement)를 1차 적률과 2차 적률의 가중합의 형태로서 제시하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 모집단의 분포와 사전분포가 모두 정규분포인 경우, 즉 Normal-Normal 인 경우에 대하여 제곱오차 손실함수를 가정하고 Bayes 추정량(Bayes estimator), CB 추정량(constrained Bayes estimator), EB 추정량(empirical Bayes estimator), CEB 추정량(constrained empirical Bayes estimator) 등을 제시하고 각 추정량들의 MSE(mean squared error) 또는 근사적 MSE(asymptotic mean squared error)를 제시하였다. 또한 1차 적률과 2차 적률을 이용하여 연구자의 의도와 상황에 따라 가장 합리적인 베이지안 추정량을 선택하여 사용할 수 있도록 가중치를 달리 하여 정도(precision)를 비교할 수 있는 새로운 척도를 제시하였다. 3장에서는 본 연구에서 제시된 척도를 통하여 네 가지 베이지안 추정량들을 비교하는 모의실험 부분이며 비교방법으로는 전체 반복에서 네 가지 서로 다른 추정량으로부터 얻어지는 척도의 평균값과 전체 반복 가운데 최소값을 갖는 경우의 수를 사용하였다. 4장에서는 본 연구의 결과로부터 도출된 결론을 요약하였다.

2. 제곱오차 손실함수(Squared Error Loss Function)하에서의 추정

본 연구에서 고려하는 모형은 다음과 같다.

$$X_i|\,\theta_i \sim indep.\,N(\theta_i, 1)$$
$$\theta_i \sim i.i.d\ N(\mu, A),\ A > 0\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

여기서 μ 와 A 는 모두 알려져 있지 않다고 가정한다. 이러한 경우에 $X_i \sim i.i.d.\,N(\mu, (1+A))$, 즉 $\boldsymbol{X} \sim N(\mu \mathbf{1}_m, (1+A)\boldsymbol{I}_m)$이며, 여기서 $\mathbf{1}_m$ 은 모든 원소가 1 인 $m \times 1$ 벡터이다. 또한 본 연구에서는 손실함수로서 제곱오차손실함수(squared error loss function)를 가정한다. 또한 $X_i = x_i$ 가 주어졌을 때 θ_i 의 사후분포는 다음과 같다.

$$\theta_i|\,X_i = x_i \sim iid.\,N((1-B)x_i + B\mu, 1-B) \quad , \quad B = (1+A)^{-1}\ .$$

2.1 Bayes 추정량(Bayes Estimator)

제곱오차손실함수(squared error loss function)하에서 θ_i 의 Bayes 추정량 $\hat{\theta}_i{}^B$ 은

사후분포(posterior distribution)의 평균과 같으며 다음과 같다.

$$\hat{\theta}_i^{\,B} = (1-B)X_i + B\mu\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

여기서, $B = (1+A)^{-1}$ 이며 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)^T$, $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)^T$ 라 하면 Bayes 추정량은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{\theta}^{\,B} = (1-B)\boldsymbol{X} + B\mu\mathbf{1}_m\ .$$

또한 Bayes 추정량 $\hat{\theta}^{\,B}$ 의 MSE 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}^{\,B}) &= m^{-1}E||\hat{\theta}^{\,B} - \theta||^2 \\ &= m^{-1}\sum_{i=1}^{m} E(\hat{\theta}_i^{\,B} - \theta_i)^2 = 1 - B \end{aligned}\ .$$

2.2 EB 추정량(Empirical Bayes Estimator)

$\overline{X} = m^{-1}\sum_{i=1}^{m} X_i$, $S = \sum_{i=1}^{m} (X_i - \overline{X})^2/(m-1)$ 라 하면, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)^T$ 의 EB 추정량은 다음과 같으며, 이를 James-Stein 추정량(James and Stein, 1961)이라 한다.

$$\hat{\theta}^{\,JS} = \overline{X}\mathbf{1}_m + \left(1 - \frac{m-3}{(m-1)S}\right)(\boldsymbol{X} - \overline{X}\mathbf{1}_m)\ .$$

Morris(1981)는 위의 추정량을 수정하여 다음과 같은 EB 추정량 $\hat{\theta}^{\,EB}$ 를 제시하였고

$$\hat{\theta}^{\,EB} = (1-\hat{B})\boldsymbol{X} + \hat{B}\overline{X}\mathbf{1}_m\ ,\ \hat{B} = min\left(\frac{m-3}{m-1}, \frac{m-3}{(m-1)S}\right)\ .$$

본 연구에서는 이것을 EB 추정량으로 사용한다. 또한 $MSE(\hat{\theta}^{\,EB})$ 는 다음과 같이 정의되며

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}^{\,EB}) &= m^{-1}E||\hat{\theta}^{\,EB} - \theta||^2 \\ &= m^{-1}E||\hat{\theta}^{\,EB} - \hat{\theta}^{\,B} + \hat{\theta}^{\,B} - \theta||^2 \\ &= m^{-1}E||\hat{\theta}^{\,EB} - \hat{\theta}^{\,B}||^2 + E||\hat{\theta}^{\,B} - \theta||^2 \\ &= 1 - B + m^{-1}E||\hat{\theta}^{\,EB} - \hat{\theta}^{\,B}||^2 \end{aligned}\ .$$

Ghosh, Kim & Kim(2004) 은 위 식을 $O(m^{-1})$ 까지 근사적으로 전개하여 다음 식을 제시하였다.

$$MSE(\hat{\theta}^{EB}) \approx 1 - B + \frac{3B}{m} \ .$$

2.3 CB 추정량(Constrained Bayes Estimator)

Bayes 추정량과 EB 추정량은 여러 모수를 동시에 추정하는 경우에 널리 사용되고 있으며 특히 제곱오차 손실함수하에서 사후분포의 평균은 최적의 추정량으로 알려져 있다. 그러나 이러한 사후분포의 평균값들은 사후분포를 지나치게 축소(shrink)하는 단점이 있다. 즉, 1차 적률과 2차 적률을 동시에 만족시키지 못하는 단점이 있다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 Louis(1984)가 제한적(constrained) Bayes 추정법을 정규분포의 가정하에서 제안하였고 Ghosh(1992)는 임의의 분포에 대하여 Louis의 제안을 일반화하였으며 이를 통해 얻어지는 추정량을 CB(Constrained Bayes) 추정량이라 하였다. 즉, CB 추정량은 추정량의 적합도(the goodness of fit)와 추정의 정도(the precision of estimation)를 동시에 만족시키고자 하는 취지에서 제안된 추정량이다.

본 연구의 가정에서 $B = (1+A)^{-1}$, $\overline{X} = m^{-1}\sum_{i=1}^{m} X_i$, $S = \sum_{i=1}^{m} (X_i - \overline{X})^2/(m-1)$ 라 정의하면 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)^T$ 의 CB 추정량 $\hat{\theta}^{CB}$ 는 다음과 같다.

$$\hat{\theta}^{CB} = a_B(1-B)(\boldsymbol{X} - \overline{X}\mathbf{1}_m) + [(1-B)\overline{X} + B\mu]\mathbf{1}_m \ .$$

여기서 $a_B = [1 + (1-B)^{-1}S^{-1}]^{1/2}$ 이다. Kim(2004)의 결과를 이용하면 $MSE(\hat{\theta}^{CB})$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}^{CB}) &= m^{-1}E|\,|\hat{\theta}^{CB} - \theta|\,|^2 \\ &= 1 - B + (1-B)^2 m^{-1}(m-1)\,E[\{a(\boldsymbol{X}) - 1\}^2 S] \ . \end{aligned}$$

또한 , Kim(2004) 은 다음을 보였고

$$\begin{aligned} &E[a_B^2 S] = B^{-1}(1-B)^{-1} \quad , \quad E[S] = B^{-1} \\ &E[a_B S] = (1-B)^{-1/2}\left[B^{-1} - \frac{B}{4m} + O(m^{-3/2})\right] \end{aligned}$$

이를 이용하여 $MSE(\hat{\theta}^{CB})$를 다음과 같이 근사적으로 제시하였다.

$$MSE(\hat{\theta}^{CB}) \approx 1-B + (1-B)^2\frac{m-1}{m}\left[\frac{1}{B(1-B)} - 2(1-B)^{-1/2}\left(B^{-1}-\frac{B}{4m}\right)+B^{-1}\right]$$

2.4 CEB 추정량(Constrained Empirical Bayes Estimator)

CEB(Constrained Empirical Bayes) 추정량은 CB 추정량에서 μ 에 $\overline{X}$ 를 대입하고 B 에 $\hat{B}$ 를 대입하여 얻어진다. 따라서 $\hat{B} = min\left(\frac{m-3}{m-1}, \frac{m-3}{(m-1)S}\right)$, $a_{EB} = \left(1+(1-\hat{B})^{-1}S^{-1}\right)^{1/2}$ 라 하면, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)^T$ 의 CEB 추정량 $\hat{\theta}^{CEB}$ 는 다음과 같다.

$$\hat{\theta}^{CEB} = a_{EB}[(1-\hat{B})\boldsymbol{X} + \hat{B}\overline{X}\mathbf{1}_m] + (1-a_{EB})\overline{X}\mathbf{1}_m \ .$$

여기서 $\overline{X} = m^{-1}\sum_{i=1}^{m} X_i$, $S = \sum_{i=1}^{m} (X_i - \overline{X})^2/(m-1)$ 이다. 또한 $MSE(\hat{\theta}^{CEB})$ 는 다음과 같으며

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}^{CEB}) &= m^{-1}E||\hat{\theta}^{CEB} - \theta||^2 \\ &= m^{-1}E||\hat{\theta}^{CEB} - \hat{\theta}^{B} + \hat{\theta}^{B} - \theta||^2 \\ &= m^{-1}\{E||\hat{\theta}^{CEB} - \hat{\theta}^{B}||^2 + E||\hat{\theta}^{B} - \theta||^2\} \quad . \end{aligned}$$

위 식에서 $m^{-1}E||\hat{\theta}^{B} - \theta||^2 = m^{-1}\sum_{i=1}^{m} E(\hat{\theta}_i^{B} - \theta_i)^2 = 1-B$ 이고 Kim(2004)은 $m^{-1}E||\hat{\theta}^{CEB} - \hat{\theta}^{B}||^2$ 이 다음과 같이 근사되는 것을 증명하였다.

$$\begin{aligned} m^{-1}E||\hat{\theta}^{CEB} - \hat{\theta}^{B}||^2 = \frac{B}{m} &+ \frac{m-1}{m}\frac{1-B}{B}\{1-(1-B)^{1/2}\}^2 \\ &+ \frac{1}{2m}\frac{B}{\sqrt{1-B}} + o(m^{-1}) \quad . \end{aligned}$$

따라서 $MSE(\hat{\theta}^{CEB})$는 근사적으로 다음과 같게 됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}^{CEB}) \approx\ & 1-B+\frac{1-B}{B}\{1-(1-B)^{1/2}\}^2 \\ &+ \frac{1}{m}\left[B - \frac{1-B}{B}\{1-(1-B)^{1/2}\}^2 + \frac{1}{2}\frac{B}{\sqrt{1-B}}\right] \quad . \end{aligned}$$

2.5 베이지안 추정량들의 비교

연구목적과 연구자의 주관에 따라 추정량의 적합도(the goodness of fit)와 추정의 정도(the precision of estimation)를 동시에 고려하여 가장 적합한 베이지안 통계량을 선택하여 사용할 수 있도록 하기 위하여 다음과 같은 새로운 척도를 제시하고자 한다.

$$T = w\left\{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \left|\hat{\theta}_i - \theta_i\right|\right\} + (1-w)\left\{\left|\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} (\hat{\theta}_i - \bar{\hat{\theta}})^2} - \sqrt{MSE(\hat{\theta})}\right|\right\} .$$

여기서 $\bar{\hat{\theta}} = m^{-1}\sum_{i=1}^{m} \hat{\theta}_i$ 이고 적합도와 추정의 정도에 대한 가중치를 나타내는 w 는 0과 1 사이의 값을 갖는다. 즉, $0 \le w \le 1$ 이며 w 값이 1에 가까우면 적합도를 더 중요하게 여기는 것이고 $w = 0.5$ 이면 적합도와 추정의 정도에 동일한 가중치를 주는 것이며 w값이 0에 가까우면 추정의 정도를 더 중요하게 여기는 것을 의미한다.

3. 모의실험

본 연구의 모의실험 절차는 다음과 같다.

1. $\mu = 0.0$ 으로 고정하고 $m = 10, 20, 50$ 에 대하여 $A = 0.5, 1, 2$, 를 사용한다.
2. Normal-Normal 가정하에서 본 연구에서 비교하고자 하는 서로 다른 네 가지 베이지안 추정량에 대하여 위에 정의된 척도 T 를 얻는다.
3. 단계 1, 2를 $10,000$ 번 반복하여 네 가지 추정량에 대하여 얻어지는 T 값의 평균을 구하고 각 반복시에 최소값을 갖는 추정량이 어떤 것인지 확인한다.

모의실험은 SAS/IML 로 수행하였으며 그 결과는 다음과 같다.
[표 1]은 $A = 0.5$ 일 때 $m = 10, 20, 50$ 인 경우에 대하여 네 가지 베이지안 통계량으로부터 $10,000$ 번의 반복을 통해 얻어지는 T 값들의 평균값이며 또한 [표 2]는 같은 경우에 $10,000$ 번의 반복 중에서 최소 T 값을 주는 회수를 비교한 것이다. [표 1]과 [표 2]를 통해서 $A = 0.5$ 인 경우에는 m 값에 상관없이 $0 \le w \le 0.5$ 이면 즉, 적합도보다 추정의 정도에 더 크거나 같은 가중을 둔다면 CB 추정량을 사용하는 것이, 그렇지 않은 경우에는 Bayes 추정량을 사용하는 것이 합리적임을 알 수 있다.

m	w	$\hat{\theta}^{B}$	$\hat{\theta}^{EB}$	$\hat{\theta}^{CB}$	$\hat{\theta}^{CEB}$
10	0.1	0.2100	0.3533	*0.1084*	0.5205
	0.2	0.2394	0.3746	*0.1524*	0.6062
	0.5	0.3210	0.4409	*0.2891*	0.8499
	0.8	*0.4060*	0.5060	0.4275	1.0908
	0.9	*0.4318*	0.5297	0.4698	1.1765
20	0.1	0.2041	0.3055	*0.1038*	0.5302
	0.2	0.2327	0.3292	*0.1499*	0.6203
	0.5	0.3181	0.3950	*0.2875*	0.8853
	0.8	*0.4051*	0.4689	0.4275	1.1671
	0.9	*0.4332*	0.4909	0.4729	1.2471
50	0.1	0.1997	0.2476	*0.1034*	0.5181
	0.2	0.2288	0.2752	*0.1496*	0.6076
	0.5	0.3158	0.3542	*0.2877*	0.8749
	0.8	*0.4028*	0.4333	0.4264	1.1467
	0.9	*0.4320*	0.4599	0.4720	1.2355

[표 1] $A=0.5$ 일 때 T 값의 평균

m	w	$\hat{\theta}^{B}$	$\hat{\theta}^{EB}$	$\hat{\theta}^{CB}$	$\hat{\theta}^{CEB}$
10	0.1	2148	1224	*6613*	15
	0.2	2070	1148	*6773*	9
	0.5	3016	707	*6270*	7
	0.8	*6043*	744	3174	39
	0.9	*6302*	1146	2517	35
20	0.1	1384	1628	*6988*	0
	0.2	1525	1595	*6880*	1
	0.5	2179	1480	*6340*	1
	0.8	*6326*	972	2702	0
	0.9	*6923*	1195	1880	2
50	0.1	534	2158	*7308*	0
	0.2	656	2161	*7183*	0
	0.5	1070	2548	*6382*	0
	0.8	*6367*	1871	1762	0
	0.9	*7543*	1609	848	0

[표 2] $A=0.5$ 일 때 최소 T 값을 갖는 경우

[표 3]은 $A=1$ 일 때 $m=10,20,50$ 인 경우에 대하여 네 가지 베이지안 통계량으로부터 $10,000$ 번의 반복을 통해 얻어지는 T 값들의 평균값이며 또한 [표 4]는 같은 경우에 $10,000$ 번의 반복 중에서 최소 T 값을 주는 회수를 비교한 것이다. 모의실험의 결과를 보면 $A=1$ 인 경우에는 m 값과 w 값에 상관없이 즉, 적합도와 추정

의 정도 중 어떤 것에 더 큰 가중을 두던지 Bayes 추정량이 가장 좋은 결과를 주는 것을 알 수 있다.

m	w	$\hat{\theta}^{B}$	$\hat{\theta}^{EB}$	$\hat{\theta}^{CB}$	$\hat{\theta}^{CEB}$
10	0.1	*0.1752*	0.3778	0.2649	0.3480
	0.2	*0.2191*	0.4069	0.3050	0.4081
	0.5	*0.3482*	0.4886	0.4190	0.5975
	0.8	*0.4774*	0.5718	0.5344	0.7799
	0.9	*0.5198*	0.6006	0.5716	0.8482
20	0.1	*0.1390*	0.2986	0.2690	0.3418
	0.2	*0.1856*	0.3298	0.3079	0.4018
	0.5	*0.3282*	0.4344	0.4202	0.5930
	0.8	*0.4697*	0.5340	0.5353	0.7746
	0.9	*0.5180*	0.5694	0.5735	0.8397
50	0.1	*0.1079*	0.2114	0.2705	0.3314
	0.2	*0.1590*	0.2540	0.3082	0.3897
	0.5	*0.3103*	0.3748	0.4219	0.5653
	0.8	*0.4625*	0.4982	0.5354	0.7423
	0.9	*0.5136*	0.5393	0.5731	0.7999

[표 3] $A=1.0$ 일 때 T 값의 평균

m	w	$\hat{\theta}^{B}$	$\hat{\theta}^{EB}$	$\hat{\theta}^{CB}$	$\hat{\theta}^{CEB}$
10	0.1	*5303*	331	2359	2007
	0.2	*5598*	297	2243	1862
	0.5	*6916*	415	1781	888
	0.8	*6738*	1081	1612	569
	0.9	*6016*	1476	1970	538
20	0.1	*7333*	204	1176	1287
	0.2	*7762*	164	1008	1066
	0.5	*8513*	289	805	393
	0.8	*8089*	896	852	163
	0.9	*7197*	1429	1224	150
50	0.1	*9311*	91	222	376
	0.2	*9440*	85	164	311
	0.5	*9714*	156	81	49
	0.8	*9294*	590	107	9
	0.9	*8394*	1247	354	5

[표 4] $A=1.0$ 일 때 최소 T 값을 갖는 경우

[표 5]의 결과를 보면 $A=2.0$ 이고 $m=10$ 인 경우에는 $w \geq 0.5$ 라면 즉, 추정의 정도보다 적합도에 더 크거나 같은 가중을 둔다면 Bayes 추정량을 사용하는 것이, 그렇지 않은 경우에는 CE 추정량을 사용하는 것이 좋고, $m=20, 50$ 인 경우에는 $w \leq 0.5$ 라면 즉, 적합도보다 추정의 정도에 더 크거나 같은 가중을 둔다면 CEB 추정량을 사용하는 것이, 그렇지 않은 경우에는 Bayes 추정량을 사용하는 것이 나은 것을 알 수 있다. [표 6]에서도 동일한 결론을 얻었으나 $m=10$ 이고 $w=0.5$ 인 경우만 다른 결과를 얻었다.

m	w	$\hat{\theta}^{B}$	$\hat{\theta}^{EB}$	$\hat{\theta}^{CB}$	$\hat{\theta}^{CEB}$
10	0.1	0.3710	0.5158	0.5585	*0.3156*
	0.2	0.3988	0.5317	0.5706	*0.3640*
	0.5	*0.4933*	0.5928	0.6130	0.5125
	0.8	*0.5844*	0.6492	0.6529	0.6597
	0.9	*0.6219*	0.6744	0.6729	0.7138
20	0.1	0.3592	0.4306	0.5619	0.2513
	0.2	0.3933	0.4582	0.5770	0.3062
	0.5	0.4902	0.5398	0.6175	0.4743
	0.8	*0.5865*	0.6210	0.6572	0.6427
	0.9	*0.6200*	0.6493	0.6717	0.6984
50	0.1	0.3668	0.3849	0.5691	*0.1976*
	0.2	0.3972	0.4130	0.5809	*0.2578*
	0.5	0.4920	0.5053	0.6188	*0.4424*
	0.8	*0.5876*	0.5986	0.6574	0.6282
	0.9	*0.6189*	0.6293	0.6703	0.6880

[표 5] $A=2.0$ 일 때 T 값의 평균

m	w	$\hat{\theta}^{B}$	$\hat{\theta}^{EB}$	$\hat{\theta}^{CB}$	$\hat{\theta}^{CEB}$
10	0.1	1858	934	248	***6960***
	0.2	1941	995	220	***6844***
	0.5	3085	1278	183	***5454***
	0.8	***4668***	1749	954	2629
	0.9	***4319***	1905	1604	2172
20	0.1	1247	1244	20	***7489***
	0.2	1170	1343	18	***7469***
	0.5	1593	1732	10	***6665***
	0.8	***4737***	2395	395	2473
	0.9	***4905***	2285	1109	1701
50	0.1	276	1078	0	***8646***
	0.2	300	1141	0	***8559***
	0.5	343	1717	0	***7940***
	0.8	***4558***	3458	43	1941
	0.9	***5579***	3176	371	874

[표 6] $A=2.0$ 일 때 최소 T 값을 갖는 경우

본 연구에서 제안된 새로운 추정량의 정도(precision)의 한 예로서 제시된 [표 7]은 $A=0.5$ 일 때 $m=10,20,50$ 인 경우에 대하여 네 가지 베이지안 통계량으로부터 $10,000$ 번의 반복을 통해 얻어지는 T 값들에 대한 것이며, 다른 여러 경우에 대해서도 유사한 결과를 보였다. 여기서 추정의 정도(precision)은 $10,000$ 번의 반복을 통해 얻어진 T 값들의 분산을 반복수의 제곱근으로 나눈 것을 의미하며 각 추정량에 대하여 비슷한 크기를 나타내는 것을 알 수 있다.

m	w	$\hat{\theta}^{B}$	$\hat{\theta}^{EB}$	$\hat{\theta}^{CB}$	$\hat{\theta}^{CEB}$
10	0.1	0.000781	0.001675	0.000461	0.001003
	0.2	0.000727	0.001535	0.000451	0.000974
	0.5	0.000707	0.001380	0.000641	0.001102
	0.8	0.000913	0.001388	0.000994	0.001398
	0.9	0.001003	0.001477	0.001106	0.001456
20	0.1	0.000583	0.001488	0.000335	0.000902
	0.2	0.000527	0.001351	0.000325	0.000862
	0.5	0.000502	0.001010	0.000451	0.000886
	0.8	0.000632	0.000882	0.000688	0.001055
	0.9	0.000714	0.000926	0.000786	0.001091
50	0.1	0.000370	0.001308	0.000211	0.000676
	0.2	0.000338	0.001167	0.000206	0.000636
	0.5	0.000319	0.000811	0.000289	0.000586
	0.8	0.000401	0.000574	0.000435	0.000651
	0.9	0.000451	0.000550	0.000496	0.000696

[표 7] $A = 0.5$ 일 때 T 값의 Precision

4. 결 론

본 연구에서는 베이지안 추정량을 사용하는데 있어 적합도(the goodness of fit)와 추정의 정도(the precision of estimation) 가운데 연구목적과 연구자의 판단에 따라 더 가중치를 두어야하는 경우에 적합한 추정량을 선택하는 척도를 제시하고 모의실험을 통하여 경우에 따라 서로 다른 추정량의 사용이 적합하다는 결론을 제안하였다.

본 연구에서 가정한 다음의 모형에 대하여

$$X_i | \theta_i \sim indep. N(\theta_i, 1)$$
$$\theta_i \sim i.i.d\ N(\mu, A),\ A > 0,\ i = 1, 2, \ldots m$$

3장의 모의실험에서 얻어진 연구결과를 요약해 보면 다음과 같다.

사전분포의 분산 A 가 모집단의 분산 1 보다 작은 경우에는 m 값에 상관없이 적합도보다 추정의 정도에 더 크거나 같은 가중을 둔다면 CB 추정량을 사용하고 반대의 경우에는 Bayes 추정량을 사용하는 것이 합리적이다. 본 논문에서는 $A=0.5$ 인 경우의 결과만 제시하였으나 $A<1$ 인 경우에서는 동일한 결과를 보여주는 것을 확인할 수 있었다.

반면에 A 가 모집단의 분산보다 큰 경우에는, 만약 m 값이 충분히 클 때 적합도보다 추정의 정도에 더 크거나 같은 가중을 둔다면 CEB 추정량이 좋고 그렇지 않은 경우에는 Bayes 추정량이 나으며, 만약 m 값이 작을 때 추정의 정도보다 적합도에 더 크거나 같은 가중을 둔다면 Bayes 추정량을 사용하고 그렇지 않은 경우에는 CE 추정량을 사용하는 것이 타당하다. 본 논문에서는 $A=2.0$ 인 경우의 결과만 제시하였으나 $A>1$ 인 경우에서는 모두 동일한 결과를 보여주는 것을 확인할 수 있었다.

또한 A 가 모집단의 분산과 같은 경우에는 모든 경우에서 Bayes 추정량이 가장 좋은 것을 알 수 있었다. 본 연구에서는 $m=10, 20, 50$의 결과만 3장에서 제시하였으나 $m>50$ 에서도 모두 동일한 결과를 보여주는 것을 확인하였다.

References

1. Ghosh, M. (1992), Constrained Bayes Estimation with Applications, *Journal of the American Statistical Society*, Vol. 82, 533-540.
2. Ghosh, M. , Kim, D & Kim, M (2004), Asymptotic mean squared error of constrained James-Stein estimators, *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol.126, No.1, 107-118.
3. James, W. and Stein, C.(1961), Estimation with Quadratic Loss, *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* 1, 361-380, Univ. California Press, Berkeley.
4. Kim, M. (2004), Constrained Bayes and empirical Bayes estimators under squared error and balanced loss functions, Ph.D. Dissertation, University of Florida.
5. Louis, T.A. (1984), Estimating a Population of Parameter Values Using Bayes and Empirical Bayes Methods, *Journal of the American Statistical Society*, Vol. 79, 393-398.
6. Morris, C. (1981), Parametric Empirical Bayes Confidence Intervals, In *Scientific Inference, Data Analysis, and Robustness*, eds. G.E.P. Box, T. Leonard and C.F. Jeff Wu, Academic Press, 25-50.

[2004년 12월 접수, 2005년 5월 채택]